

Fyzika: Mechanika

Peter Bokes

4. septembra 2017

Obsah

1	Kinematika	2
1.1	Dĺžka a čas	2
1.1.1	Dĺžka	2
1.1.2	Čas	3
1.1.3	Zápis veličiny pomocou čísiel a jednotiek	4
1.1.4	Delenie jednotky veličiny, presnosť merania veličiny	5
1.2	Jedno-rozmerný pohyb	10
1.2.1	Súradnica	10
1.2.2	Motivácia kinematických veličín	12
1.2.3	Priemerná rýchlosť a rovnomerný pohyb	13
1.2.4	Po častiach rovnomerný pohyb	15
1.2.5	Okamžitá rýchlosť, derivácia a integrál	18
1.2.6	Zrýchlený pohyb	21
1.2.7	Zmena súradnice pri zrýchlenom pohybe	24
1.3	Pohyb v priestore	27
1.3.1	Polohový vektor	27
1.3.2	Spočítavanie vektorov a násobenie číslom	28
1.3.3	Veľkosť vektora	30
1.3.4	Jednotkové vektory	31
1.3.5	Skalárny súčin	34
1.3.6	Vektorový súčin	37
1.3.7	Rovnomerne zrýchlený pohyb v rovine	40
1.3.8	Vektory zrýchlenia a rýchlosti pri rovnomerne zrýchlenom pohybe	41
1.3.9	Počiatočné podmienky	42
1.3.10	Trajektória	43
1.3.11	Geometrický význam vektora rýchlosti	44
1.3.12	Definície okamžitého vektora rýchlosti a zrýchlenia	45
1.3.13	Pohyb po kružnici	47
1.3.14	Vektor uhlovej rýchlosti	51
1.3.15	Tangenciálne a normálové zrýchlenie	53
2	Dynamika hmotných bodov	54
2.1	Hmotnosť	54
2.2	Newtonove pohybové zákony	56
2.2.1	1. Newtonov zákon	56
2.2.2	2. Newtonov zákon	57
2.2.3	3. Newtonov zákon	59
2.3	Fyzikálne sily	62

2.3.1	Úvod	62
2.3.2	Gravitačná sila v homogénnom poli	62
2.3.3	Sila od pružiny a kontaktné sily	64
2.3.4	Trecie sily	64
2.4	Hybnosť a impulz sily	72
2.5	Práca a výkon	77
2.6	Energia	82
2.6.1	Úvod	82
2.6.2	Kinetická energia hmotných bodov	82
2.6.3	Potenciálna energia	84
2.6.4	Mechanická energia a práca	89
2.6.5	Potenciálna energia a gradient	91
3	Pohyb v gravitačnom poli	94
3.1	Gravitačný zákon	94
3.2	Homogénne gravitačné pole na povrchu Zeme	94
3.3	Pohyb družice Zeme	96
3.4	Potenciálna energia v gravitačnom poli Zeme	98
4	Dynamika tuhých telies	101
4.1	Ideálne tuhé teleso	101
4.2	Ťažisko	101
4.3	Moment zotrvačnosti	105
4.4	Prvá pohybová rovnica itt	110
4.5	Redukcia síl a moment sily	111
4.6	Druhá pohybová rovnica itt	119
4.6.1	Všeobecná formulácia	119
4.6.2	Otáčanie okolo pevnej osi	121
4.6.3	Otáčanie okolo pohyblivej osi s nemenným smerom	126
4.7	Prenos sily remenicou	130
4.8	Zachovávanie hybnosti a momentu hybnosti sústavy itt	132
4.9	Práca a mechanická energia ideálne tuhého telesa	133
5	Kmitanie	137
5.1	Pohybová rovnica netlmených kmitov	137
5.2	Mechanická energia harmonického oscilátora	141
5.3	Komplexné čísla	142
5.4	Harmonický oscilátor s komplexnou aritmetikou	146
5.5	Tlmený harmonický oscilátor	147
5.6	Budený harmonický oscilátor	151
5.6.1	Pohybová rovnica	151

5.6.2	Riešenie pohybovej rovnice	152
5.6.3	Charakter riešenia	154
5.6.4	Priemerný výkon dodávaný oscilátoru	156
5.6.5	Počiatkové podmienky a prechodný dej	158
6	Hydromechanika	165
6.1	Kvapaliny	165
6.2	Tlak	165
6.3	Hustota	167
6.4	Hydrostatika	171
6.4.1	Pascalov zákon	171
6.4.2	Hydrostatický tlak	172
6.4.3	Povrchové napätie	175
6.4.4	Kapilárny tlak	179
6.4.5	Vztlaková sila	182
6.5	Ustálené prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny	186
6.5.1	Rýchlostné pole, tok	186
6.5.2	Rovnica kontinuity, bilančné rovnice hmotnosti	188
6.5.3	Bernoulliho rovnica	189
6.5.4	Bernoulliho rovnica pre stlačiteľnú kvapalinu	195
6.5.5	Hustota toku energie	197
6.5.6	Viskozita	199
6.5.7	Laminárne prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny v potrubí	201
6.5.8	Turbulentné prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny v potrubí	205

1 Kinematika

1.1 Dĺžka a čas

1.1.1 Dĺžka

V rámci systému jednotiek SI je fyzikálnou jednotou dĺžky 1 meter. Jeho prvá medzinárodne uznávaná definícia bola zavedená v roku 1875 pri zakladaní medzinárodného úradu pre miery a metrológiu pri Paríži. Z praktického hľadiska, 1 meter mal predstavovať vzdialenosť, s ktorou sa v živote bežne stretávame (podobne ako boli historické jednotky ako napr. lakeť), no zároveň, bolo dôležité aby bola táto vzdialenosť zavedená pomocou dĺžky, ktorá je dostatočne stála a reprodukovateľne merateľná (na rozdiel od lakťov). Tento problém vyriešili v tom čase tak, že 1 meter bol zvolený ako 1/10 000 000-tina vzdialenosti od severného pólu po rovník, pozdĺž poludníka prechádzajúceho cez Paríž ¹. Zároveň, na základe vtedajších poznatkov o tejto vzdialenosti, zhotovili irídium-platinovú tyč, na ktorej dva presné vrypy vyznačovali jednotku dĺžky 1 meter.

V súčasnosti najpresnejšia metodika *priameho* merania vzdialenosti vychádza z interferenčného merania vlnovej dĺžky Hélium-Neónového lasera, pričom dosahovaná *relatívna presnosť* ² takéhoto merania je 10^{-11} ³.

Ani takto presné meranie dĺžky ale nepredstavuje súčasnú definíciu metra, pretože jednotku času možno zaviesť s výrazne lepšou relatívnou presnosťou. Od roku 1983 je 1 meter definovaný ako vzdialenosť, ktorú prejde svetlo vo vákuu presne za 1/299 792 458-tinu sekundy. Z tohto vyplýva, že definícia 1 metra je postavená na jednotke času, 1 sekunde, a zároveň, že veľkosť rýchlosti svetla vo vákuu je stanovená touto definíciou.

Príklad: Eratosthenes <https://en.wikipedia.org/wiki/Eratosthenes> našiel polomer Zeme meraním rozdielu v dĺžke tieňa vertikálnej tyče v mestách Alexandria a Syene (Aswan) vzdialených asi 800km. Rozdiel uhlov spojnic vrchola tyče s koncom tieňa predstavoval asi 1/50 celého kruhu. Z podobnosti trojuholníkov následne odhadol, že polomer Zeme je 50.800km \sim 40000km. Prirodzene, Eratosthenes nemeral dĺžku v km ale vo vtedy zaužívaných jed-

¹Z tohto dôvodu je obvod Zeme ľahko zapamätateľná hodnota 40000km, kým pre zapamätanie si jej polomeru, $R = 6378\text{km}$, bolo treba vymyslieť slovnú hračku “šetři se osle”, zvukovo pripomínajúcu toto číslo.

²Relatívna presnosť je daná bezrozmerným číslom, ktoré je dané pomerom očakávanej chyby merania veličiny k jej meranej veľkosti. K vysvetleniu tohto pojmu sa vrátíme v časti 1.1.4

³<http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/106/1/j61swy.pdf>

notkách, tzv. *stadii*.

1.1.2 Čas

Čas medzi dvoma udalosťami meriame počtom zopakovaní sa vybraného periodického deja. Historicky ľudia vychádzali zo zdanlivého pohybu slnka na oblohe. V období antiky bol jeden deň rozdelený na 12 hodín kým svietilo slnko a 12 hodín v noci. Takáto definícia hodiny prirodzene viedla k rôznym dĺžkam hodiny v rôznej časti roku (krátke denné hodiny a dlhé nočné hodiny počas zimy a naopak v lete), preto sa neskôr prešlo na 1 hodinu ako $1/24$ priemerného slnečného dňa⁴. Minúta sa zaviedla ako $1/60$ hodiny a sekunda ako $1/60$ minúty, no to až v časoch, keď ľudia dokázali vytvoriť mechanické stroje vykonávajúce 60 pravidelných opakovaní za minútu - kyvadlové hodiny. Takéto stroje dnes nazývame oscilátory, pričom tento názov zahŕňa nie len mechanické stroje ale aj elektronické či dokonca kvantové systémy. Vývoj v čoraz presnejšom zavedení fyzikálnej jednotky času úzko súvisí s konštrukciou oscilátorov vykazujúcich čoraz lepšiu stabilitu ich periódy.

V súčasnosti je jedna sekunda definovaná ako 9 192 631 770-násobok periódy žiarenia vznikajúceho špecifickým elektrónovým prechodom v atóme Cézia 133. Relatívna neistota určenia frekvencie tohto žiarenia je len asi 10^{-16} . Pretože táto je o päť rádov väčšia, ako relatívna presnosť najlepšieho merania dĺžky, je 1 meter definovaný pomocou vzdialenosti, ktorú prejde svetlo za jednu sekundu a veľkosť rýchlosti svetla určená definíciou, ako bolo uvedené v predchádzajúcej časti. Meranie frekvencie (a času) predstavuje v súčasnosti najpresnejšie meranie spomedzi meraní všetkých fyzikálnych veličín.

Príklad: Ak predpokladáme, že za jeden rok sa kvôli spomaľovaniu rotácie Zeme dĺžka dňa predĺžila o 0,017ms, ako dlho trval jeden priemerný slnečný deň pred 600 miliónmi rokov a koľko dní mal vtedy jeden rok, ak predpokladáme, že rýchlosť obiehania Zeme okolo slnka sa nemení?⁵

Riešenie: Jeden deň pred 600 miliónmi rokov trval kratšie o

$$\Delta T_{600M} = 600 \cdot 10^6 \cdot 0,017 \text{ms} = 10200 \text{s} = 2,83 \text{hod} \quad (1.1)$$

a teda deň vtedy trval zhruba 21,1 hodín.

⁴Slnečným dňom tu nerobíme odkaz na charakter pekného počasia, ale na trvanie medzi dvoma kulmináciami slnka na oblohe, spriemerované počas jedného roku.

⁵http://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_acceleration

Celkový čas obehu Zeme okolo Slnka je

$$T_{rok} = 365,24\text{dni} = 8760\text{hod.} \quad (1.2)$$

Ak predpokladáme, že celkový čas obehu Zeme ostal nezmenený, potom počet dní (otočení Zeme okolo svojej osi) za rok pred 600 miliónmi rokov bol

$$N_{600M} = \frac{T_{rok}}{T_{600M}} = \frac{8760}{21,1} = 415\text{dni.} \quad (1.3)$$

1.1.3 Zápis veličiny pomocou čísiel a jednotiek

Určenie dĺžky či času realizujeme zavedením ich fyzikálnej jednotky (1 meter alebo 1 sekunda) a číselného údaju, ktorý udáva, aký násobok danej jednotky zodpovedá študovanej vzdialenosti alebo časovému intervalu.

Napríklad, ak počet priložení 1 metra k meranej vzdialenosti medzi dvoma bodmi je n , potom prehlásime, že dĺžka vzdialenosti bodov je

$$l = n \cdot 1\text{m} = nm. \quad (1.4)$$

Symbol l v tomto prípade označuje fyzikálnu veličinu *dĺžka*, skladajúcu sa aj z číselného násobku n , aj z jednotky m.

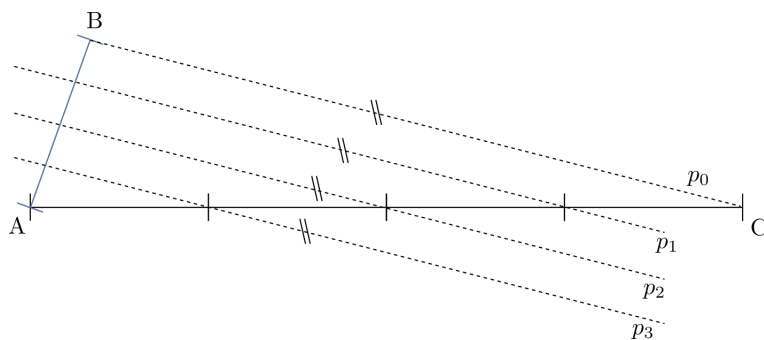
Pomocou hranatých zátvoriek zapisujeme fyzikálnu jednotku pre veličinu, napr. pre veličinu l veličinu píšeme $[l] = \text{m}$. Naopak, pre získanie číselnej hodnoty fyzikálnej veličiny bez fyzikálnej jednotky sa používajú zložené zátvorky, t.j. $\{l\} = n$. Pomocou tohto označovania môžeme rovnicu (1.4) prepísať aj do "prezátvorkovaného" tvaru $l = \{l\} \cdot [l]$, ktorý ukazuje len to, že dĺžka, tak ako aj každá iná veličina vo fyzike, sa skladá zo svojej číselnej hodnoty a jednotky.

Podobne, pre veličinu čas, zodpovedajúcej času medzi vybranými dvoma udalosťami, používame označenia

$$t = n \cdot 1\text{s} = ns. \quad (1.5)$$

V technickej praxi sa často používajú rôzne vzťahy, kde sú používané len číselné údaje, pričom musí byť uvádzané, v násobkoch akej jednotky sú uvedené tieto číselné údaje. Napríklad, dráha, ktorú prejde svetlo za daný počet hodín by sa mohla vypočítať nasledovným "technickým" vzťahom,

$$s = 1,08 \cdot 10^9 t \quad [\text{km}; \text{hod}], \quad (1.6)$$



Obr. 1: Jeden spôsob geometrického delenia definovanej dĺžky. Úsečka AB predstavuje jednotku dĺžky. Jej 4-násobným predĺžením v inom smere nájdeme bod C. Spojením B s C priamkou p_0 , a vytvorením priamok rovnobežných s p_0 a prechádzajúcich predĺženiami jednotky nájdeme teoreticky presné rozdelenie úsečky AB na štvrtiny.

kde jednotky v hranatých zátvorkách naznačujú, že výsledná dráha bude číselný násobok kilometrov, a že za čas t musíme dosádzať číselnú hodnotu v hodinách. Hoci tento spôsob zápisu je v technickej praxi častý, jasnejší je zápis pomocou symbolov,

$$s = vt; \quad v = 1,08 \cdot 10^9 \text{ km/hod.} \quad (1.7)$$

1.1.4 Delenie jednotky veličiny, presnosť merania veličiny

Zápis vzdialenosti pomocou celo-číselného násobku zvolenej jednotky dĺžky, zapísaný rovnicou 1.4, má v sebe určité geometrické predpoklady o našom priestore. Napríklad, že dokážeme preniesť danú úsečku (reprezentujúcu našu jednotku vzdialenosti) v jej smere, a že týmto prenosom sa jej dĺžka nezmení. Akokoľvek sa nám toto môže zdať prirodzené, faktom je že Euklides sa takými predpokladmi o priestore zaoberal v základoch geometrie v čase antiky, a až o viac ako 2000 rokov neskôr si C. F. Gauss, B. Riemann a iní uvedomili, že nie vždy musia byť zrejmé a totožné s tým na čo sme zvyknutí, a tak je dobré si ich predpoklad pri zavádzaní dĺžky uvedomiť.

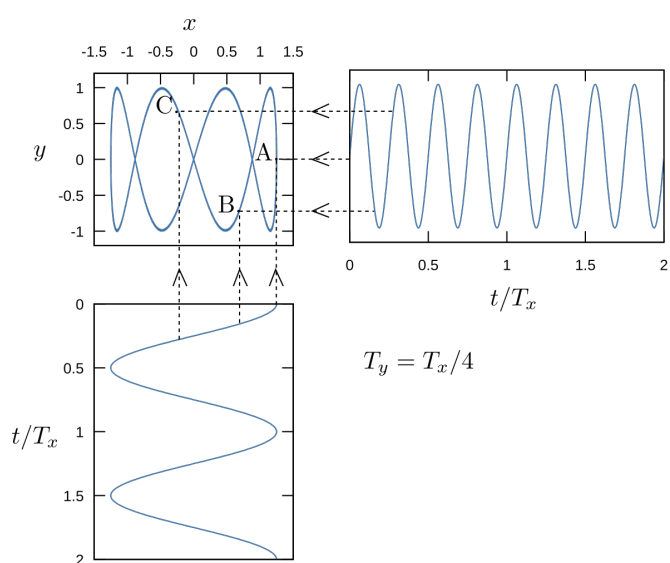
Pri meraní sa nezaobídeme len s celo-číselnými násobkami jednotky a preto treba mať postup ako zavádzať násobky menšie ako jedna, napr. $1/N$, kde N je prirodzené číslo. Toto môžeme dosiahnuť opäť geometrickým postupom - hľadáme menšiu úsečku, ktorú keď N -krát prenosieme vo svojom smere, dostaneme nami zvolenú jednotku. Tento proces si vieme predstaviť a aj prakticky realizovať celkom jednoducho pre $N = 10$ pre delenie 1 metra, čím získame *decimetre*, delením decimetra na desať *centimetre* a tak ďalej.

Geometrická metóda delenia jednotky dĺžky je popísaná na obr. 1. Deci- alebo centi- predstavujú konvenčne používané predpony pre názvy desatiny či stotiny fyzikálnej jednotky. Zoznam takto bežne používaných predpôn pre delenie alebo aj násobenie desiatimi je uvedený v tabuľke 1.

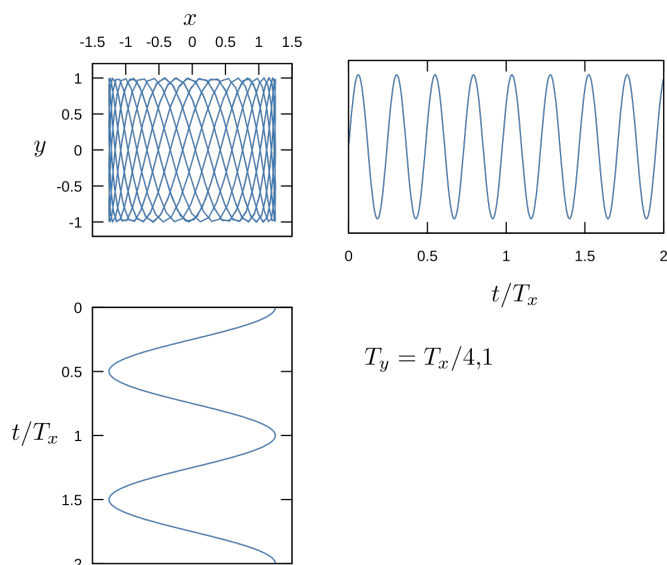
Názov	Skratka	Násobok základnej jednotky
peta	P	10^{17}
tera	T	10^{15}
giga	G	10^{12}
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
mikro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
fento	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

Tabuľka 1: Názvy, skratky, a násobky zodpovedajúce predponám indikujúcim zlomok alebo násobok základnej jednotky.

Ak budeme realizovať proces delenia na desať na nami zavedenom metri, po istom čase narazíme na problém s presnosťou. Rozdeliť 1 meter na decimetre, centimetre či milimetre si vieme predstaviť, na desiatky mikrometrov by sme už potrebovali kvalitný mikroskop. Predstavme si, že zrealizujeme takéto nadelenie 1 metra na úseky dlhé $10\mu\text{m}$. Potom vyrobíme podľa jednotky 1 meter tyč, dlhú 1 meter, najlepšou možnou technológiou akú máme k dispozícii a následne ju zmeriame, koľko $10\mu\text{m}$ metrových úsekov ju pokryje. Je celkom možné, že ich nebude 100000, ako by sme si predstavovali, ale napríklad niečo medzi 100006 a 100007, a to preto, že pri delení metra sme našou nedokonalou technológiou neposúvali nájdenú dĺžku $10\mu\text{m}$ presne aby pokryla meter, alebo že za ten čas čo sme merali sa samotný etalón metra trochu zmenil, či už teplotnou zmenou, tlakom alebo chemickou reakciou (zhrdzavel, sadla si naň molekula a pod.). V každom prípade, nemáme kontrolu nad presnosťou merania dĺžky lepšiu ako $60\text{-}70\ \mu\text{m}$, a preto prehlásime, že *relatívna presnosť* určenia merania 1 metra je len $70/1000000 \approx 7 \cdot 10^{-5}$. Ak sme na meranie použili najlepšiu technológiu na svete ktorá je k dispozícii, potom to zároveň udáva presnosť s akou dokážeme 1 meter definovať.



Obr. 2: Vznik Lissoujovho obrazca z dvoch harmonických signálov s rôznymi periódami (T_x a T_y), posielanými na x a y vstup osciloskopu. Body A,B a C sú príklady postupných polôh bodu zo súradnicami x a y . V prípade, že jedna perióda je celo-číselný násobok druhej, vznikne uzavretá *Lissoujova* krivka.



Obr. 3: V prípade, keď pomer períód signálov posielaných na x a y vstup osciloskopu nie je celé číslo, výsledná krivka sa neuzavrie, nevidíme Lissoujov obrazec z obr.2.

Podobne sa postupuje aj pri delení jednotky času - sekundy - pomocou oscilátorov s kratšou a kratšou períódou. Dobrým príkladom je pripojenie oscilátora s períódou 1 sekunda (etalón) na x -ovú os osciloskopu a rýchlejšieho oscilátora na y -ovú os osciloskopu (Obr. 2 a 3). Ak bod na obrazovke za jeden prechod zľava do prava a späť (t.j. jedna períoda v x -ovom smere) vykoná desať prechodov hore a dole po obrazovke, potom períoda rýchlejšieho oscilátora je práve desatina sekundy. To, že ide o presne desať prechodov nemusíme stihnúť odsledovať - vďaka zotrvačnosti oka sa nám bude trajektória, ktorú svetelný bod vkresluje zdať ako uzavretá krivka, tzv. Lissoujov obraz, len v prípade, že períoda pohybu v y -ovom smere je presne celo-číselný násobok períody pohybu v x -ovom smere. Príklad uzavretého Lissoujovho obrazcu pre pomer períód 1:4 je na obr. 2. Proti-príklad, keď je pomer períód nepresný, 1:4,1, je na obr. 3. Vidíme, že v tomto prípade uzavretý obrazec nevzniká, a teda nenašli sme 1/4 času etalónu.

Nepresnosť merania času by sme identifikovali tak, že ak by sme napríklad zistili, že jeden slnečný deň mal 864005 desiatín sekundy a iný 863999 desiatín sekundy, tak potom buď jeden slnečný deň nemá rovnakú dĺžku trvania (problém s definíciou sekundy ako 1/86400-tiny slnečného dňa, alebo oscilátor s períódou 0,1s nemá svoju períodu stabilnú. V každom prípade, naše

meranie času má relatívnu chybu zhruba $5/864000 \approx 1.10^{-6}$. Pripomeňme si v tejto súvislosti relatívne presnosti merania metra a sekundy dosahované v súčasnosti, spomenuté v častiach 1.1.1 a 1.1.2: 10^{-11} pre meter a 10^{-16} pre sekundu.

S problematikou definícií fyzikálnych jednotiek a ich presnosťou sa zaoberajú národné a medzinárodné normalizačné a metrologické inštitúcie a po vzájomnom konsenze vyhlasujú ako sú jednotky fyzikálnych veličín v súčasnosti definované.

Príklad: S akou presnosťou dokážeme zmerať zrýchlenie telesa, rovnomerne rozbiehajúceho sa z nulovej rýchlosti, ktoré prejde dráhu $\ell = 80\text{m}$ za čas $\tau = 4\text{s}$, ak čas dokážeme zmerať s presnosťou $\delta\tau = 10^{-2}\text{s}$ a vzdialenosť s presnosťou $\delta\ell = 10^{-4}\text{m}$?

Riešenie: Vyjadrenie pre zrýchlenie nájdeme zo vzťahu

$$l = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow a = \frac{2l}{t^2} \quad (1.8)$$

Pomocou tohto vyjadrenia nájdeme maximálne a minimálne zrýchlenie ktoré by sme dostali pri najhoršej kombinácii chýb v čase a dĺžke,

$$a_{max} = \frac{2(80 + 10^{-4})}{(4 - 10^{-2})^2} = 10,0502\text{m.s}^{-2} \quad (1.9)$$

$$a_{min} = \frac{2(80 - 10^{-4})}{(4 + 10^{-2})^2} = 9,9502\text{m.s}^{-2} \quad (1.10)$$

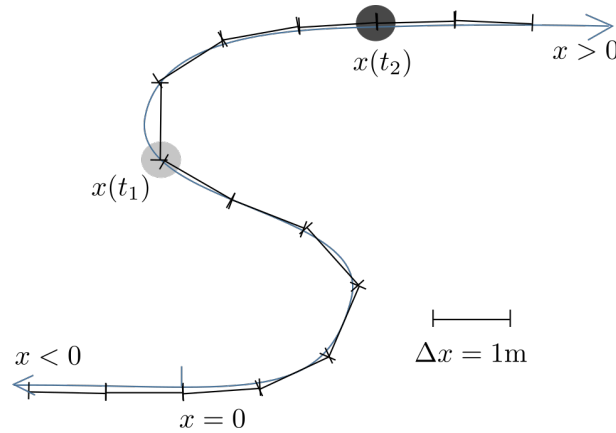
a teda odhad chyby v určení zrýchlenia nájdeme ako ich rozdiel, t.j.

$$\delta a \approx 0,05\text{m.s}^{-2} \quad (1.11)$$

a relatívna chyba určenia zrýchlenia je teda

$$\frac{\delta a}{a} \approx 0,005 = 0,5\%. \quad (1.12)$$

Úloha: Nech je nová jednotka času $\tau = 1$ “kyvadlo-sekunda” definovaná ako pol-periódka matematického kyvadla s dĺžkou $\ell = 1\text{m}$, pričom tento čas



Obr. 4: Polohu guľičky dokážeme popísať pomocou jednorozmernej súradnice x , danej krivkou, jej voľbou počiatku, orientácie a jednotky dĺžky Δx . Guľička mala v čase t_1 súradnicu $x = 6\Delta x = 6\text{m}$, v čase t_2 súradnicu $x = 10\Delta x = 10\text{m}$.

možno získať vzťahom $\tau = \pi\sqrt{\ell/g}$, kde g je gravitačné zrýchlenie. (a) Ak dĺžku ℓ dokážeme zmerať len s presnosťou $\Delta\ell = 10^{-4}\text{m}$, aká bude presnosť určenia kyvadlo-sekundy? (b) Aká by bola číselná hodnota tiažového zrýchlenia v metroch/kyvadlo-sekunda²? (c) Rozdiel medzi tiažovým zrýchlením na severnom póle a na rovníku je približne daný odstredivým zrýchlením na rovníku,

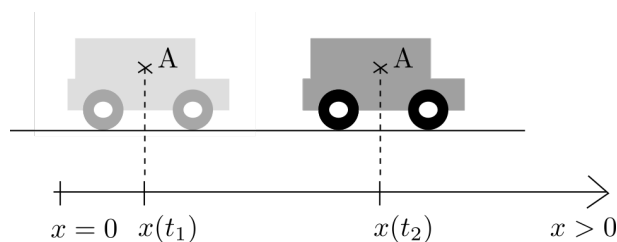
$$\Delta g \approx \omega_{\odot}^2 R_{\odot} \approx 0,03\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \quad (1.13)$$

kde ω_{\odot} je uhlová rýchlosť otáčania Zeme a R_{\odot} polomer Zeme. Akú nepresnosť merania času by nám takáto definícia “kyvadlo-sekundy” spôsobila?

1.2 Jedno-rozmerný pohyb

1.2.1 Súradnica

Základným nástrojom popisu pohybu telesa je zavedenie jeho *súradníc*. V prípade popisu v jednom rozmere stačí jedna súradnica, predstavujúca krivku s jedným vybraným bodom označeným ako počiatok, s dohodou ktoré pokračovanie krivky od tohto bodu bude v kladnom a ktoré v zápornom smere, a meraním vzdialenosti nami zvoleného bodu na telese od počiatku (Obr. 4). Túto vzdialenosť musíme pritom merať postupným prikladaním dostatočne



Obr. 5: Pre popis polohy telesa si na telese vyberieme jeden, s ním pevne spojený bod, A, a pod polohou a súradnicou telesa budeme rozumieť polohu a súradnicu tohto bodu.

krátkej jednotky vzdialenosti ku krivke, nakoľko vo všeobecnosti uvažovaná krivka nemusí byť priamkou.

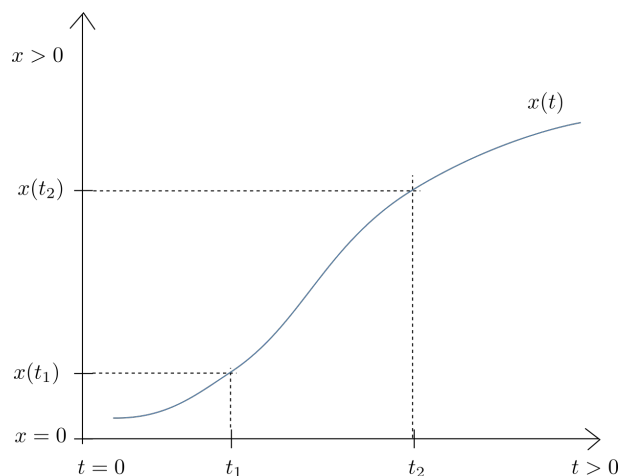
Súradnicu zvyčajne označujeme písmenom x . Najjednoduchší a najbežnejší príklad súradnice je pre popis polohy bodu na priamke. Na obr. 5 je príklad priamočiareho pohybu autíčka, ktorý možno popísať pomocou súradnice na priamke. Jeho polohu určíme polohou vybraného bodu A na aute.

Teleso popisované súradnicou má v čase t_1 súradnicu x_1 , v inom čase t_2 inú súradnicu x_2 . Túto závislosť niekedy zapisujeme pomocou vyjadrenia súradnice telesa ako funkcie času, $x(t)$. Že toto vyjadrenie je naozaj funkciou v matematickom zmysle súvisí so samotným zavedením súradnice: každému okamžiku času priradíme jednoznačne súradnicu, kde sa dané teleso nachádza. Nie je možné, aby sa teleso nachádzalo v tom istom čase na dvoch rôznych miestach

V tejto kapitole väčšinou nebudeme závislosť súradnice od času takto zapisovať a budeme jednoducho používať symbol x , pričom musíme pamätať, že jeho hodnota sa s časom môže meniť. Výnimky budú prípady, keď je užitočné zdôrazniť priradenie špeciálneho okamžiku času súradnici, napr. pri ich počiatkových hodnotách.

Príklad: Bod sa pohybuje po obode pravouhlého trojuholníka so stranami $a = 3\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$ a $c = 5\text{cm}$. Na ktorej strane sa bude nachádzať po prejdení vzdialenosti $s = 345\text{cm}$ ak začal vo vrchole pravého uhla a následne šiel po strane b ?

Riešenie: Jedno obehnutie trojuholníka predstavuje dráhu $s_1 = 3+4+5 = 12\text{cm}$. Celý trojuholník teda obehol $n = s/s_1 = 345/12 = 28,75$ krát. T.j. 28 kompletných obehov, a dráhu $0,75 \cdot s_1 = 9\text{cm}$. Z toho prvé 4cm prešiel po strane b , zvyšných 5cm po strane c a bude sa teda nachádzať presne vo vrchole medzi stranami c a a .



Obr. 6: Súradnica telesa nadobúda v rôznom čase rôzne hodnoty - predstavuje funkciu času $x(t)$. Tento vzťah sa zobrazuje v grafe, kde x -ová os predstavuje čas t a y -ová os samotnú súradnicu.

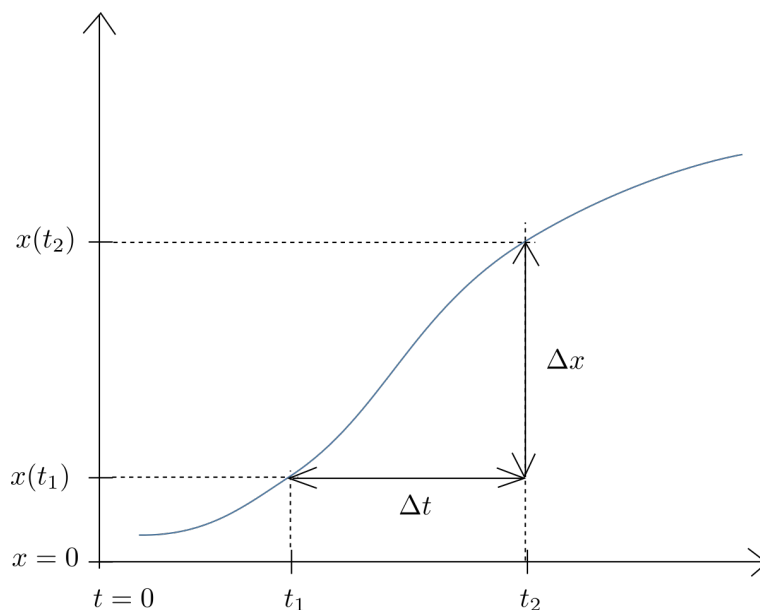
Vzdialenosť bodu od vrcholu pri pravom uhle, narastajúc smerom po strane b (orientácia) predstavuje súradnicu bodu. Ide o takzvanú *cyklíckú súradnicu*, pretože jej hodnota $x = 3 + 4 + 5 = 12\text{cm}$ zodpovedá tej istej polohe bodu ako $x = 0$.

1.2.2 Motivácia kinematických veličín

Pri pohybe telies nás zaujíma jeho opis v minulosti, a jeho predpovedanie alebo aj riadenie do budúcnosti. K tomu potrebujeme poznať súradnicu telesa ako funkciu času, prípadne vo všeobecnosti v troj-rozmernom priestore, jeho tri súradnice ako funkcie času (kapitola 1.3.1). Dôvod, prečo si zavedieme aj ďalšie veličiny, ako rýchlosť a zrýchlenie, a zaoberáme sa vzťahmi medzi nimi je to, že priamo súradnicu ako funkciu času zadať či priamo získať nevieme. V rámci dynamiky (2) uvidíme, že univerzálny popis pohybu dokážeme získať z fyzikálnych zákonov, pojednávajúcich o tom, aká sila na teleso pôsobí. Uvidíme, že zo sily nájdeme priamo zrýchlenie, a následne musíme vedieť zo zrýchlenia nájsť rýchlosť a nakoniec aj súradnicu (Obr. 7). V kinematike sa budeme zaoberať práve týmto - ako sú veličina rýchlosť a zrýchlenie zavedené a ako dokážeme z jednej spočítať druhú a naopak. Najvšeobecnejšou metodikou pre tento účel sa ukazuje diferenciálny a integrálny počet. Jeho základné myšlienky a geometricko-fyzikálny význam si preto tiež

$$\textcircled{x(t)} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} v(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} a(t) = \textcircled{F(t)}/m$$

Obr. 7: Matematické vzťahy medzi veličinami v kinematike. Súradnica je to, čo nás prakticky zaujíma pre popis pohybu, zrýchlenie je to, čo dokážeme nájsť zo známych fyzikálnych zákonov pre sily.



Obr. 8: Priemerná rýchlosť medzi časmi t_1 a t_2 je definovaná ako pomer zmeny súradnice za tento čas, Δx , a prírastku času Δt .

detailne preberieme.

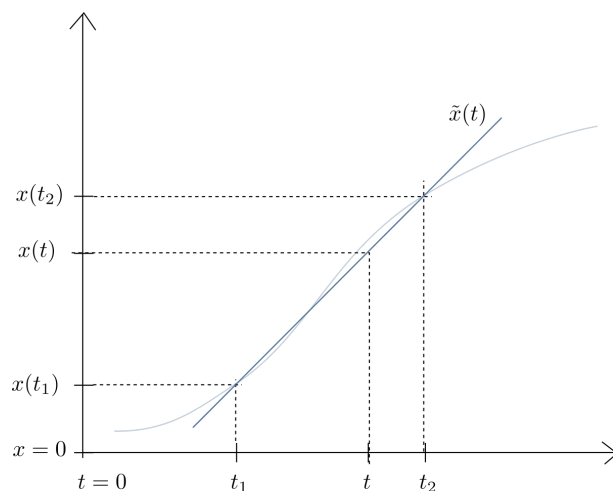
1.2.3 Priemerná rýchlosť a rovnomerný pohyb

Vo všeobecnosti, *priemernú rýchlosť* bodu so súradnicou x pre jeho pohyb medzi časmi t_1 a t_2 zavádzame ako zlomok

$$v_{2,1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (1.14)$$

pričom súradnica telesa bola v týchto časoch $x(t_1)$ a $x(t_2)$. Pre zjednodušenie zápisu sa používa symbol Δ pre označenie *prírastku* veličiny medzi dvoma hodnotami.

Hoci uvedený zápis naznačuje delenie dvoch čísiel, uvedomme si, že jednotky 1m alebo 1s vystupujúce v čitateli a menovateli nie sú čísla, ale symboly



Obr. 9: Pohyb daný funkciou $x(t)$ môžeme približne popísať funkciou $\tilde{x}(t)$, ak budeme predpokladať, že priemerná rýchlosť pohybu $x(t)$ stále viac-menej rovná priemernej rýchlosti medzi časmi t_1 a t_2 .

označujúce dohodu ako interpretovať číselnú vzdialenosť pomocou zvolenej tyče či časového intervalu pomocou časového štandardu, a preto ich deliť nemá zmysel. Zmysel zápisu v rovnici (1.14) je taký, že delíme len zodpovedajúce číselné násobky, a výslednú jednotku rýchlosti nazveme podľa toho, aké jednotky sme použili pre vzdialenosť a čas. Pomocou zátvoriek z časti 1.1.3 by sme toto mohli napísať nasledovne,

$$v = \frac{\{\Delta x\}}{\{\Delta t\}} [\Delta x] / [\Delta t], \quad (1.15)$$

V tomto výraze predstavuje prvý člen matematický zlomok, resp. delenie dvoch čísel, ale lomítko medzi jednotkami súradnice a času je len symbolická pripomienka akým spôsobom boli použité číselné hodnoty prejdenej vzdialenosti a uplynutého času. Keďže základnými jednotkami pre vzdialenosť a čas v S.I. sú meter a sekunda, z nich *odvodená jednotka* pre rýchlosť bude m/s, čo sa tiež symbolicky zvykne zapisovať ako $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Priemerná rýchlosť medzi časmi t_1 a t na obr. 9 nebude síce presne rovná $v_{1,2}$, ale z podobnosti trojuholníkov vidíme, že bude veľmi podobná. Ak tento rozdiel zanedbáme, t.j. predpokladáme že priemerná rýchlosť je *konštantná*, $v_{1,2} = v$, a túto približnú súradnicu označíme $\tilde{x}(t)$, potom z definície prie-

mernej rýchlosti použitej pre nejaký priebežný čas t nájdeme

$$v = \frac{\tilde{x}(t) - x(t_1)}{t - t_1} \quad (1.16)$$

$$v(t - t_1) = \tilde{x}(t) - x(t_1) \quad (1.17)$$

$$\tilde{x}(t) = x(t_1) + v(t - t_1) \quad (1.18)$$

Posledná rovnica predstavuje popis pohybu telesa, ktoré sa pohybuje konštantnou rýchlosťou v .

Konvenčne sa počiatočný čas označuje ako t_0 a počiatočná súradnica $x_0 = x(t_0)$. Ak okrem týchto dvoch hodnôt poznáme aj (priemernú) rýchlosť v , dokážeme vypočítať (odhadovanú) súradnicu bodu $\tilde{x}(t)$ v čase t , ktorý nás zaujíma, t.j. *predpovedať*, kde sa pohybujúci objekt bude nachádzať. Graf funkcie $\tilde{x}(t) = x_0 + v(t - t_0)$ predstavuje rovnicu priamky, prechádzajúcu bodom (t_0, x_0) a rastúcu so smernicou danou rýchlosťou v . Pokiaľ model s konštantnou priemernou rýchlosťou popisuje pohyb dostatočne presne, nemá význam rozlišovať funkciu $x(t)$ a $\tilde{x}(t)$, a teda pohyb s konštantnou priemernou rýchlosťou v môžeme popísať lineárnou funkciou času,

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0). \quad (1.19)$$

Takýto pohyb nazývame aj *rovnomerný pohyb*. Zjednodušene túto rovnicu budeme často používať v tvare pre prírastok súradnice,

$$\Delta x = v\Delta t, \quad \Delta x = x(t) - x_0, \quad \Delta t = t - t_0. \quad (1.20)$$

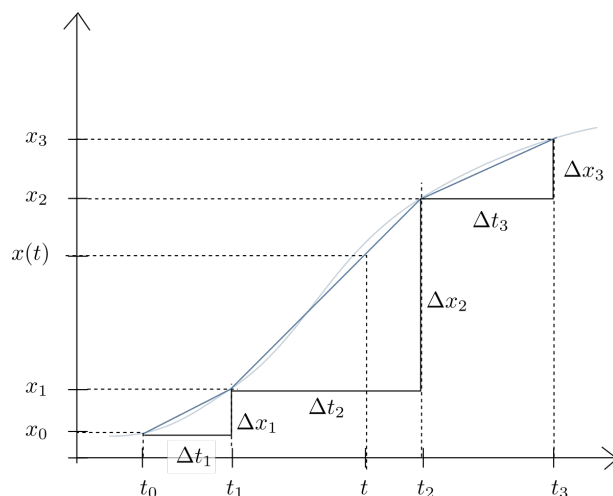
1.2.4 Po častiach rovnomerný pohyb

Rýchlosť telies pri pohybe nebýva zvyčajne konštantná, ale priebežne sa mení. Jednoduchý model, ktorý dokáže takýto pohyb uspokojujúco popísať je *po častiach rovnomerný pohyb*, pri ktorom v rôznych intervaloch času je rýchlosť konštantná a mení sa skokom len v hraničných časoch týchto intervalov (Obr. 10).

Vo všeobecnosti zapíšeme po častiach rovnomerný pohyb nasledovne:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + v_1(t - t_0) & t_1 > t > t_0 \\ x_0 + v_1(t_1 - t_0) + v_2(t - t_1) & t_2 > t > t_1 \\ x_0 + v_1(t_1 - t_0) + v_2(t_2 - t_1) + v_3(t - t_2) & t_3 > t > t_2 \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (1.21)$$

Tento zápis predstavuje už získaný výsledok pre rovnomerný pohyb (1.20), no použitý pre viacero intervalov časov s rôznou rýchlosťou.



Obr. 10: Prakticky ľubovoľný pohyb môžeme dobre popísať pomocou po častiach rovnomerného pohybu, pri ktorom rýchlosť je konštantná v diskretných intervaloch času, no od intervalu k intervalu sa skokom zmení. Napr. v intervale $t \in (t_0, t_1)$ je rýchlosť $v_1 = \Delta x_1 / \Delta t_1$, v intervale $t \in (t_1, t_2)$ je $v_2 = \Delta x_2 / \Delta t_2$ a podobne.

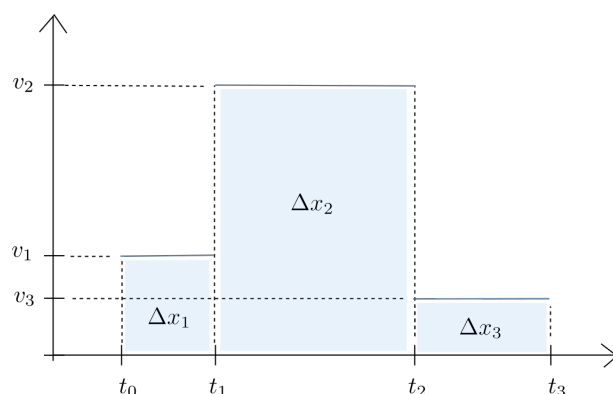
Napríklad v čase $t : t_3 > t > t_2$ nájdeme súradnicu bodu tak, že k počiatkovej súradnici x_0 pridáme jej zmenu za čas od počiatkového času po t_1 , $\Delta x_1 = v_1(t_1 - t_0)$, keď sa pohyboval bod s rýchlosťou v_1 , ďalej zmenu $\Delta x_2 = v_2(t_2 - t_1)$, nadobudnutý v čase od t_1 po t_2 , keď sa bod pohyboval s rýchlosťou v_2 , a nakoniec prírastok súradnice v dôsledku pohybu s rýchlosťou v_3 , $\Delta x_3 = v_3(t - t_2)$. Celková zmena súradnice od času t_0 po čas t teda bude

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \quad (1.22)$$

$$= v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + v_3(t - t_2). \quad (1.23)$$

Z posledného vzťahu získame užitočnú geometrickú interpretáciu výpočtu zmeny súradnice: ak si zobrazíme rýchlosť telesa ako funkciu času, $v(t)$, do grafu, obr. 11, potom celková zmena súradnice telesa je daná celkovou "plochou" medzi grafom $v(t)$ a časovou osou. Slovo "plocha" je v úvodzovkách, lebo je to súčet plochy obdĺžnikov, ktorých základňa má rozmer času (Δt_i), výška je rýchlosť (v_i) a ich súčin, teda "plocha", má následne rozmer vzdialenosti ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{s} = \text{m}$), tak ako to pre zmenu súradnice aj má byť.

Príklad: Električke č.9 to trvá zo zastávky Park kultúry na zastávku Kapucínska 4 minúty a z Kapucínskej na Kamenné námestie 3 minúty. Vzdialenosť



Obr. 11: Z grafu rýchlosti ako funkcie času dokážeme ľahko nájsť dĺžke prírastky súradnice ako plochy dané aktuálnou rýchlosťou a dĺžkou časových intervalov.

medzi zastávkou Park kultúry a Kapucínskou je 1570m a medzi Kapucínskou a Kamenným námestím 610m. Nájdite hodnoty priemernej rýchlosti medzi zastávkami, a hodnotu celkovej priemernej rýchlosti električky na trase z Parku kultúry na Kamenné námestie. Ak by sme modelovali pohyb električky pomocou celkovej priemernej rýchlosti, o koľko skôr alebo neskôr by sme očakávali príchod električky na zastávku Kapucínska zo zastávky Park kultúry?

Riešenie: Pre jednoduchosť si očísľujeme následné zastávky ako 1(Park kultúry), 2(Kapucínska), a 3(Kamenné námestie). Priemerné rýchlosti medzi týmito zastávkami budú

$$v_{2,1} = \frac{1570}{4.60} \text{m.s}^{-1} = 6,54 \text{m.s}^{-1} \quad (1.24)$$

$$v_{3,2} = \frac{610}{3.60} \text{m.s}^{-1} = 3,39 \text{m.s}^{-1} \quad (1.25)$$

$$v_{3,1} = \frac{1570 + 610}{(3 + 4).60} \text{m.s}^{-1} = 5,19 \text{m.s}^{-1} \quad (1.26)$$

Ak by sme použili celkovú priemernú rýchlosť $v_{3,1}$ na výpočet času príchodu električky zo zastávky 1 na 2, tak dostaneme

$$\Delta \tilde{t}_{2,1} = s_{2,1}/v_{3,1} = \frac{1570}{5,19} = 303 \text{s} = 5,04 \text{min} \quad (1.27)$$

Náš odhad pomocou priemernej rýchlosti teda dáva čas príchodu o 5,04-4 = 1 min neskôr. Nahradzať popis električky jedinou konštantnou rýchlosťou danou jej priemernou rýchlosťou sa nám teda nemusí oplatíť.

1.2.5 Okamžitá rýchlosť, derivácia a integrál

Pomocou po častiach rovnomerného pohybu možno popísať ľubovoľný pohyb, pokiaľ si ho rozdelíme na dostatočne krátke okamžiky času tak, že sme s presnosťou jeho popisu pre skutočný pohyb spokojní. Je možné, že rozdelenie napr. 10 minút na 500 intervalov by bolo postačujúce, no celkom isto by bolo aj dosť nepraktické. Je to možno prekvapujúce, no ak sa rozhodneme ho rozdeliť na ľubovoľne malé intervaly, ktorých bude teda neobmedzene veľa, prideme k matematickému nástroju, ktorý praktický je. Používanie konceptu ľubovoľne malých intervalov nazývame v matematike *infinitesimálny počet*. Jeho hlavným nástrojom je *derivácia* a k nej pridruženým nástrojom *integrál*. Technickému používaniu týchto operácií sa budete venovať v rámci predmetu Matematika, tu si tieto dve operácie, tak ako sú využívané v kinematike, zavedieme na fyzikálno-geometrickom základe. Ďalšie dôležité použitie derivácií je napríklad v chemickej kinetike kde namiesto súradníc bodov meniacich sa v čase pracujeme s okamžitými koncentraciami látok v chemických reakciách.

Okamžitú rýchlosť v čase t definujeme podobne ako priemernú rýchlosť počas intervalu (t, t') , no uvažovaný časový interval je limitne krátky,

$$v(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{x' - x}{t' - t} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \quad (1.28)$$

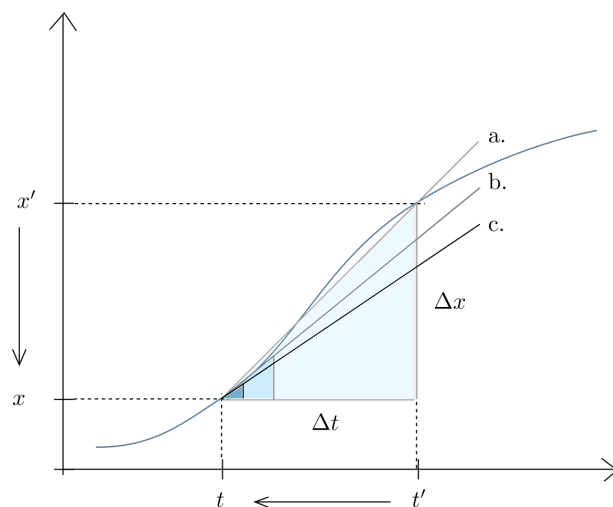
Symbol limity, \lim , indikuje, že uvedený výraz uvažujeme pre časy t' blížiac sa ľubovoľne blízko k t . Zlomok v tvare $d./dt$ predstavuje stručný zápis celej tejto limity, ktorú voláme *derivácia podľa času*. Tento zápis má pripomínať podiel prírastku súradnice a času. Geometrický význam derivácie vidno v grafe závislosti súradnice od času, $x(t)$, kde derivácia predstavuje smernicu dotyčnice k grafu v čase t , na obrázku 12.

Príklad: V prípade rovnomerného pohybu dá vzťah pre okamžitú rýchlosť konštantnú rýchlosť pohybu,

$$v(t) = \frac{d}{dt} [x_0 + v(t - t_0)] \quad (1.29)$$

$$= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{x_0 + v(t - t_0) - [x_0 + v(t' - t_0)]}{t - t'}, \quad (1.30)$$

$$= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{vt - vt'}{t - t'} = v. \quad (1.31)$$

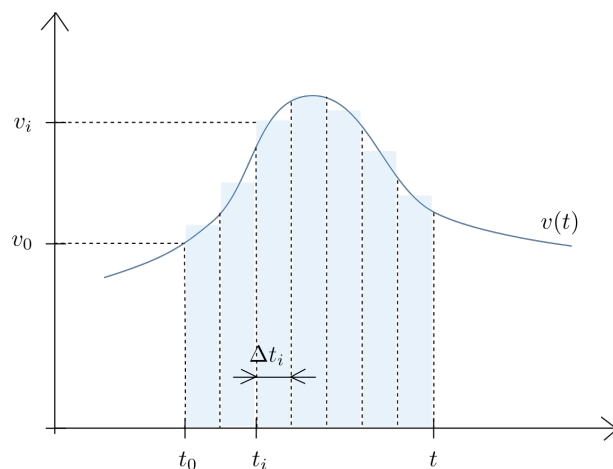


Obr. 12: Rýchlosť, t.j. derivácia súradnice v čase t udáva smernicu dotýčnice ku funkcii $x(t)$ v tomto čase, čo možno vidieť postupným menšovaním prírastov času Δt a súradnice Δx , v zmysle limity $t' \rightarrow t$, ktorým postupne zodpovedá priamka a., b. a c.

V prípade po častiach rovnomerného pohybu bude výsledok dávať jednotlivé konštantné rýchlosti v zodpovedajúcich intervaloch. Pretože typicky pracujeme s okamžitou rýchlosťou danou definíciou (1.28), slovíčko okamžitá vynechávame, a hovoríme len o rýchlosti, ktorá je definovaná deriváciou súradnice podľa času. V nasledovných kapitolách budeme vidieť, že ide o naozaj základnú a veľmi potrebnú definíciu.

Koncept *integrálu* vychádza z nasledovnej otázky: ak poznáme okamžitú rýchlosť telesa v každom v časových okamihov z intervalu (t_0, t) , pričom predpokladáme, že táto rýchlosť sa mohla počas uvažovaného intervalu meniť, ako sa za tento čas zmení súradnica telesa?

Ak uvažovaný interval nadelíme na dostatočne veľa krátkych intervalov - N , a chyba ktorú urobíme tým, že na takýchto krátkych intervaloch budeme považovať rýchlosť za nemennú, bude malá, bude celková zmena súradnice daná podobne ako vo vzťahu (1.22), použitím priemernej rýchlosti v_i na ča-



Obr. 13: Zmenu súradnice možno získať ako integrál z grafu rýchlosti, t.j. z veľkosti plochy medzi grafom $v(t)$ a časovou osou. Túto plochu možno približne získať rozdelením všeobecného pohybu na pohyb s po-častiach konštantnou rýchlosťou a následne plochu získať ako súčet plôch jednotlivých obdĺžnikov.

sovom intervale i ,

$$x - x_0 = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_N \quad (1.32)$$

$$= v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \dots + v_N \Delta t_N \quad (1.33)$$

$$= \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i \quad (1.34)$$

Infinitezimálny počet nám umožňuje vyčísliť tento súčet pre limitne veľké počty sčítancov s veľmi malými intervalmi,

$$x - x_0 = \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i = \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad (1.35)$$

Posledný zápis so symbolom integrálu $\int_{t_0}^t \dots dt'$ je symbolický zápis limity a sumy v predchádzajúcom kroku. Prvý znak pripomína latinské veľké písmeno 'S', spodný a horný index hranice času medzi ktorými spočítavame a posledný symbol dt' pripomína limitne krátke časové intervaly Δt_i . Geometrický význam integrálu je "plocha" medzi grafom funkcie $v(t)$ a časovou (horizontálnou) osou, ohraničená počiatočným a konečným časom (Obr. 13), v súlade s našim pozorovaním v predchádzajúcej podkapitole, kde sme súčtu

aktuálnej rýchlosti a jej patriaceho časového intervalu, $v_i \Delta t_i$ našli práve takýto význam.

Integrál je v istom zmysle operácia opačná k derivácii. Toto možno ilustrovať nasledovnými rovnosťami, prakticky využívanými pri výpočte integrálov,

$$\int_{t_0}^t \frac{dx(t')}{dt'} dt' = x(t) - x(t_0) \quad (1.36)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t v(t') dt' = v(t), \quad (1.37)$$

pričom prvá tvrdí, že integrál z derivácie súradnice je samotná súradnica mínus súradnica v čase zodpovedajúcej dolnej hranici integrovania (t_i), a druhá tvrdí že derivácia z integrálu podľa hornej hranice integrovania (t) je samotná funkcia pod integrálom.

Zmena súradnice telesa nie je to isté ako prejdená *dráha*, ktorú tu budeme označovať ako s . Ak chceme spočítať celkovú prejdenú dráhu, musíme vždy pripočítať prírastok malej zmeny súradnice v absolútnej hodnote, lebo aj záporná zmena súradnice predstavuje kladný prírastok celkovej dráhy,

$$s = \sum_{i=1}^N |v(t_i) \Delta t_i| = \int_{t_0}^t |v(t')| dt'. \quad (1.38)$$

Príklad: Prejdená dráha môže byť diametrálne odlišná od zmeny súradnice. Napríklad, ak teleso ide prv 10m dopredu a následne 10m späť, celková zmena jeho súradnice po tomto pohybe bude

$$\Delta x = 10\text{m} + (-10)\text{m} = 0\text{m},$$

kým celková prejdená dráha bude

$$s = |10|\text{m} + |-10|\text{m} = 20\text{m}.$$

Súradnica a prejdená dráha sú teda značne odlišné charakteristiky pohybu a na tento rozdiel musíme dávať pozor.

1.2.6 Zrýchlený pohyb

Modelovanie pohybu pomocou po-častiach rovnomerného pohybu má ten nedostatok, že zmena rýchlosti prebieha skokovo. *Rovnomerne zrýchlený pohyb* tento nedostatok odbúrava.

Nech sa rýchlosť medzi časmi t a t' mení spojitě z hodnoty v na v' , potom *priemerné zrýchlenie bodu* za tento časový interval nazývame veličinu

$$a = \frac{v' - v}{t' - t}. \quad (1.39)$$

Diskusia zmyslu delenia fyzikálnych veličín a s tým súvisiace zavedenie novej fyzikálnej jednotky pre zrýchlenie, $[a] = \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, je analogická situácii pri zavedení priemernej rýchlosti.

Ak je priemerné zrýchlenie medzi ľubovoľnými časovými okamihmi medzi časmi t_0 a t konštantné potom takýto pohyb nazývame rovnomerne zrýchleným a rýchlosť sa mení lineárne s časom. Zmenu rýchlosti možno potom z rovnice (1.39) vyjadriť nasledovne,

$$v = v_0 + a(t - t_0), \quad (1.40)$$

pričom sme použili označenie $v_0 = v(t_0)$ pre počiatočnú rýchlosť v počiatočnom čase t_0 . Iný zápis toho istého, pomocou zmien rýchlosti a prírastkov času, je $\Delta v = a\Delta t$.

Následné zovšeobecnenie pre nerovnomerné zrýchlenie je podobné ako bolo pre meniacu sa rýchlosť v časti 1.2.5) a preto ho prejdeme už rýchlejšie.⁶

Pre vyjadrenie zmeny rýchlosti pri *po častiach rovnomerne zrýchlenom pohybe*, t.j. pohybe, ktorý v rôznych intervaloch času ($\Delta t_i, i = 1, \dots, N$) vykazoval rôzne hodnoty zrýchlenia (a_i), nájdeme poskladaním jednotlivých intervalov celkovú zmenu rýchlosti

$$\Delta v = a_1\Delta t_1 + a_2\Delta t_2 + \dots + a_N\Delta t_N, \quad (1.41)$$

podobne ako to bolo pri celkovej zmene súradnice pri po častiach rovnomernom pohybe v rovnici 1.34.

Vo všeobecnom prípade, keď sa zrýchlenie mení plynulo v čase, definujeme *okamžité zrýchlenie* pomocou okamžitej zmeny rýchlosti za čas, t.j. deriváciou,

$$a(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{v' - v}{t' - t} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (1.42)$$

Naopak, ak poznáme zrýchlenie ako sa mení v čase, t.j. funkciu $a(t)$, vieme nájsť rýchlosť pomocou integrálu, čo zodpovedá súčtu v rovnici (1.41),

$$v - v_0 = \int_{t_0}^t a(t') dt', \quad (1.43)$$

⁶Nemá význam to rozpisovať lebo text by bol naozaj podobný, ale študent, ktorému záleží na porozumení by vôbec nemal ísť cez nasledovné zovšeobecnenie rýchlo, ale intenzívne listovať hore-dole a poriadne si premyslieť v čom spočíva podobnosť, a v čom sa tieto dve veci líšia.

$$\textcircled{x(t)} \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \\ \xleftarrow{\int dt} \end{array} v(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \\ \xleftarrow{\int dt} \end{array} a(t) = \textcircled{F(t)}/m$$

Obr. 14: Matematické vzťahy medzi veličinami v kinematike. Súradnica je to, čo nás prakticky zaujíma pre popis pohybu, zrýchlenie je to, čo dokážeme nájsť zo známych fyzikálnych zákonov pre sily, pričom prepočet medzi nimi realizujeme pomocou derivácii a integrovania podľa času.

kde prechod od súčtu elementárnych zmien k integrálu je analogický ako v prípade získania zmeny súradnice zo známej rýchlosti: súčet v (1.34) vedie v limite k integrálu v (1.35). Pripomeňme znovu aj geometrický význam integrálu - zmena rýchlosti za daný interval času je rovná "ploche" medzi funkciou $a(t)$ a časovou horizontálnou osou.

Príklad: V prípade aerodynamického odporu je spomalenie (záporné zrýchlenie) zotrvačnosťou idúceho telesa úmerné druhej mocnine rýchlosti,

$$a(t) = -bv^2(t), \quad (1.44)$$

čo má pôvod v sile aerodynamického odporu $F_d = (1/2)\rho S c_d v^2$, kde ρ je hustota vzduchu, S čelná plocha telesa, a c_d koeficient aerodynamického odporu⁷. Presvedčte sa, že časová závislosť rýchlosti v tvare

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 b t} \quad (1.45)$$

tomuto vyhovuje, odvodením jej derivácie podľa definície (1.42).

Riešenie:

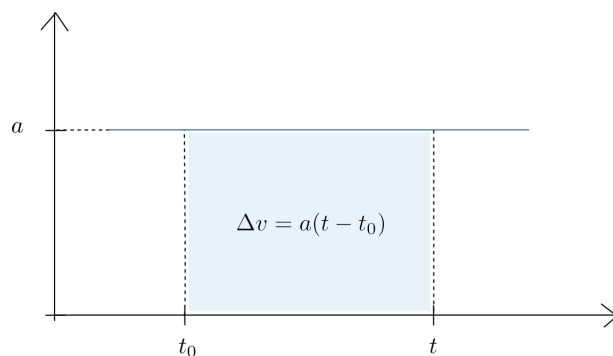
$$v(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\frac{v_0}{1+v_0 b t'} - \frac{v_0}{1+v_0 b t}}{t' - t} \quad (1.46)$$

$$= \lim_{t' \rightarrow t} v_0 \frac{1+v_0 b t - 1 - v_0 b t'}{(1+v_0 b t')(1+v_0 b t)} \quad (1.47)$$

$$= \lim_{t' \rightarrow t} v_0 \frac{v_0 b (t - t')}{(1 + v_0 b t')(1 + v_0 b t)(t' - t)} \quad (1.48)$$

$$= -\frac{v_0^2 b}{(1 + v_0 b t)^2} = -bv(t)^2 \quad (1.49)$$

⁷K tejto sile sa vrátíme v kapitole 2.3.4



Obr. 15: Zmenu rýchlosti v priebehu časového intervalu (t_0, t) získame integrálom, t.j. ako plochu pod grafom zrýchlenia medzi týmito časmi. V prípade rovnomerne zrýchleného pohybu je zrýchlenie konštantné a plocha je plochou obdĺžnika.

1.2.7 Zmena súradnice pri zrýchlenom pohybe

Ako vieme z predchádzajúcej podkapitoly, zo známeho zrýchlenia dokážeme nájsť rýchlosť v ľubovoľnom čase t pomocou integrálu,

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a(t') dt', \quad (1.50)$$

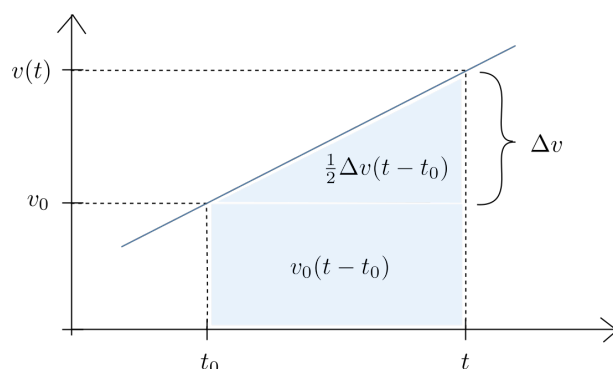
kde sme integračnú premennú označili s čiarkou, aby sme ju odlíšili od času, v ktorom vyjadrujeme rýchlosť na ľavej strane.

V prípade rovnomerne zrýchleného pohybu, $a(t') = a$, konštanta, to vieme integrovať aj pomocou nášho grafického porozumenia, t.j. že výsledkom integrálu je plocha pod grafom - plocha obdĺžnika so stranami a a $t - t_0$,

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a(t') dt' = v_0 + a(t - t_0), \quad (1.51)$$

v súhlase s výsledkom (1.40) získaného iným spôsobom. Grafický zmysel tohto výpočtu je ukázaný na Obr. 15

Na základe pod-časti (1.2.5) už ľahko nájdeme príslušnú zmenu súradnice v čase od t_0 po t ; je daná integrálom z $v(t)$, t.j. plochou pod grafom rýchlosti



Obr. 16: Zmenu súradnice v priebehu časového intervalu (t_0, t) získame integrárom, t.j. ako plochu pod grafom rýchlosti medzi týmito časmi. V prípade rovnomerne zrýchleného pohybu je rýchlosť lineárne narastajúca s časom a preto plocha je daná súčtom plochy obdĺžnika a trojuholníka.

(viď Obr. 16)

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t v(t') dt' = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \Delta v (t - t_0), \quad (1.52)$$

$$= \int_{t_0}^t v(t') dt' = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2, \quad (1.53)$$

kde sme použili výsledok z (1.51) pre zmenu rýchlosti počas uvažovaného časového intervalu, $\Delta v = a(t - t_0)$.

Vzťahy (1.51) a (1.53) sú špeciálne výsledky používania nástrojov popisu kinematiky - súradnice, rýchlosti a zrýchlenia a práce s nimi pomocou derivácie a integrálu. Aj keď ich momentálne počítame len pomocou ich geometrického zmyslu či len pre veľmi jednoduché prípady, po získaní technickej zručnosti v derivovaní a integrovaní v rámci matematiky, budú tieto nástroje používané pre popis aj komplikovanejších pohybov, napríklad nerovnomerného rozbehu či harmonických netlmených i tlmených kmitov. Okrem toho, oba tieto nástroje sú rovnako užitočné aj v iných oblastiach techniky - termodynamike, chemickej kinetike, elektrine a magnetizme, a mnohých ďalších, a s ich používaním aj v týchto súvislostiach sa v rámci štúdia oboznámite.

Príklad: Po priamej ceste ide cyklista A s konštantnou rýchlosťou $v_A = 30\text{km/hod}$. Druhý cyklista B, ktorý sa na počiatku nehýbe a vidí cyklistu A ako sa k nemu blíži, chce ísť popri ňom. Ak sa cyklista B dokáže rozbehnúť s konštantným zrýchlením $a_B = 1,6\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, pri akej vzdialenosti od cyklistu A

sa musí začať rozbiehať? Akú vzdialenosť cyklista B prejde kým sa k nemu cyklista A pripojí?

Riešenie: Budeme riešiť príklad symbolicky pomocou premenných a až nakoniec dosadíme zadané čísla. Čas, keď sa obaja cyklisti stretnú si označíme ako t_s . Za tento čas musí cyklista B nadobudnúť rýchlosť cyklistu A, t.j.

$$v_A = a_B \cdot t_s \rightarrow t_s = \frac{v_A}{a_B} \quad (1.54)$$

Cyklista B, pohybujúci sa počas tohto času rovnomerne zrýchlene prejde dráhu

$$s_B = \frac{1}{2} a_B t_s^2 = \frac{v_A^2}{2a_B} \quad (1.55)$$

Cyklista A za ten istý čas prejde dráhu

$$s_A = v_A t_s = \frac{v_A^2}{a_B} \quad (1.56)$$

Keďže po prejdení týchto dráh sa majú cyklisti stretnúť, t.j. budú mať rovnakú súradnicu, musel sa cyklista B vyraziť v momente keď bol cyklista A od neho vzdialený

$$s_A - s_B = \frac{v_A^2}{2a_B}. \quad (1.57)$$

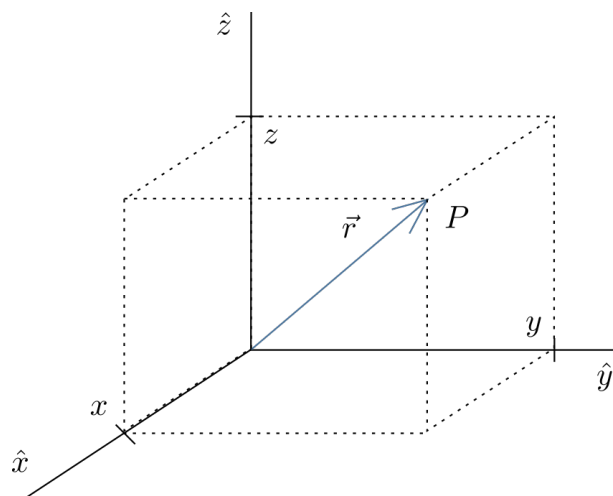
Po dosadení čísiel dostaneme nasledovné odpovede: Cyklista A sa musí začať rozbiehať keď je cyklista B od neho

$$s_A - s_B = \frac{v_A^2}{2a_B} = \frac{(30/3,6)^2}{1,6} = 43,4\text{m}. \quad (1.58)$$

Následne prejde takúto istú vzdialenosť kým sa ho cyklista A dobehne.

Pre zaujímavosť môžeme spočítať aj čas, za aký sa stretnú, t_s , napríklad z dráhy cyklistu A:

$$t_s = \frac{s_A}{v_A} = \frac{2.43,4}{30/3,6} = 10,4\text{s}. \quad (1.59)$$



Obr. 17: Polohový vektor \vec{r} bodu P má tri kartézské súradnice - x , y a z . Tieto predstavujú vzdialenosti troch rôznych rovín, v ktorých leží bod P , a zároveň sú kolmé na os \hat{x} , \hat{y} alebo \hat{z} .

1.3 Pohyb v priestore

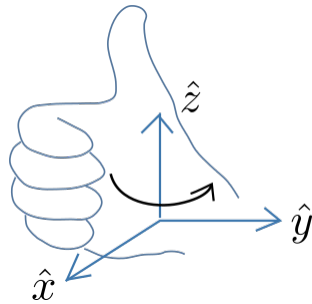
1.3.1 Polohový vektor

Ak chceme komunikovať druhému človeku informáciu, kde sa nachádza nami pozorovaný objekt v priestore, nebude postačovať oznámiť jednu súradnicu, ale potrebujeme tri. Fakt, že musia byť tri súvisí s troj-rozmernosťou nášho priestoru. Už pri jednorozmernom pohybe sme videli, že súradnicou môže byť rôzna krivka, a preto aj v trojrozmernom pohybe je potrebné špecifikovať o aké súradnice ide.

Najjednoduchšie súradnice sú *kartézské súradnice*, pomocou ktorých je poloha bodu v priestore určená troma súradnicami x, y a z (Obr. 17). Tieto predstavujú vzdialenosti na troch kolmých priamkach, ktoré sa pretínajú v zvolenom počiatku, a ktoré voláme osi alebo priamky \hat{x}, \hat{y} a \hat{z} . Vzdialenosti bodov na osiach smerom od počiatku narastajú v dvoch smeroch (doprava a doľava): jeden smer sa označuje kladnou vzdialenosťou a druhý zápornou.

Najčastejšou voľbou usporiadania kladných smerov osí je *pravotočivá sústava* keď orientácia kladných smerov osí \hat{x}, \hat{y} a \hat{z} je daná pravou rukou podľa obr. 18. S rovnakou "pravotočivosťou" sa stretávame aj pri smere zasúvania sa pravotočivého závitú pri jeho zakrúcaní.

Poloha bodu P v priestore pomocou týchto súradníc je určená nasledovne: uvažujme najprv rovinu bodov v ktorej ležia priamky \hat{y} a \hat{z} . Túto rovinu môžeme posúvať v kladnom alebo zápornom smere osi \hat{x} , pričom len



Obr. 18: Pravidlo pravej ruky pomáha pri určovaní vzájomnej orientácie jednotkových vektorov: ak prstami pravej ruky zatáčame os \hat{x} do osi \hat{y} , tak palec ukazuje kladný smer osi \hat{z} .

pri jednom jednoznačnom posunutí o vzdialenosť $|x|$ bude aj nami určený bod ležať v tejto rovine. Túto vzdialenosť, spolu so znamienkom charakterizujúcim kladný alebo záporný smer, nazývame x -ovou súradnicou bodu P vzhľadom na zvolený súradnicový systém.

Podobne, posúvaním rovín $\hat{z} - \hat{x}$ a $\hat{x} - \hat{y}$ identifikujeme zmysel y -ovej a z -ovej súradnice.

Systémy iných plôch ako sú roviny budú vytvárať iné druhy súradníc, napríklad sférické alebo cylindrické súradnice, no nimi sa teraz zaoberať nebudeme.

Popísaný systém kartézskych súradníc nám poslúži na vybudovanie pojmu polohového vektora, a zovšeobecnením tohto konceptu aj vektora iných fyzikálnych veličín. Ukazuje sa, že hoci súradnice ľubovoľného bodu sú tri nezávislé čísla, mnohé operácie, ktoré s nimi robíme, majú veľa spoločného. Preto túto trojicu označujeme spoločným symbolom so šípkou,

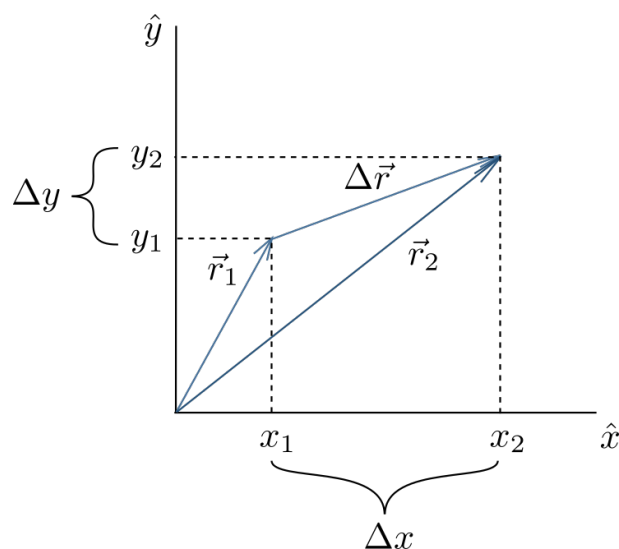
$$\vec{r} = (x, y, z), \quad [x] = \text{m}, \quad [y] = \text{m}, \quad [z] = \text{m}, \quad (1.60)$$

a nazývať ju budeme *polohový vektor*. V náčrtoch polohový vektor \vec{r} zobrazujeme ako šíпку začínajúcu v počiatku súradníc a končiacu v mieste kde má bod P svoju polohu.

V literatúre sa často používa pre označovanie vektorov miesto šíčky hrubé písmo, t.j. namiesto \vec{r} je písané \mathbf{r} . Tu bude používané značenie pomocou šíčky.

1.3.2 Spočítavanie vektorov a násobenie číslom

Nech \vec{r}_1 a \vec{r}_2 predstavujú polohové vektory pohybujúceho sa bodu v dvoch rôznych časoch (Např. $t_2 > t_1$, kde t_1 je čas nachádzania sa bodu v mieste \vec{r}_1 v rovine, daným súradnicami (x_1, y_1) , a podobne \vec{r}_2 pre t_2 .), potom súradnice



Obr. 19: Od polohového vektora \vec{r}_1 sa možno dostať k polohovému vektoru \vec{r}_2 pomocou vektora posunutia $\Delta\vec{r}$, motivujúceho operáciu spočítavania vektorov.

vektora \vec{r}_2 môžeme získať pridaním prírastkov v súradniciach $\Delta x = x_2 - x_1$ a $\Delta y = y_2 - y_1$ (Obr. 19)

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1), \quad (1.61)$$

$$\vec{r}_2 = (x_2, y_2) = (x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}, \quad (1.62)$$

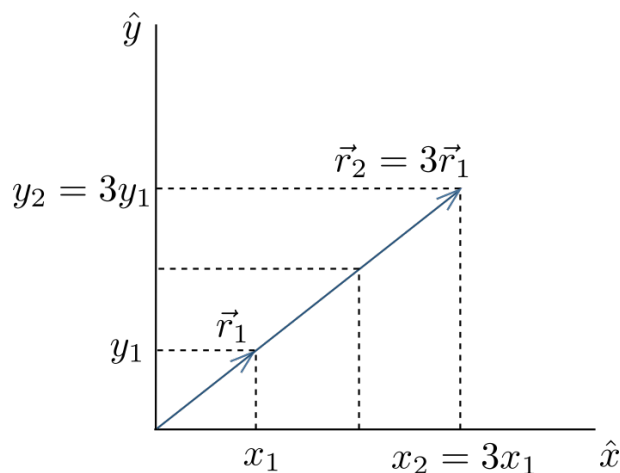
kde vektor $\Delta\vec{r}$ predstavuje vektor, paralelne prenesený do koncového bodu vektora \vec{r}_1 . Algebraické spočítavanie “po zložkách” vektorov \vec{r}_1 a $\Delta\vec{r}$ teda geometricky zodpovedá “spočítavaniu šípok”, t.j. paralelný prenos $\Delta\vec{r}$ do koncového bodu \vec{r}_1 a následné spojenie počiatku vektora \vec{r}_1 s koncovým bodom preneseného $\Delta\vec{r}$.

Na základe tejto motivácie definujeme operáciu spočítavania vektorov $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, ktorú algebraicky definujeme ako spočítavanie “po zložkách”,

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \quad (1.63)$$

pričom jej geometrický význam je vyššie popísané “spočítavanie šípok” s paralelným prenosom jedného zo sčítancov.

Kým polohové vektory predstavujú body ktoré majú úzky vzťah reálnemu 3D priestoru a je dôležité že ich zakresľujeme k počiatku súradnicovej sústavy, zapísaný vektor $\Delta\vec{r}$ zakresľujeme mimo tento počiatok a ako objekty



Obr. 20: Pod násobením vektora s číslom rozumieme násobenie jeho zložiek, a geometricky predĺženie v jeho smere.

nepredstavuje bod v našom priestore. V tomto zmysle chápeme vektory ako veličiny ktoré majú veľkosť a smer, kým pojem bod (alebo polohový vektor) chápeme ako veličinu viazanú na konkrétny počiatok súradnicovej sústavy. Jednotlivé “súradnice” sa vo všeobecnom vektore nazývajú *zložkami vektora*. V ďalšom nebudeme príliš dbať na tento jemný rozdiel, nakoľko fakt či ide o bod alebo abstraktný vektor je jasný z súvislostí v ktorých daná veličina vystupuje.

Operáciu násobenia vektora číslom (alebo skalárnou fyzikálnou veličinou) definujeme nasledovne

$$a\vec{r}_1 = a(x_1, y_1, z_1) = (ax_1, ay_1, az_1), \quad (1.64)$$

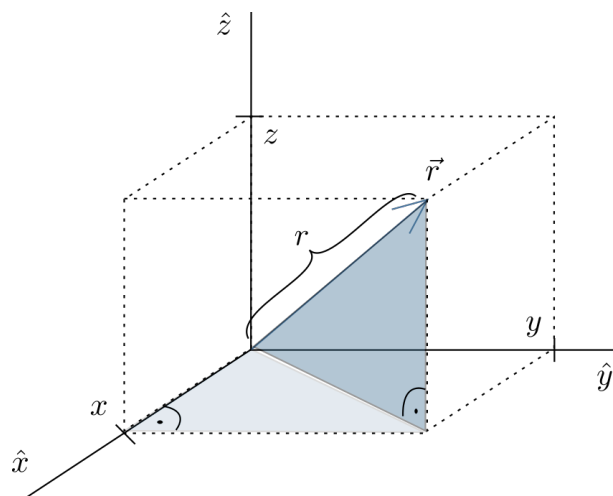
kde a je ľubovoľné reálne číslo, a teda geometricky má násobenie vektora číslom zmysel “naťahovania” násobeného vektora v jeho smere.

Spočítavanie vektorov a ich násobenie číslom nazývame *lineárne operácie* a vďaka nim vektory tvoria *lineárny vektorový priestor*.

1.3.3 Veľkosť vektora

V priestore v ktorom žijeme sa ukazuje byť platnou tzv. Euklidova veľkosť vektora, ktorá je pre vektor $\vec{r} = (x, y, z)$, kde x, y, z sú jeho kartézské súradnice, definovaná vzťahom

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.65)$$



Obr. 21: Veľkosť vektora predstavuje jeho dĺžku pozdĺž jeho smerovania. Zo zložiek ju možno získať ak dva krát použijeme Pytagorovu vetu, raz na trojuholník v rovine $x - y$, $c^2 = x^2 + y^2$, druhý krát na trojuholník c, z, r , $r^2 = c^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Overiť to môžeme experimentálne pre pravouhlý trojuholník v rovine ($z = 0$): narysujeme si pravouhlý trojuholník a budeme prikladať naše meradlo dĺžky postupne k jeho stranám, a na naše prekvapenie, kvadrát prepony bude rovný súčtu kvadrátov odvesien. Ak by sme podobný experiment realizovali na guľovej ploche, výsledok by nám nevyšiel, preto je dôležité zdôrazniť, že takto zavádzame veľkosť vektora v Euklidovom priestore, čo považujeme za dostatočne dobrý matematický model priestoru v ktorom sa nachádzame.

Napriek tomu, vyššie uvedený experimentálny fakt sa tiež nazýva aj Pytagorova veta, a dá sa odvodiť z niekoľkých predpokladov o priestore. To, že sú tieto postuláty platné pre náš fyzický priestor indikuje práve to, že experimentálne nám meranie na pravouhlom trojuholíku dá súhlas s Pytagorovou vetou.

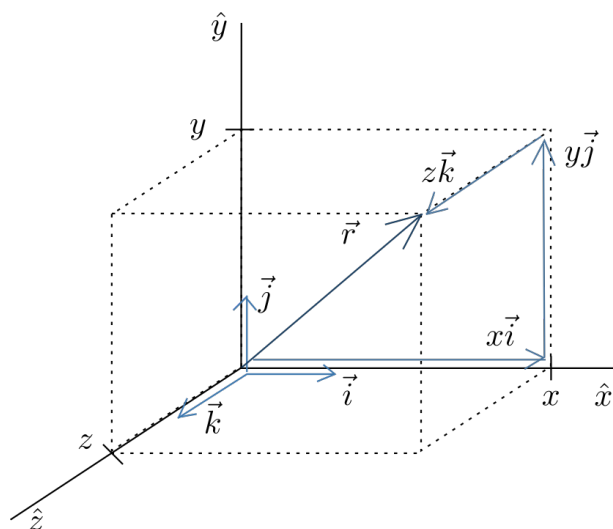
1.3.4 Jednotkové vektory

Na základe vyššie zavedeného spočítavania a násobenia vektora číslom (skalárnou veličinou) môžeme písať nasledovne (Obr. 22):

$$\vec{r} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \quad (1.66)$$

$$= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \quad (1.67)$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.68)$$



Obr. 22: Rozklad polohového vektora do zložiek možno elegantne zapísať pomocou jednotkových vektorov, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

kde sme si zaviedli označenie pre *jednotkové vektory* $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$. Evidentne, ich veľkosť je 1 (bezrozmerná), pričom nositeľom fyzikálneho rozmeru ostávajú súradnice.

Podobne ako pri kartézskych súradniciach, aj o jednotkových vektoroch $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ hovoríme že tvoria pravotočivý systém troch vektorov (Obr. 23), pričom tento súhlasí už z vyššie zavedeným pojmom pravotočivej kartézskej súradnicovej sústavy (Obr. 18).

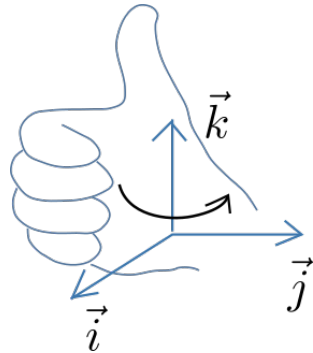
Všeobecný jednotkový vektor \vec{e} je vektor, ktorý má veľkosť rovnú 1 no inak môže byť rôzne orientovaný. Ľubovoľný vektor \vec{r} môžeme vyjadriť pomocou vhodne orientovaného jednotkového vektora \vec{e} : Polohový vektor $\vec{r} = r\vec{e}$, vektor sily $\vec{F} = F\vec{e}, \dots$ Tento zápis je veľmi nápomocný pri chápaní jednotiek fyzikálnych veličín. V takomto zápise je nositeľom fyzikálnej jednotky len veľkosť, napr. $\vec{r} = (5\text{m})\vec{e}$.

Jednotkový vektor možno rozložiť do zložiek vybraných osí, napr. v 2D:

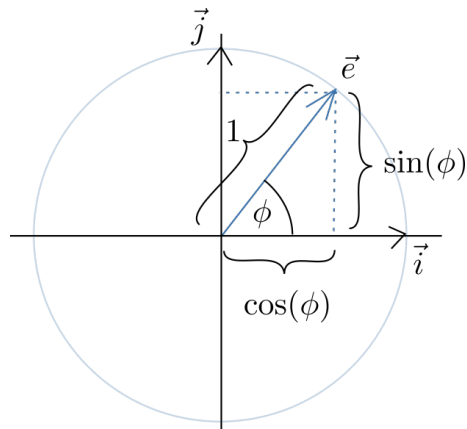
$$\vec{e} = \cos(\phi)\vec{i} + \sin(\phi)\vec{j}, \quad (1.69)$$

kde $\cos(\phi)$ a $\sin(\phi)$ sú týmto zadané funkcie ako veľkosti strán pravouhlého trojuholníka s vrcholom v strede kružnice a s ostatnými dvoma vrcholmi spojenými oblúkom s dĺžkou ϕ ⁸ (Obr. 24).

⁸Z definície funkcií \cos a \sin pomocou dĺžky strán v pravouhlom trojuholníku s jednotkovou preponou následne vyplývajú všetky známe vlastnosti goniometrických funkcií,



Obr. 23: Pravidlo pravej ruky pomáha pri určovaní vzájomnej orientácie jednotkových vektorov.



Obr. 24: Všeobecný jednotkový vektor \vec{e} možno rozložiť do zložiek pomocou goniometrických funkcií $\sin()$ a $\cos()$. Historicky, uhol vytínajúce priamky na jednotkovej kružnici a do nich vpísaný pravouhlý trojuholník predstavujú geometrickú definíciu týchto dvoch funkcií.

Komentár: Z definície funkcií \cos a \sin pomocou dĺžky strán v pravouhлом trojuholníku s jednotkovou preponou následne vyplývajú všetky známe vlastnosti goniometrických funkcií, napr. aj súčtové vzorce $\cos(\beta - \alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$, alebo presné hodnoty pre špeciálne hodnoty uhlov, napr. $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

Príklad: Minútová ručička nástenných hodín má dĺžku 10cm. Aké dlhé sú jej zložky v horizontálnom a vertikálnom smere o 12:10?

Riešenie: Vektor minútovej ručičky môžeme popísať pomocou veľkosti a jednotkového vektora v tvare (1.69). V čase 12:10 je uhol medzi horizontálnym smerom a ručičkou je 5 minút, čomu v radiánoch zodpovedá $\phi = 2\pi 5/60 = \pi/6$. Vektor minútovej ručičky bude

$$\vec{r} = 10\text{cm} \left(\cos(\pi/6)\vec{i} + \sin(\pi/6)\vec{j} \right) = 10\text{cm} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \right) \quad (1.70)$$

$$= 5\sqrt{3}\text{cm}\vec{i} + 5\text{cm}\vec{j}. \quad (1.71)$$

Horizontálna zložka minútovej ručičky je dlhá $5\sqrt{3}\text{cm}$ a vertikálna zložka je dlhá 5cm.

1.3.5 Skalárny súčin

Skalárny súčin dvoch vektorov charakterizuje mieru ich vzájomnej orientácie v priestore. Výsledkom skalárneho súčinu je číslo (skalár), ktoré je úmerné veľkosti jedného aj druhého vektora, a zároveň úmerné aj miere zhodnosti ich smeru. Matematicky, geometrická definícia skalárneho súčinu vektorov \vec{a} a \vec{b} je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\phi) \quad (1.72)$$

kde ϕ je uhol medzi vektormi \vec{a} a \vec{b} . Skalárny súčin medzi vektormi zapisujeme výraznou bodkou, neležiace na riadku.

napr. aj súčtové vzorce $\cos(\beta - \alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$, alebo presné hodnoty pre špeciálne hodnoty uhlov, napr. $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

V prípade keď $\cos(\phi) = 0$, t.j. pre $\phi = \pm\pi/2$, je ich výsledný skalárny súčin nulový, hoci oba môžu mať nenulovú veľkosť. Hovoríme že vektory sú na seba kolmé.

Skalárny súčin má výsledok záporný ak je $\phi > \pi/2$ alebo $\phi < -\pi/2$, a kladný ak je $-\pi/2 < \phi < \pi/2$.

Pre $\phi = 0$ je výsledok skalárneho súčinu priamo súčin veľkostí oboch vektorov, hovoríme že vektory sú paralelné (alebo aj rovnobežné).

Skalárny súčin medzi jednotkovými vektormi \vec{i} , \vec{j} a \vec{k} nadobúda zvlášť jednoduchý tvar, priamo z definície (1.72) ľahko napr. nájdeme

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad (1.73)$$

alebo

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0. \quad (1.74)$$

Základnou vlastnosťou skalárneho súčinu je *bilinéarnosť*, t.j. lineárnosť vzhľadom na oba súčinitele. Lineárnosť vzhľadom na prvý súčiniteľ je

$$(c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2) \cdot \vec{b} = c_1 (\vec{a}_1 \cdot \vec{b}) + c_2 (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}) \quad (1.75)$$

Z nej možno priamočiaro dokázať, že ak si rozložíme vektory \vec{a} a \vec{b} do zložiek v zvolených kartézskych súradniciach,

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad (1.76)$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}, \quad (1.77)$$

potom pre ich skalárny súčin bude platiť

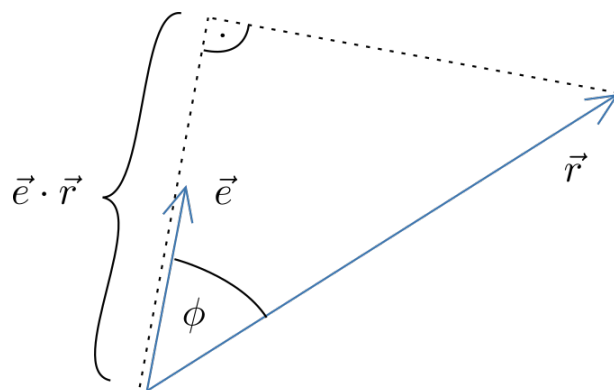
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.78)$$

Posledný výraz sa niekedy v matematike považuje za definíciu skalárneho súčinu (algebraickú), a nami uvedená geometrická definícia (1.72) už nie je definíciou ale vlastnosťou, ktorú možno z algebraickej definície (1.78) ľahko dokázať.

Skalárny súčin je užitočný pre nachádzanie *priemetu vektora do vybraného smeru*. Napríklad priemet vektora \vec{a} do smeru daného jednotkovým vektorom \vec{i} nájdeme pomocou definície skalárneho súčinu (1.72),

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cos(\phi) = a \cos(\phi) \quad (1.79)$$

Na druhej strane, pomocou vzťahu (1.78) vidíme že zložka vektora a_x má práve zmysel priemetu do smeru daného vektorom \vec{i} . Všeobecnejšia situácia priemetu vektora do smeru je ukázaná na obr. 25.



Obr. 25: Geometrický význam skalárneho súčinu $\vec{e} \cdot \vec{r} = r \cos(\phi)$ je, že predstavuje priemet vektora \vec{r} do smeru daného jednotkovým vektorom \vec{e} .

Príklad: Máme vektor $\vec{a} = 3\vec{i} + 1\vec{j}$. Nájdite jeho zložky a'_x a a'_y v sústave súradníc pootočenej voči \vec{i}, \vec{j} o uhol $\alpha = \pi/4$.

Riešenie Všeobecný jednotkový vektor v rovine sme mali vyjadrený pomocou uhla ϕ k vektoru \vec{i} v rovnici (1.69). Pri otočení o $\phi/4$ bude

$$\vec{i}' = \cos(\pi/4)\vec{i} + \sin(\pi/4)\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j}). \quad (1.80)$$

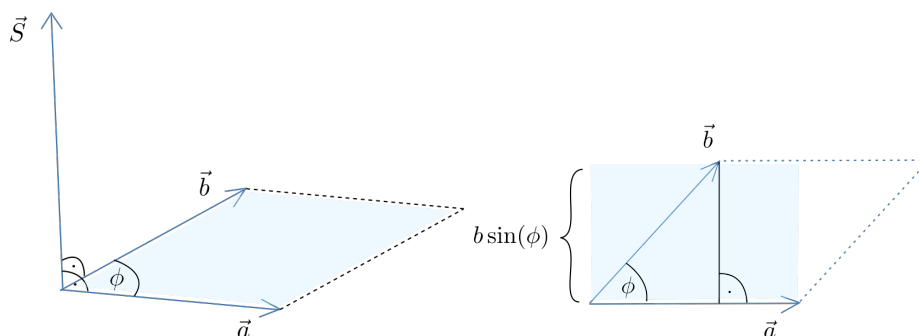
Vektor \vec{j}' dostaneme pomocou uhlu $\phi = \pi/2 + \pi/4$ (prvý uhol dá z vektora \vec{i} vektor \vec{j} , prídanie $\pi/4$ dá otočenie sústavy),

$$\vec{j}' = \cos(3\pi/4)\vec{i} + \sin(3\pi/4)\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\vec{i} + \vec{j}). \quad (1.81)$$

Zložky vektora \vec{a} v čiarkovanej sústave dostaneme ako jeho priemety do smerov \vec{i}' a \vec{j}' :

$$a'_x = \vec{a} \cdot \vec{i}' = (3\vec{i} + 1\vec{j}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4) = 2\sqrt{2} \quad (1.82)$$

$$a'_y = \vec{a} \cdot \vec{j}' = (3\vec{i} + 1\vec{j}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (-\vec{i} + \vec{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-3 + 1) = -\sqrt{2} \quad (1.83)$$



Obr. 26: Výsledkom vektorového súčinu $\vec{a} \times \vec{b}$ je vektor \vec{S} , kolmý na rovinu súčiniteľov, ktorého veľkosť je rovná veľkosti plochy určenej súčiniteľmi. Vpravo je znázornený vzťah pre veľkosť vektorového súčinu (1.84).

1.3.6 Vektorový súčin

Plochu v tvare lichobežníka možno zadať pomocou dvoch vektorov tvoriacich jeho dve strany. Plocha takéhoto lichobežníka je charakterizovaná pomocou *vektorového* súčinu týchto dvoch vektorov. Podobne ako skalárny súčin, je aj vektorový súčin bilineárny, lebo plocha rastie s rastúcou veľkosťou prvého aj druhého vektora. Výsledkom vektorového súčinu je vektor, čo ho principiálne odlišuje od skalárneho súčinu. Veľkosť výsledného vektora je veľkosťou plochy spomínaného lichobežníka, a jeho smer je smer *kolmý* na rovinu lichobežníka. Orientácia vektora plochy sa definične volí tak aby tri vektory \vec{a} , \vec{b} a \vec{S} , kde \vec{S} je výsledok vektorového súčinu \vec{a} a \vec{b} , tvorili presne v uvedenom poradí *pravotočivý systém vektorov*.

Matematicky, geometrická definícia vektorového súčinu vektorov \vec{a} a \vec{b} je

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\phi)\vec{e}, \quad (1.84)$$

kde ϕ je uhol meraný od \vec{a} k \vec{b} , a \vec{e} je jednotkový vektor taký, že vektory \vec{a} , \vec{b} a \vec{e} tvoria pravotočivú sústavu presne v tomto poradí.

Ak sú vektory \vec{a} a \vec{b} na seba kolmé, t.j. $\phi = \pi/2$, budú tieto vektory definovať obdĺžnik s hranami a a b a s plochou

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| = ab. \quad (1.85)$$

Ak sú vektory \vec{a} a \vec{b} paralelné, bude $\phi = 0$ a plocha bude, ako aj má byť, nulová.

Vo všeobecnosti, faktor $|\vec{b}|\sin(\phi)$ má zmysel výšky lichobežníka na stranu a a teda dáva veľkosť uvedenej plochy vo všeobecnosti.

Pri vektorovom súčine záleží na poradí, t.j. vektorové násobenie nie je komutatívne. Výraz

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}, \quad (1.86)$$

pretože pravotočivým je systém vektorov \vec{b} , \vec{a} a $-\vec{e}$. Vektory v poradí \vec{b} , \vec{a} a \vec{e} tvoria ľavotočivý systém vektorov.

Vektorový súčin medzi jednotkovými vektormi \vec{i} , \vec{j} a \vec{k} má jednoduchú štruktúru,

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \quad (1.87)$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \quad (1.88)$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad (1.89)$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad (1.90)$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad (1.91)$$

$$\dots \quad (1.92)$$

o čom sa možno ľahko presvedčiť priamo z definície (1.84).

Ako bolo už uvedené, vektorový súčin je bilineárny o čom sa možno presvedčiť geometrickým rozkladom vektorov a plôch.

Podobne ako pri skalárnom súčine, aj pre vektorový súčin existuje vzťah pre jeho výpočet zo zložiek vektorov,

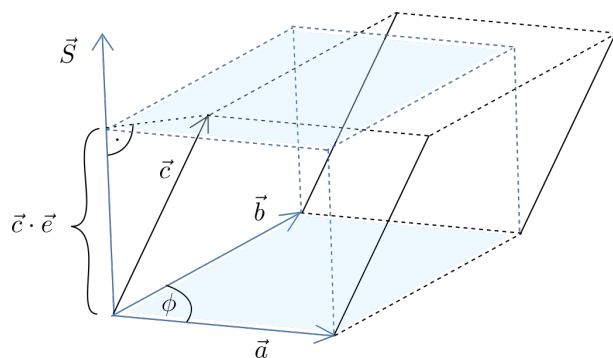
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \quad (1.93)$$

čo možno ľahko dokázať pomocou bilinearitu a použitím vyššie uvedených výsledkov pre vektorové násobenie jednotkových vektorov ⁹

Úloha: Nástenné ručičkové hodiny ukazujú čas 15:30. Nech vektor \vec{a} je orientovaný pozdĺž hodinovej ručičky, vektor \vec{b} pozdĺž minútovej ručičky. Ako je orientovaný vektor \vec{e} ak vektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{e} tvoria pravotočivý systém? Aký je uhol ϕ pri výpočte $\vec{a} \times \vec{b}$? Aký bude tento uhol a orientácia vektora \vec{e} o 16:00?

Príklad: Keďže vektorový súčin vektorov $\vec{a} \times \vec{b}$ má význam plochy rovno-

⁹Výraz (1.93) sa často zapisuje ako *determinant* z matice, ktorej prvý riadok tvoria vektory \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , druhý riadok súradnice vektora \vec{a} a tretí riadok súradnice vektora \vec{b} .



Obr. 27: Objem rovnobežnostena tvoreného vektormi \vec{a} , \vec{b} a \vec{c} možno spočítať ako súčin jeho podstavy a výšky, čo v konečnom dôsledku predstavuje zmiešaný súčin $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

bežníka, ktorý tieto dva vektory definujú,

$$\vec{a} \times \vec{b} = S\vec{e} \quad (1.94)$$

a smer výsledku je kolmý na túto plochu, potom

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (1.95)$$

tzv. zmiešaný súčin, ktorý má význam objemu rovnobežnostena definovaného vektormi \vec{a} , \vec{b} a \vec{c} . Tento význam vychádza z toho, že $\vec{c} \cdot \vec{e}$ má zmysel jeho výšky na plochu S . Tento objem nemôže závisieť od poradia v akom tieto vektory usporiadame, a preto zrejme platí

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \quad (1.96)$$

Úloha: Ukážte, že výsledok vektorového násobenia podľa rovnice (1.93) je kolmý na oba súčinitele, t.j. že platí $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ aj $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$. Tieto rovnosti úzko súvisia s geometrickým významom zmiešaného súčinu v predchádzajúcej časti.

Úloha: Presvedčte sa že pre ľubovoľné vektory \vec{a}, \vec{b} a \vec{c} platí

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (1.97)$$

Pomôcka: Na všeobecnosti sa nič nestratí, ak si zvolíme takú orientáciu osí, že \vec{i} je orientované v smere \vec{a} , \vec{j} tak, že \vec{b} leží v rovine \vec{i}, \vec{j} . Vektor \vec{c} musím mať už všetky tri súradnice nenulové, $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$. Na dôkaz použite vzťah (1.93).

Úloha: Dvojnásobný vektorový súčin vedie k nasledovnému zápisu rozkladu ľubovoľného vektora \vec{r} na zložku v smere jednotkového vektora \vec{e} , a na zvyšok,

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} = \vec{e}(\vec{r} \cdot \vec{e}) + \vec{e} \times (\vec{r} \times \vec{e}) \quad (1.98)$$

ak ho použijeme pre $\vec{b} = \vec{r}$ a $\vec{a} = \vec{c} = \vec{e}$.

1.3.7 Rovnomerne zrýchlený pohyb v rovine

Poloha bodu v rovine je daná dvomi súradnicami,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}. \quad (1.99)$$

Ak sa mení prvá súradnica rovnomerne v čase, vieme ju vyjadriť v tvare $x = x_0 + v_{x0}t$, kde x_0 je hodnota tejto súradnice v čase $t = 0$ a v_{x0} má zmysel konštantnej rýchlosti nárastu tejto súradnice. v_{x0} budeme nazývať x -ovou zložkou rýchlosti.

Ak by sa menila prvá súradnica rovnomerne zrýchlene, potom by bola rýchlosť v_x závislá od času podľa predpisu

$$v_x = v_{x0} + a_x t,$$

kde v_{x0} má zmysel x -ovej zložky rýchlosti v čase $t = 0$, tzv. počiatočnej rýchlosti a a_x má význam rýchlosti zmeny x -ovej zložky rýchlosti, ktorú budeme nazývať x -ovou zložkou zrýchlenia. V prípade že je táto zložka zrýchlenia nulová, zredukuje sa tento prípad na predchádzajúci, pričom $v_x = v_{x0}$ v každom

čase. K tomuto zodpovedajúca x -ová súradnica by sa menila v čase podľa predpisu

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2. \quad (1.100)$$

Podobne sa môže meniť aj druhá, y -ová súradnica s analogicky zavedenými označeniami,

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2, v_y = v_{y0} + a_y t. \quad (1.101)$$

1.3.8 Vektory zrýchlenia a rýchlosti pri rovnomerne zrýchlenom pohybe

Zameriame sa teraz na pohyb telies v homogénnom gravitačnom poli, t.j. pohyb v situáciach na aké sme navyknutí v bežnom živote. Nestratíme tým nijako na všeobecnosti rovnomerne zrýchleného pohybu v rovine, nakoľko vždy si môžeme zvoliť súradnice tak, aby os \hat{y} bola rovnobežná, a opačne orientovaná ako je uvažované konštantné zrýchlenie telesa.

V homogénnom gravitačnom poli je zrýchlenie hmotného bodu je nenulové len v smere zvislom nadol, t.j. $a_x = 0$ a $a_y = -g$, pričom veľkosť *gravitačného zrýchlenia* v našich zemepisných šírkach je $g = 9,87\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Spoločne môžeme toto tvrdenie napísať pomocou zápisu *vektora zrýchlenia*

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = -g \vec{j}. \quad (1.102)$$

Podobne, aj rýchlosti x -ovej a y -ovej súradnice môžeme napísať spolu, pomocou zápisu *vektora rýchlosti*

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = v_{x0} \vec{i} + (v_{y0} - gt) \vec{j} \quad (1.103)$$

Na rozdiel od vektora zrýchlenia, vektor rýchlosti je v čase premenný. Posledné dve rovnice môžeme spolu zapísať v vektorovom tvare

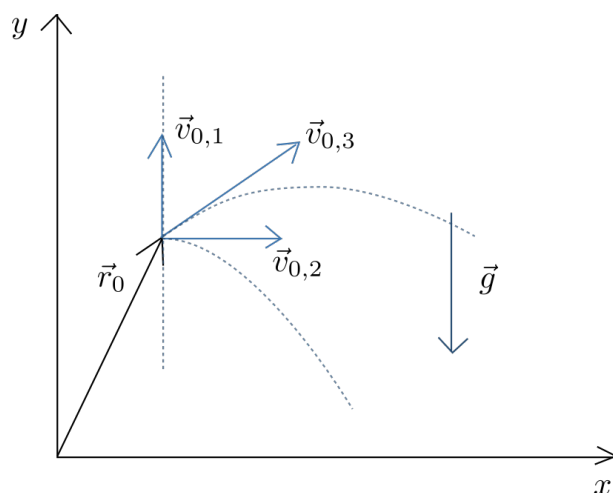
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad (1.104)$$

ktorý nápadne pripomína situáciu z pohybu v jednom smere, no je bohatší, lebo popisuje naraz pohyb v dvoch rozmeroch. Vektor \vec{v}_0 budeme nazývať vektorom *počiatočnej rýchlosti*.

Nakoniec zapíšeme podobným spôsobom aj samotný polohový vektor, pre ktorý kombináciou rovníc (1.100) a (1.101) dostaneme

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2. \quad (1.105)$$

Vidíme, že pomocou vektorov dokážeme šikovne zapísať všeobecný rovnomerne zrýchlený pohyb bodu v dvoch (a aj troch) rozmeroch.



Obr. 28: Tri kvalitatívne odlišné typy počiatkových podmienok na rýchlosť pri pohybe v homogénnom gravitačnom poli s naznačením začiatku ich trajektórií (čiarkovane): (1) zvislý vrh, (2) vodorovný vrh, a (3) šikmý vrh. Pre ich klasifikáciu je podstatný vzťah orientácie počiatkovej rýchlosti vzhľadom na zrýchlenie \vec{g} .

1.3.9 Počiatkové podmienky

Zo strednej školy poznáme názvy troch špeciálnych prípadov pohybu v rovine (Obr. 28):

1. Zvislý vrh: $\vec{r}_0 = h\vec{j}$, $\vec{v}_0 = v_0\vec{j}$
2. Vodorovný vrh: $\vec{r}_0 = h\vec{j}$, $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$
3. Šikmý vrh: $\vec{r}_0 = h\vec{j}$, $\vec{v}_0 = v_{x0}\vec{i} + v_{y0}\vec{j}$

Vidíme, že líšia sa len obmedzeniami pri voľbe počiatkovej rýchlosti. Spoločne s počiatkovou polohou ich nazývame *počiatkové podmienky*. Tieto si pre rôzne realizácie pohybu môžeme vždy zvoliť nezávisle od pôsobiacich fyzikálnych síl. Na rozdiel od počiatkových podmienok, vektor gravitačného zrýchlenia nemôžeme ľubovoľne meniť, je daný fyzikálnou situáciou - homogénnym gravitačným poľom.

Pri šikmom vrhu je počiatková rýchlosť často daná veľkosťou vektora počiatkovej rýchlosti, $v_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$ a počiatkovým uhlom ϕ medzi vektorom počiatkovej rýchlosti a osou x . Vektor počiatkovej rýchlosti je potom $\vec{v}_0 = v_0 \cos(\phi)\vec{i} + v_0 \sin(\phi)\vec{j}$.

1.3.10 Trajektória

Pri vodorovnom vrhu má počiatočná poloha nenulovú výšku,

$$\vec{r}_0 = h\vec{j} \quad (1.106)$$

a počiatočná rýchlosť je

$$\vec{v}_0 = v_0\vec{i} \quad (1.107)$$

Polohový vektor teda závisí nasledovne od času,

$$\vec{r} = h\vec{j} + v_0t\vec{i} - \frac{1}{2}gt^2\vec{j} \quad (1.108)$$

Pre nájdenie tvaru trajektórie, po ktorej sa hmotný bod hýbe, sa snažíme nájsť dvojice súradníc (x,y) v ktorých sa bod nachádzal v rôznych časoch. Toto môžeme dosiahnuť, ak si vyjadríme čas z x -ovej súradnice a ten následne dosadíme do y -ovej súradnice,

$$x = v_0t, \quad y = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.109)$$

$$y = h - \frac{g}{v_0^2}x^2. \quad (1.110)$$

Vidíme, že trajektória bodu pohybujúceho sa vodorovným vrhom je parabola s maximom v $x = 0$, v súlade s naznačenou trajektóriou na obr. 28.

Uvedomme si dôležitý rozdiel medzi veľkosťou polohového vektora a dĺžkou dráhy: dĺžka dráhy je dĺžkou trajektórie, kým veľkosť polohového vektora je priama vzdialenosť aktuálnej polohy bodu od nami vybraného počiatku súradnicovej sústavy.

Príklad: Jednu sekundu pred koncom zápasu hádže basketbalista z výšky 2m na kôš vzdialený od neho 7m (trošku viac ako trojková čiara). Obruč koša je vo výške 3m. Pod akým uhlom a akou rýchlosťou musí hodiť loptu aby sa body počítali? Ak uvážite, že lopta do koša musí padnúť pod uhlom väčším ako 30° , je možné z tejto vzdialenosti v poslednej minúte skórovať?

Riešenie Počiatok sústavy si zvolíme v mieste kde lopta opúšťa ruky basketbalistu, takto budú počiatočné súradnice nulové. Súradnice koncového miesta kde má lopta doraziť sú potom $x(t_f) = 7\text{m}$ a $y(t_f) = 1\text{m}$. Ako koncový čas si vezmeme maximálny prípustný čas $t_f = 1\text{s}$. Zrýchlenie má nenulovú len vertikálnu zložku, $g = -9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Rovnica pre x -ovú súradnicu, (1.100) nadobudne tvar

$$7 = v_{x0}1 \quad (1.111)$$

z ktorej nájdeme x-ovú zložku počiatočného vektora rýchlosti $v_{x0} = 7\text{m/s}$.

Rovnica pre y-ovú súradnicu, (1.101) nadobudne tvar

$$1 = v_{y0} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 1^2 \quad (1.112)$$

$$v_{y0} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 1^2 = 5,91\text{m/s}. \quad (1.113)$$

Veľkosť počiatočnej rýchlosti je teda

$$v_0 = \sqrt{7^2 + 5,91^2} = 9,16\text{m/s}. \quad (1.114)$$

a počiatočný uhol hádzania (od horizontálnej osi) bude

$$\cos(\phi_0) = \frac{v_{0x}}{v_0} = \frac{7}{9,16} = 0,764 \quad (1.115)$$

$$\phi_0 = 40,2^\circ \quad (1.116)$$

Musíme ešte overiť, či pri dopade bude uhol väčší ako 30° . Vektor rýchlosti v čase $t_f = 1\text{s}$ bude

$$v_x(t_f) = v_{0x} = 7 \quad (1.117)$$

$$v_y(t_f) = v_{0y} - gt_f = 5,91 - 9,81 \cdot 1 = -3,9 \quad (1.118)$$

Nakoniec nájdeme uhol dopadu podobne ako pri uhle streľby,

$$\cos(\phi_f) = \frac{7}{\sqrt{7^2 + 3,9^2}} = 0,87 \quad (1.119)$$

$$\phi_f = 29,1^\circ \quad (1.120)$$

Záver teda je, že toto ostrostrelcovi už zrejme nevyjde. Otázka teda vyvstáva, o koľko viac času potrebuje?

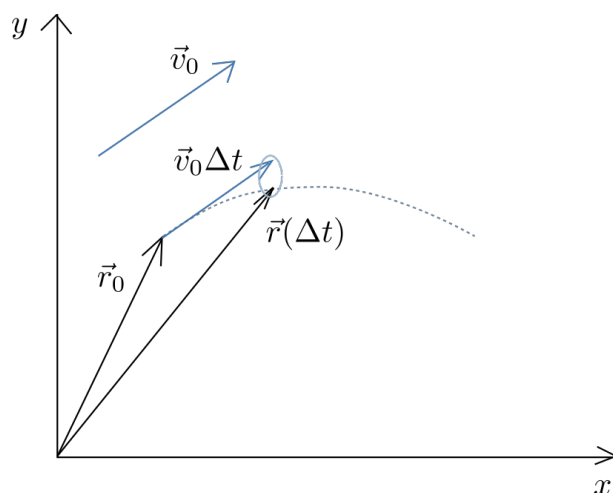
1.3.11 Geometrický význam vektora rýchlosti

Uvažujme len krátky okamžik času $t = \Delta t$, ktorý uplynul od počiatočného momentu $t = 0$. Potom v rovnici (1.105) môžeme príspevok s zrýchlením zanedbať, nakoľko

$$|\vec{a}|(\Delta t)^2 \ll |\vec{v}_0|\Delta t.$$

Pre polohový vektor v čase Δt potom bude

$$\vec{r}(\Delta t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\Delta t \quad (1.121)$$



Obr. 29: Ak je prírastok času Δt malý, je možné získať približne polohový vektor telesa po tomto čase pridaním vektora posunutia $\Delta r = \vec{v}_0 \Delta t$ k vektoru predchádzajúcej polohy \vec{r}_0 . Ich rozdiel - zakrúžkovaná vzdialenosť medzi koncami vektorov - je tým menší, čím menší časový prírastok uvažujeme.

z čoho vektorovými úpravami (odpočítaním vektora \vec{r}_0 od oboch strán rovnice) nájdeme

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(\Delta t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 \Delta t \quad (1.122)$$

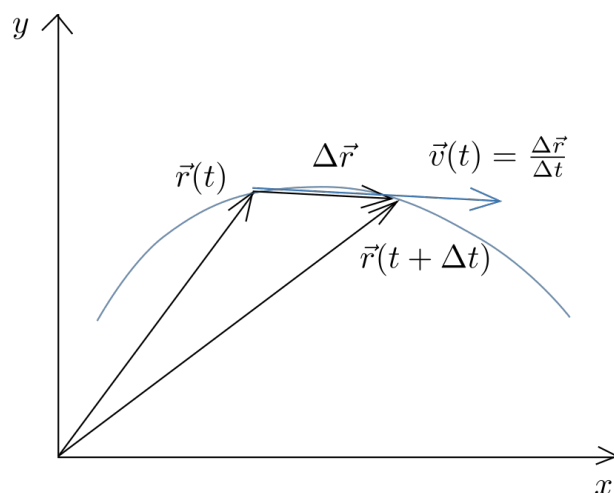
Z poslednej rovnice nám vychádzajú dve stránky geometrického významu vektora rýchlosti (Obr. 29):

1. Dráha prejdená bodom za krátky čas, $\Delta s = |\Delta \vec{r}|$ je rovná súčinu veľkosti vektora a uplynutého času, $\Delta s = |\vec{v}_0| \Delta t$, čo je analogické situácii pri pohybe v jednom rozmere,
2. Vektor rýchlosti má smer dotýčnice k trajektórii bodu, nakoľko

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{r}(\Delta t) - \vec{r}_0}{\Delta t}. \quad (1.123)$$

1.3.12 Definície okamžitého vektora rýchlosti a zrýchlenia

Na základe predchádzajúcich úvah o charaktere vektorov rýchlosti a zrýchlenia a ich geometrickej interpretácii môžeme uviesť všeobecné definície týchto veličín pre ľubovoľný pohyb (Obr. 30), uvažovaním limitne malého prírastku času vedúceho podobne ako pri pohybe v 1D k derivácii.



Obr. 30: Okamžitá rýchlosť je definovaná rozdielom dvoch tesne po sebe nasledujúcich polohových vektorov predeleným zodpovedajúcim prírastkom času.

Vektor rýchlosti je daný deriváciou polohového vektora podľa času,

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (1.124)$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \quad (1.125)$$

Podobne, vektor zrýchlenia je daný deriváciou vektora rýchlosti podľa času,

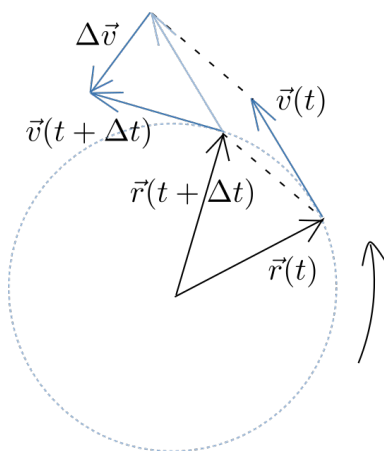
$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (1.126)$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \quad (1.127)$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \quad (1.128)$$

$$(1.129)$$

kde symbol $\frac{d^2}{dt^2}$ predstavuje dva krát zopakované derivovanie, t.j. druhú deriváciu podľa času. Zámerne sme rozpísali počiatočný formálny zápis do limity a súradníc, aby sme si uvedomili komplexnosť týchto definícií. Uvedené definície v sebe kombinujú koncepty prechodu ku limitne krátkym prírastkom súradnice za limitne krátky čas, s ktorými sme sa oboznámili pri pohybe v jednom rozmere, a popisu viacrozmerneho pohybu pomocou vektorov, a predstavujú základné definície kinematiky bodov.



Obr. 31: Poloha, rýchlosť a zmena rýchlosti bodu pohybujúceho sa po kružnici v časoch t a $t + \Delta t$. Pre nájdenie rozdielu rýchlostí v týchto okamžikoch ako rozdielu dvoch vektorov je potrebné presunúť zobrazený vektor rýchlosti v čase $t + \Delta t$, $\vec{v}(t + \Delta t)$ do spoločného počiatku s vektorom rýchlosti v čase t , $\vec{v}(t)$.

1.3.13 Pohyb po kružnici

Kartézské súradnice bodu vykonávajúceho pohyb po kružnici s polomerom R a so stredom v počiatku majú tvar $x = R \cos(\phi)$, $y = R \sin(\phi)$, pričom hodnota uhlu ϕ určuje konkrétne miesto na kružnici, kde sa bod nachádza.

Ak sa bod pohybuje po kružnici rovnomerne, bude tento uhol rovnomerne s časom narastať,

$$\phi = \phi_0 + \omega t. \quad (1.130)$$

Na základe podobnosti so vzťahom pre rovnomernú zmenu súradnice s časom, (1.18) sa ω nazýva *uhlovou rýchlosťou*, pričom jej jednotka je $[\omega] = \text{Rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Najprv nájdeme vzťah pre veľkosť rýchlosti tohto bodu podľa definície, že veľkosť rýchlosti je dĺžka dráhy predelenej časom, za ktorú túto dráhu prešiel. Pri pootočení o uhol $\Delta\phi$ v radiánoch, bude dĺžka dráhy, t.j. dĺžka kruhového oblúku veľká $R\Delta\phi$, a preto pre veľkosť rýchlosti nájdeme

$$|\vec{v}| = \frac{R\Delta\phi}{\Delta t} = R\omega \quad (1.131)$$

Vektor rýchlosti je dotykovým smerom k trajektórii, a preto bude tento vektor meniť svoj smer, hoci jeho veľkosť bude nemenná a daná vzťahom (1.131), tak ako je to ukázané na Obr.31 Vektor zrýchlenia získame nasledovnou geometrickou úvahou; ak prejde čas Δt , vektor rýchlosti sa pootočí

o uhol $\Delta\phi = \omega\Delta t$. Veľkosť rozdielu vektorov rýchlosti v týchto nasledovných časoch dá, podľa definície 1.126 veľkosť vektoru zrýchlenia,

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \right| \quad (1.132)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)|}{\Delta t}. \quad (1.133)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\vec{v}|\Delta\phi}{\Delta t} = \omega|\vec{v}| \quad (1.134)$$

kde sme podobne ako pri výpočte veľkosti rýchlosti pohybu po kružnici v rovnici (1.131), použili geometrický výsledok, že veľkosť vektora rozdielu rýchlosti v dvoch nasledovných časoch je približne daná dĺžkou kruhového oblúka, ktorý ich konce spája.

Ukážeme si, ako tieto výsledky dostaneme použitím pravidiel derivovania. Polohový vektor bodu na kružnici bude

$$\vec{r} = R \cos(\phi)\vec{i} + R \sin(\phi)\vec{j} \quad (1.135)$$

pričom musíme pamätať, že uhol ϕ je lineárnou funkciou času podľa rovnice (1.130).

Potom vektor rýchlosti podľa všeobecnej definície bude,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt} \left(R \cos(\phi)\vec{i} + R \sin(\phi)\vec{j} \right) = -R \sin(\phi)\omega\vec{i} + R \cos(\phi)\omega\vec{j}, \\ &= R\omega(-\sin(\phi)\vec{i} + \cos(\phi)\vec{j}), \end{aligned} \quad (1.137)$$

kde sme využili derivovanie goniometrických funkcií podľa času,

$$\frac{d}{dt} \sin(\phi_0 + \omega t) = \cos(\phi_0 + \omega t)\omega, \quad (1.138)$$

$$\frac{d}{dt} \cos(\phi_0 + \omega t) = -\sin(\phi_0 + \omega t)\omega. \quad (1.139)$$

Pre veľkosť rýchlosti nájdeme,

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-R \sin(\phi)\omega)^2 + (R \cos(\phi)\omega)^2} = \omega R, \quad (1.140)$$

v súhlase s rovnicou (1.131), získanou geometrickým spôsobom. Ak si zakreslíme orientáciu vektora rýchlosti (1.137) overíme, že je vždy kolmý na polomer kružnice, t.j. dotykový k trajektórii.

Derivovaním rýchlosti podľa času, t.j. podľa definície (1.126), nájdeme aj vektor zrýchlenia,

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt} R\omega \left(-\sin(\phi)\vec{i} + \cos(\phi)\vec{j} \right) \quad (1.141)$$

$$= -R\omega^2(\cos(\phi)\vec{i} + \sin(\phi)\vec{j}), \quad (1.142)$$

kde sa opäť použili derivácie goniometrických funkcií, (1.138) a (1.138).

Veľkosť zrýchlenia je opäť priamočiara,

$$|\vec{a}| = R\omega^2 \sqrt{(\cos(\phi))^2 + (\sin(\phi))^2} = \omega^2 R = \omega|\vec{v}|, \quad (1.143)$$

opäť vzťah získaný prv geometrickým spôsobom. Fakt, že vektor so súradnicami $\cos()$ a $\sin()$ má veľkosť jedna sme tiež už spomínali - ide o všeobecný jednotkový vektor v rovine. Zakreslením vektora zrýchlenia pri rovnomernom pohybe po kružnici, (1.142) nájdeme že smeruje do stredu kružnice. Takéto zrýchlenie sa nazýva aj *dostredivé* a ako vidíme, nesúvisí so zmenou veľkosti ale smeru rýchlosti.

Príklad: Aká veľká je uhlová rýchlosť kolesa automobilu s rýchlosťou $v = 50\text{km/hod}$ ak priemer jeho pneumatiky je (Např. pre Škoda Octavia 2016 je štandard 205x55R16) $d = 2,54.16\text{cm} + 2.0,55.20.5\text{cm} = 0,632\text{m}$. Aký čas trvá jedno otočenie kolesa? Aké veľké je zrýchlenie kamienku zachyteného v dezéne pneumatiky?

Riešenie Obvodová rýchlosť kolesa je rovnaká ako rýchlosť automobilu, lebo v bode kontaktu sa pneumatika po ceste neprešmykuje. Preto môžeme použiť priamo vzťah spájajúci veľkosť rýchlosti, polomer kolesa a uhlovú rýchlosť.

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{50/3,6}{0,632/2} = 44,0\text{s}^{-1}. \quad (1.144)$$

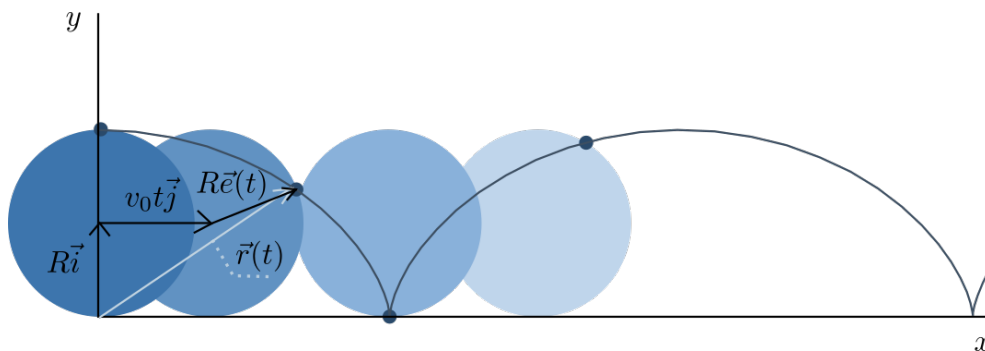
Priamo z definície uhlovej rýchlosti nájdeme aj čas na jednu obrátku, t.j. keď bude zmena uhlu rovná 2π ,

$$\Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} \rightarrow T = \frac{2\pi}{44}\text{s} = 0,14\text{s}. \quad (1.145)$$

Kamienok v dezéne sa pohybuje tou istou uhlovou rýchlosťou ako sa koleso otáča, a jeho vzdialenosť od stredu otáčania je zhruba totožná s polomerom pneumatiky a preto

$$a_{do,k} = \omega^2 R = 44^2 \cdot 0,632/2\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 612\text{m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (1.146)$$

Uvedomme si, že toto je asi 60-krát viac ako gravitačné zrýchlenie.



Obr. 32: Bod na obode valiaceho sa kola sa pohybuje po trajektórii, ktorú nazývame cikloida. Jeho polohový vektor vyskladáme postupne, ako je naznačené na obrázku. Rýchlosť bodu v dolnej polohe je nulová, v hornej maximálna a rovná $2v_0$.

Úloha: Medzinárodná vesmírna stanica ISS má orbitálnu (obežnú) rýchlosť $v = 6,76\text{km/s}$ a obieha Zem vo výške 400km , pričom orbita má s dostatočnou presnosťou tvar kružnice¹⁰. Ako dlho trvá jej kompletný oblet okolo Zeme a aké veľké je jej dostredivé zrýchlenie? Polomer Zeme je $R_Z = 6371\text{km}$.

Príklad: Nájdite časovú závislosť polohového vektora bodu na obode valiaceho sa kola s polomerom R a veľkosť vektora jeho rýchlosti, ak jeho posuvná rýchlosť je v_0 . (polohový vektor vykresľuje cikloidu pre " $v_0 = R$ ")

Riešenie:

Polohový vektor nájdeme ako súčet viacerých vektorov (obr. 32)

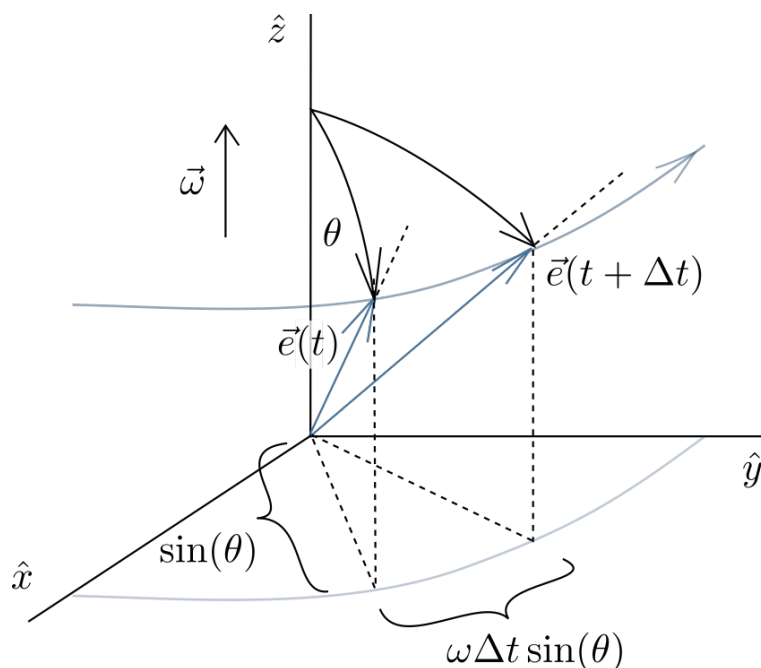
$$\vec{r}(t) = R\vec{j} + v_0 t\vec{i} + R\cos(-v_0 t/R + \pi/2)\vec{i} + R\sin(-v_0 t/R + \pi/2)\vec{j} \quad (1.147)$$

toto derivujeme a spočítame veľkosť,

$$|v(t)| = v_0\sqrt{2(1 + \cos(v_0 t/R))} \quad (1.148)$$

Vidíme, že v maxime $|\vec{v}(0)| = 2v_0$ a v minime $|\vec{v}(\pi R/v_0)| = 0$.

¹⁰<http://www.n2yo.com/?s=25544>.



Obr. 33: Pri všeobecnom otáčaní jednotkového vektora môže tento vektor zvierať s osou otáčania uhol θ . Uhol θ vplyva na veľkosť posunutia jednotkového vektora, čo je automaticky uvážené vektorovým súčinom v rovnici (1.149). Pri rovinných problémoch si zvyčajne volíme $\theta = \pi/2$.

1.3.14 Vektor uhlovej rýchlosti

Uvedené vzťahy pre derivácie polohy a rýchlosti pri pohybe po kružnici možno elegantne zapísať pomocou vektorového súčinu. Pre tento účel si ukážeme, že všeobecné vyjadrenie pre deriváciu jednotkového vektora, teda vektora ktorý nemení svoju veľkosť ale len smer, má tvar

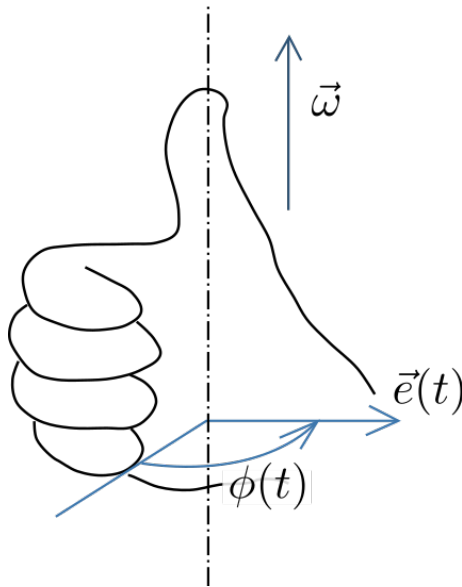
$$\frac{d}{dt}\vec{e}(t) = \vec{\omega} \times \vec{e}(t). \quad (1.149)$$

kde ω je *vektor* uhlovej rýchlosti, ktorého veľkosť je rovná veľkosti uhlovej rýchlosti otáčania a smer je rovnobežný s osou otáčania.

Vzťah (1.149) je ekvivalentný vzťahu pre prírastok vektora \vec{e} za krátky čas Δt ,

$$\vec{e}(t + \Delta t) - \vec{e}(t) = \Delta\vec{e}(t) = \Delta t\vec{\omega} \times \vec{e}(t). \quad (1.150)$$

ktorá musí byť kolmý na samotný vektor $\vec{e}(t)$, aby sa jeho dĺžka nemenila, a zároveň kolmý aj na os otáčania, lebo vzdialenosť koncového bodu $\vec{e}(t)$ sa z definície otáčania nemení. Obe tieto kolmosti zaručuje práve vektorový súčin.



Obr. 34: Ak sa jednotkový mení, tak sa musí otáčať. Uhlová rýchlosť $\vec{\omega}$ je vektor, ktorý má veľkosť danú zmenou uhlu tohto vektora voči pevnému smeru za jednotku času, a jeho orientácia je kolmá na jeho aktuálnu rovinu otáčania. Pre jeho určenie platí opäť variácia pravidla pravej ruky.

Rovnica (1.149) je platná aj pre veľkosť prírastku, nakoľko z definície vektorového súčinu

$$|\Delta \vec{e}(t)| = \Delta t |\vec{\omega} \times \vec{e}(t)| = \omega \Delta t \sin(\theta), \quad (1.151)$$

kde θ je uhol medzi osou otáčania (smer daný orientáciou $\vec{\omega}$ a jednotkovým vektorom $\vec{e}(t)$). Na druhej strane, presne k takému istému vzťahu prideme geometrickou analýzou podľa obr. 33. Tým že sme platnosť vzťahu (1.149) ukázali pre jeho smer aj veľkosť, presvedčili sme sa o jeho platnosti ako vektorovej rovnici.

Orientáciu vektora uhlovej rýchlosti vieme ľahko identifikovať pomocou mnemotehnickej pomôcky - ďalšej varianty pravidla pravej ruky, ako je ukázané na obr. 34.

Vzťah pre rýchlosť bodu po kružnici potom získame rozkladom polohového vektora na jeho veľkosť r a smer $\vec{\rho}$,

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} r \vec{\rho} = r \frac{d}{dt} \vec{\rho} = r \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1.152)$$

a pre zrýchlenie pri rovnomernom pohybe po kružnici

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{\omega} \times r\vec{\rho} = \vec{\omega} \times \left(r \frac{d}{dt}\vec{\rho} \right) = \vec{\omega} \times (r\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (1.153)$$

$$= \vec{\omega}(\omega \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r} = -\omega^2 \vec{r}_\perp \quad (1.154)$$

kde sme použili všeobecne platnú vektorovú identitu

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1.155)$$

a kde \vec{r}_\perp je priemet polohového vektora do roviny kolmej na os otáčania.

Príklad: Nájdite veľkosť dostredivého zrýchlenia telesa nachádzajúceho sa v pokoji na povrchu Zeme.

Riešenie: Bratislava má zemepisnú šírku $\phi = 48,156^\circ$, polomer Zeme je $R_Z = 6371\text{km}$ a preto kolmá vzdialenosť telesa v Bratislave od osi otáčania bude

$$R_\perp = R_Z \cos(\phi). \quad (1.156)$$

Uhlová rýchlosť $\omega = 2\pi/24\text{hod}$ a teda celkovo pre dostredivé zrýchlenie nájdeme

$$a_d = R_Z \cos(\phi)\omega^2 = 6371 \cdot 10^3 \cdot 0,667 \cdot (6,26/86400)^2 = 0,022\text{m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (1.157)$$

Toto predstavuje malý príspevok k celkovej hodnote gravitačného zrýchlenia telesa $g = 9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Úloha: Presvedčte sa, že aj veľkosť výsledku pre rýchlosť v rovnici (1.152) súhlasí s veľkosťou rýchlosti v rovnici (1.131).

1.3.15 Tangenciálne a normálové zrýchlenie

Pri všeobecnom pohybe možno zrýchlenie rozdeliť na dve kolmé zložky: na *tangenciálne zrýchlenie*, ktoré je orientované v smere pohybu a charakterizuje nakoľko sa veľkosť rýchlosti mení, a *normálové zrýchlenie*, charakterizujúce

to, ako sa mení smer rýchlosti. Tento rozklad dokážeme spraviť vo všeobecnosti. Vektor okamžitej rýchlosti nech je

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{e}(t) \quad (1.158)$$

kde $v(t)$ je premenlivá veľkosť rýchlosti a $\vec{e}(t)$ jej smer daný týmto jednotkovým vektorom. Potom pre zrýchlenie nájdeme

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{e}(t) + v(t)\frac{d}{dt}\vec{e}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{e}(t) + \vec{\omega} \times \vec{v}(t) \quad (1.159)$$

kde sme využili vzťah pre deriváciu jednotkového vektora (1.149). Prvý člen má evidentne smer dotykového vektora \vec{e} a predstavuje tangenciálne zrýchlenie

$$\vec{a}_t = \frac{dv(t)}{dt}\vec{e}(t) \quad (1.160)$$

a druhý člen je naň kolmý, lebo je výsledkom vektorového násobenia s \vec{e} , a predstavuje normálové zrýchlenie

$$\vec{a}_n = \vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t). \quad (1.161)$$

V špeciálnom prípade pohybu po kružnici predstavuje normálové zrýchlenie nám už známe dostredivé zrýchlenie.

2 Dynamika hmotných bodov

2.1 Hmotnosť

Pojem hmotnosti telies je intuitívne dobre známy. Základnou jednotkou hmotnosti je 1kg, zavedený pomocou referenčného platinum-irídiového valčeka slúžiaceho ako medzinárodný normál. Pôdovne bola práve táto jednotka zvolená ako hmotnosť 1 litra vody, a preto je hustota vody tak blízko k hodnote $1\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Hmotnosť ostatných telies možno nájsť porovnávaním s normálom hmotnosti pomocou dvojrámenných váh, postup známy už od úsvitu ľudstva. Hmotnosť ako fyzikálnu veličinu typicky označujeme písmenkom m od anglického slova “mass”.

Hmotnosť hmoty sa ukazuje byť jej *extenzívnou vlastnosťou*, t.j. rastie lineárne s jej množstvom. Inou mierou množstva je počet častíc - atómov, no pre makroskopické množstvá ide o neprehtickú mieru - počty sú enormne veľké, rádovo 10^{23} pre 1cm^3 látky. Preto sa zaviedla miera množstva látky *látkové množstvo*, zvyčajne označované ako n s jednotkou 1mol. Jeden mol

prítom predstavuje množstvo, v ktorom sa nachádza N_A častíc, kde N_A je Avogadrova konštanta a je rovná približne $6,02214 \cdot 10^{23}$. Tento počet zodpovedá počtu atómov uhlíka ^{12}C v 12g jeho množstva. Aj táto voľba má svoj dobrý dôvod: ak je hmotnosť jedného mólu uhlíka ^{12}C 12g, a vieme že ^{12}C sa skladá z 6 protónov a 6 neutrónov, ktoré majú veľmi podobnú hmotnosť (preto ich aj nazývame spoločným názvom nukleóny), môžeme ľahko odhadnúť hmotnosti jedného mólu iných atómov, pokiaľ vieme z koľkých nukleónov sa skladajú.

Príklad: Vodík, ako najmenší atóm, sa skladá z jediného protónu a hmotnosť jedného mólu atomárneho vodíka je teda približne 1g. Iný príklad - najbežnejší izotop kremíku ^{28}Si má 14 protónov a 14 neutrónov, a preto jeden mol kremíka bude mať hmotnosť približne 28g.

Molárna hmotnosť - hmotnosť jedného mólu látky označujeme značkou M_m a používame pre ňu jednotku

$$[M_m] = \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}, \quad (2.1)$$

alebo jednotky od nej odvodené ako $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Priamo z definície látkového množstva potom dostávame vzťah medzi hmotnosťou daného množstva látky, molárnou hmotnosťou a látkovým množstvom,

$$m = M_m \cdot n. \quad (2.2)$$

Iná miera množstva látky je objem hmoty V , hoci menej spoľahlivá v dôsledku teplotnej rozťažnosti či stlačiteľnosti. Pre výpočet hmotnosti z daného objemu látky (alebo naopak), zavádzame pojem *hustoty hmotnosti* látky ρ ako hmotnosť pripadajúca na kilogram alebo gram látky. Hmotnosť daného množstva látky potom môžeme získať ak poznáme jej hustotu a objem,

$$m = \rho \cdot V. \quad (2.3)$$

Je užitočné uvedomiť si podobnosť vzťahov (2.2) a (2.3). Oba vyjadrujú priamu úmernosť medzi extenzívnymi veličinami m a n alebo m a V charakterizujúce množstvo látky.

Pri popise pohybu telies v kinematike sme hovorili o polohovom vektore bodu. Ako zvolíť pozíciu tohto bodu na študovanom telese, ktoré sa hýbe? Stretne sa s dvomi situáciami: pohyb hmotného bodu a pohyb ideálne tuhého úleasa.

Ak je rozmer telesa podstatne menší ako zmeny súradníc telesa, ktoré nás zaujímajú, tak v rámci tejto presnosti sa nám teleso zdá ako bod s dobre definovaným polohovým vektorom. Navyiac, z hľadiska dynamiky je dôležitá jeho hmotnosť, ktorú zanedbať nemôžeme, a preto v takomto prípade hovoríme o *hmotnom bode*.

V prípade, že hýbuce sa teleso je dostatočne tuhé (k diskusii čo znamená ideálne tuhé a čo dostatočne tuhé sa vrátíme v časti o dynamicke ideálne tuhých telies a v časti o pevnosti látok) možno zvoliť pre popis jeho pohybu ľubovoľný bod na ňom, pokiaľ sa hýbe iba priamočiario alebo iba otáča okolo pevnej osi, alebo dva či tri body na telese pre prípad, že sa zároveň točí v rovine alebo priestore. V kažom prípade, z hľadiska dynamiky je opäť dôležitou vlastnosťou jeho hmotnosť, a ako neskôr uvidíme, aj jej priestorové rozloženie v objeme telesa.

2.2 Newtonove pohybové zákony

2.2.1 1. Newtonov zákon

1. Newtonov zákon, alebo tiež zákon zotrvačnosti, je formulovaný nasledovne: ak na telesá nepôsobia žiadne externé podnety, tak zotrvávajú v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe vzhľadom na ľubovoľnú *inerciálnu sústavu súradníc*. Pod inerciálnou sústavou súradníc pritom rozumieme také súradnice, v ktorých je matematická formulácia fyzikálnych zákonov najjednoduchšia. Rýchlosťou telesa rozumieme v tomto prípade rýchlosť ktoréhokoľvek bodu nachádzajúceho sa na ňom. Z praktického hľadiska, pre pohyb v rámci našej slnečnej sústavy je pre toto vhodná sústava pevne spojená so vzdialenými hviezdami, pri riešení krátkodobého pohybu na zemskom povrchu postačuje uvažovať aj sústavu pevne spojenú so Zemou.

V zdanlivom rozpore s vyššie povedaným, ľudská skúsenosť skôr napovedá, že telesá, na ktoré zdanlivo nič nepôsobí, sa spomaľujú až zastanú. Máme skúsenosť, že na to, aby sa niečo hýbalo konštantnou rýchlosťou, napríklad auto, musíme naň pôsobiť konštantnou silou. No toto je už prejav pôsobenia trecích síl, ktoré sprostredkuje kontakt telesa s podložkou a/alebo vzduchom, a ktoré budú diskutované neskoršie. V rôznych špeciálnych experimentoch, napríklad redukovaním trenia vzduchovým vankúšom alebo magnetickým levitovaním, môžeme vonkajšie podnety pôsobiace na teleso do veľkej miery eliminovať, a demonštrovať oprávnenosť postulovania takéhoto zákona.

Matematicky možno zákon zotrvačnosti zapísať pomocou nulovej zmeny vektora rýchlosti,

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \vec{a}(t) = 0, \quad (2.4)$$

pričom toto platí pre ľubovoľný bod uvažovaného telesa.

2.2.2 2. Newtonov zákon

Ak sa vektor rýchlosti vybraného bodu na telese mení, t.j. opak situácie z 1. Newtonovho zákona, potom hovoríme že, na teleso pôsobí nenulová sila.

Pojem sily má intuitívny základ v námahe, ktorú vyvíjame, či bolesti, ktorú pociťujeme, keď pôsobíme na veci okolo seba. Presnejšie to možno charakterizovať zaradením pružného telesa, napríklad pružiny, priamo medzi nás a teleso, na ktoré pôsobíme. Kvantitatívne možno meranie sily zaviesť nasledovne: vyberieme si jednu referenčnú pružinu a sily budeme merať tak, že zadáme nakoľko sa daná referenčná pružina stlačila alebo natiahla. Týmto by sme hovorili napríklad o sile 5cm “stlačenia” alebo 10cm “stlačenia” a podobne. Na tomto princípe je založený klasický silomer, aj keď fyzikálnou jednotkou sily sa nestali “centimetre stlačenia”, lebo presnosť takéhoto zavedenia nie je postačujúca. Uvedomme si, že táto predstava v sebe prináša aj to, že sila pôsobí v nejakom konkrétnom mieste telesa, ktorý nazývame *pôsobiskom sily*.

Fyzikálna jednotka sily je definovaná pomocou pohybového účinky sily na teleso. Pre jednoduchosť budeme uvažovať teleso, ktoré možno považovať za hmotný bod, kde pôsobisko sily je totožné s polohovým vektorom hmotného bodu.

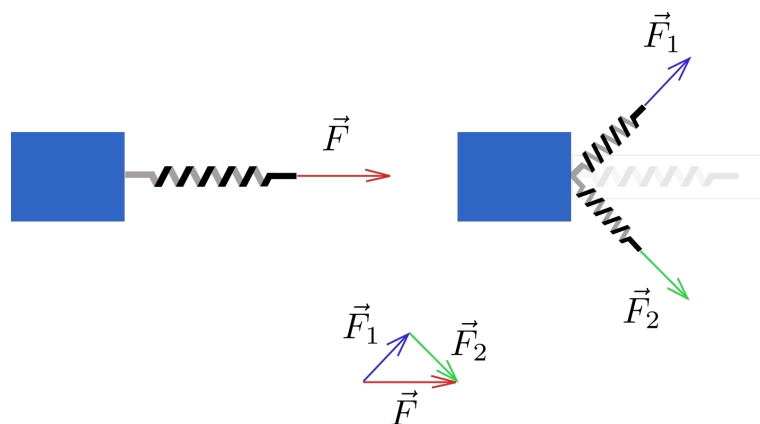
V prvom rade, experimentálne sa ukazuje, že čím je väčšia sila (t.j. stlačenie našej referenčnej pružiny), tým je väčšie aj zrýchlenie. Druhé dôležité experimentálne pozorovanie je, že na telesá rôznej hmotnosti je pohybový účinok rovnako veľkej sily rôzny. Napríklad teleso s dvakrát väčšou hmotnosťou bude mať dvakrát menšie zrýchlenie. Z týchto dvoch pozorovaní vyplýva, že pre veľkosti sily a zrýchlenia musí platiť

$$F = \frac{1}{k}ma, \quad (2.5)$$

kde k je konštanta závisiaca od voľby jednotiek merania sily, t.j. od referenčnej pružiny. No pretože jednotky zrýchlenia aj hmotnosti sme si už dobre zadefinovali, poskytuje táto rovnica možnosť definície jednotiek sily nasledovne: Ak na teleso s hmotnosťou $m = 1\text{kg}$ pôsobí sila $F = 1\text{Newton}$, potom jeho zrýchlenie bude $a = 1\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, t.j.

$$1\text{N} = 1\text{kg}\cdot 1\text{m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (2.6)$$

S touto voľbou je v rovnici (2.5) konštanta $k = 1$, a o jednotke Newton hovoríme, že je odvodenou jednotkou od jednotiek hmotnosti, dĺžky a času.



Obr. 35: Sila je vektorovou veličinou, o čom sa možno presvedčiť, ak v experimente nahradíme pôsobenie jednej sily dvoma rôzne orientovanými silami, pričom pohybový účinok je v oboch prípadoch rovnaký.

Príklad: Koľko Newtonov je 1cm “stlačenia” špecifickej pružiny pre ktorú vieme, že vozík s hmotnosťou $m = 25\text{kg}$ sa pri pôsobení sily 10cm “stlačenia” rozbieha so zrýchlením $0,5\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Riešenie Nájdem konštantu k zo zákona sily pre túto pružinu,

$$F = kma \quad (2.7)$$

$$10\text{cm“stlačenia”} = \frac{1}{k} 25\text{kg} \cdot 0,5\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \quad (2.8)$$

$$10\text{cm“stlačenia”} = \frac{1}{k} 12,5\cdot\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \quad (2.9)$$

$$k = 1,25\text{N}\cdot(\text{cm“stlačenia”})^{-1}. \quad (2.10)$$

Ak by sme pôsobili silou 1N , potom $ma = 1\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ a potrebná sila v cm “stlačenia” bude

$$F = \frac{1}{k} \cdot 1\text{N} = 0,8\text{cm“stlačenia”}. \quad (2.11)$$

Silové pôsobenie má podobne ako vektor zrýchlenia smerový charakter a presne stanovené miesto jeho pôsobenia - polohový vektor pôsobiska sily. Že ide skutočne o vektor, t.j. že sily pôsobiace v rôznych smeroch v tom

istom pôsobisku sa spočítavajú po zložkách, ako sme si uviedli v kapitole o vektoroch, sa možno presvedčiť opäť experimentálne pomocou silomerov (Obr. 35). Smer sily je teda zavedený ako smer zrýchlenia ktoré telesu táto sila udelí. Vzhľadom na tieto pozorovania 2. Newtonov zákon sily nadobúda tvar

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.12)$$

Táto rovnica nám hovorí:

1. veľkosť zrýchlenia hmotného bodu prenášobená jeho hmotnosťou sa rovná veľkosti sily, ktorá v tomto bode pôsobí, $m|\vec{a}| = |\vec{F}|$.
2. smer udeleného zrýchlenia sa rovná smeru pôsobiacej sily; ak si označíme ako jednotkový vektor smeru zrýchlenia vektor \vec{e}_a a jednotkový vektor smeru pôsobenia sily \vec{e}_F , t.j. $\vec{a} = a\vec{e}_a$ a $\vec{F} = F\vec{e}_F$ potom bude platiť

$$\vec{e}_a = \vec{e}_F \quad (2.13)$$

3. V technickom aj prírodovednom zápise veľmi často na pravú stranu rovnice píšeme “príčinu” a na ľavej strane rovnice jej “dôsledok”. Takto to chápeme aj pri zápise zákona sily: príčina je silové pôsobenie a dôsledok je zmena pohybového stavu, zrýchlenie.
4. pri výpočtoch ako sa bude teleso pohybovať musíme vždy vychádzať z tejto rovnice, preto sa často nazýva aj *pohybová rovnica hmotného bodu*.

2.2.3 3. Newtonov zákon

Druhý Newtonov zákon hovorí len o pôsobení síl na jedno teleso - hmotný bod, a o výslednej zmene jeho pohybového stavu. Tretí zákon, známy tiež ako zákon akcie a reakcie, hovorí o charaktere vzájomného pôsobenia dvoch telies na seba. Tvrdí, že silové pôsobenie medzi dvomi telesami je vždy vzájomné: ak teleso A pôsobí silou \vec{F} na teleso B, potom aj teleso B pôsobí na teleso A silou $-\vec{F}$.

Príklad: Sily zviazané 3. Newtonovým zákonom možno demonštrovať na dopade telesa na plastickú podložku, napr. kovovej guľičky do plastelíny. Na jednej strane, guľička pôsobí silou na plastelínu, čo sa prejaví napríklad jej

deformáciou, no zároveň, plastelína pôsobí na guľičku silou opačne orientovanou čo sa prejaví s jej zbrzdením - zmenou pohybového stavu. Hoci tieto dve sily sú časovo premenné (s typicky veľko krátkym okamihom keď sú nenulové - počas nárazu), predsa sú v každom okamihu času previazané 3. Newtonovým zákonom - rovnako veľké a opačne orientované.

Príklad: Máme dve rôzne pružiny. Na pružinu pôsobíme na jej pravom konci kompresnou silou, jej ľavý koniec je pevne uchytený na stene. Prvá sa pri pôsobení sily 5N stlačí o 2,5cm, druhá sa stlačí o tú istú vzdialenosť pri pôsobení 7,5N. Ak spojíme pružiny za sebou do jednej, dlhej pružiny, o koľko sa tieto dve pružiny natiahnu pri pôsobení silou 10N?

Riešenie: Už pri diskusii o meraní sily pružinou sme sa stretli so vzťahom medzi stlačením pružiny a silou, ktorou je ňu pôsobené,

$$F = k\Delta l, \quad (2.14)$$

kde k charakterizuje tuhosť pružiny a Δl jej predĺženie. Jeho použitím pre pružiny nájdeme konštanty k_1 a k_2 ,

$$k_1 = \frac{5}{2,5} \text{N/cm} = 2 \text{N/cm}, k_2 = \frac{7,5}{2,5} \text{N/cm} = 3 \text{N/cm}. \quad (2.15)$$

Po spojení pružín pôsobia v mieste ich spoju dve sily, \vec{F}_1 a \vec{F}_2 , zviazané podľa 3. zákona (Obr. 36). Sila $F = 10\text{N}$ predstavuje vonkajšie pôsobenie na pravú pružinu. Ďalej použijeme 1. Newtonov zákon: Pretože pravá pružina v pokoji (nehýbe sa), musí byť celkový súčet síl na ňu pôsobiaci rovný nula. Okrem sily \vec{F} pôsobí na túto pružinu už len sila \vec{F}_2 a preto musí platiť,

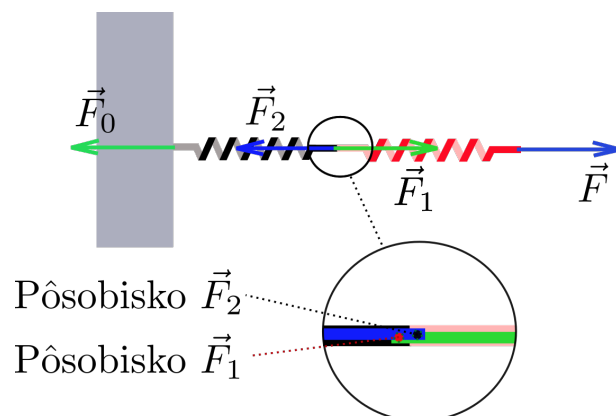
$$\vec{F} + \vec{F}_2 = 0 \rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F} \quad (2.16)$$

Z 3. zákona vieme, že sila pôsobiaca na ľavú pružinu, \vec{F}_1 je zviazaná s pôsobením ľavej pružiny na pravú, silou \vec{F}_2 a tak nachádzame aj tretiu silu v našom probléme,

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}. \quad (2.17)$$

Nakoniec silu \vec{F}_0 , ktorou pôsobí stena na ľavú pružinu pretože tento koniec je na stene uchytený, nájdeme opäť použitím 1. Newtonovho zákona na ľavú pružinu - keďže je v pokoji tak musí platiť

$$\vec{F}_0 + \vec{F}_1 = 0 \rightarrow \vec{F}_0 = -\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = -\vec{F}. \quad (2.18)$$



Obr. 36: Zelené šípky označujú sily pôsobiace na ľavú pružinu, modré šípky sily pôsobiace na pravú pružinu. Sily \vec{F}_1 a \vec{F}_2 predstavujú príklad síl zviazaných 3. Newtonovým zákonom. Pretože tieto dve sily pôsobia na dve rôzne pružiny, ich pôsobiská sú mierne posunuté, ako je to zobrazené na zväčšenom vyobrazení kontaktu. Vertikálny posun šípok je len pre ich viditeľnosť, v skutočnosti je vertikálny posun medzi pôsobiskami týchto síl nulový.

Vidíme teda, že každá časť spojenej pružiny je napínaná rovnakou silou 10N a preto ich predĺženia dostaneme pomocou jednotlivých konštánt tuhosti,

$$\delta l_1 = \frac{F}{k_1} = \frac{10}{2} \text{cm} = 5 \text{cm}, \quad (2.19)$$

$$\delta l_2 = \frac{F}{k_2} = \frac{10}{3} \text{cm} = 3,33 \text{cm} \quad (2.20)$$

a celkové predĺženie pružiny bude teda

$$\delta l = \delta l_1 + \delta l_2 = 8,33 \text{cm}. \quad (2.21)$$

Na koniec získame aj všeobecnejší výsledok pre predĺženie používaním len symbolických úprav,

$$\delta l = \delta l_1 + \delta l_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) F \quad (2.22)$$

$$= \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} F = \frac{F}{k_{eff}}, \quad (2.23)$$

kde sme našli, že sériové pružiny sa správajú ako jedna pružina s efektívnou tuhosťou

$$k_{eff} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \quad (2.24)$$

2.3 Fyzikálne sily

2.3.1 Úvod

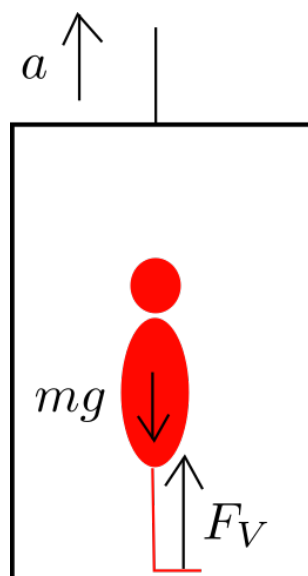
Na pravej strane pohybovej rovnice hmotného bodu (2.12) vystupuje celková sila, ktorá na tento hmotný bod pôsobí. Ak chceme predpovedať aký bude pohyb, musíme tieto sily poznať. Vo fyzike poznáme štyri druhy síl: gravitačné, elektromagnetické, silné a slabé. Sily silné a slabé sú doménou fyziky atómových jadier a elementárnych častíc. Sú krátkodosahové, pri vzdialenostiach väčších ako 10^{-15}m od častice je ich vplyv zanedbateľný. Gravitačné sily sú naopak ďalekodosahové a predstavujú silové pôsobenie medzi ktoroukoľvek látkou s nenulovou hmotnosťou. Klasickému popisu gravitačných síl sa budeme venovať v kapitole 3. Nakoniec elektromagnetické sily predstavujú sily vznikajúce a pôsobiace na elektrický náboj či už statický alebo v pohybe. Tieto sa prejavujú okrem priamych prejavov s magnetmi či makroskopicky nabitými telesami aj ako trecie sily, sily reakcií medzi dotýkajúcimi sa telesami. Pre ich popis používame rôzne efektívne modely, s ktorými sa nižšie oboznámime. Detailný popis elektromagnetického silového pôsobenia vychádza z Maxwellových rovníc pre elektrické a magnetické polia a tvar Lorentzovej sily pôsobiacej na pohybujúcu sa časticu s nábojom v takomto poli. Základom popisu elektromagnetického poľa sa budeme venovať v rámci iného predmetu (Elektrina a magnetizmus).

2.3.2 Gravitačná sila v homogénnom poli

Pre bežné problémy pohybu telies, pokiaľ prejdená dráha je malá v porovnaní s polomerom Zeme, môžeme gravitačnú silu pôsobiacu na vybrané teleso považovať za nemennú. Kdekoľvek sa teleso nachádza, pôsobí smerom “nadol” a jej veľkosť závisí lineárne od hmotnosti telesa m ,

$$F = mg, \tag{2.25}$$

kde $g = 9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ nazývame gravitačné zrýchlenie. Bližšie k pôvodu tejto hodnoty ako aj oblasti platnosti predpokladu homogénneho poľa sa vrátíme v kapitole o Newtonovom gravitačnom zákone.



Obr. 37: Na človeka vo výťahu, idúceho smerom hore so zrýchlením a pôsobí okrem gravitačnej sily aj kontaktná sila od výťahu F_V .

Príklad: Vo výťahu stojí človek s hmotnosťou 100kg. Výťah má pri rozbehu smerom nahor zrýchlenie $0,8\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Akou veľkou silou pôsobí výťah na človeka?

Riešenie: Na porozumenie situácie sa pozrieme na človeka ako na hmotný bod a použijeme preň pohybovú rovnicu. Na človeka pôsobí gravitačná sila, pretože má hmotnosť m . Okrem toho, pretože *stojí* vo výťahu, jeho zrýchlenie je rovnaké ako zrýchlenie výťahu (Podľa 2. Newtonovho zákona opisujeme pohyb vzhľadom na inerciálnu sústavu, t.j. vonkajšok, a nie vzhľadom na výťah, ktorý inerciálnou sústavou nie je, a vzhľadom na ktorý je človek v zdanlivom pokoji.). Na človeka musí pôsobiť aj sila od výťahu, ktorú si označíme ako F_V (Obr. 37). Za kladný smer vektorov si zvolíme smer vertikálne hore a preto gravitačná sila má záporné znamienko - pôsobí opačne. Pohybová rovnica pre človeka bude potom

$$ma = F_V - mg \quad (2.26)$$

Jediná neznáma je veľkosť sily od výťahu, ktorú nájdeme úpravou,

$$F_V = ma + mg = m(a + g) = 100 \cdot (9,81 + 0,8)\text{N} = 1061\text{N}. \quad (2.27)$$

2.3.3 Sila od pružiny a kontaktné sily

Pri zavádzaní pojmu sily sme sa stretli s pružinou, pomocou ktorej možno merať veľkosť sily odmeraním veľkosti jej stlačenia/natiahnutia. Predpokladali sme, že veľkosť sily ktorou je napínaná narastá lineárne s jej predĺžením,

$$F = k\Delta l, \quad (2.28)$$

kde k je konštanta tuhosti pružiny. Orientácia sily, ktorou pôsobí natiahnutá pružina na telesá v kontakte s ňou je taká, aby sa pružina skracovala do svojho uvoľneného stavu.

Reálne pružiny majú túto závislosť lineárnu len pre veľmi malé predĺženia, po tzv. *medzu pružnosti*, následne zvykne sila potrebná na ďalšie predĺženie prudšie narastať, môže dochádzať aj k trvalému predĺženiu (vyrovnávanie pružiny), a pokiaľ sme stále schopný navyšovať silu, nakoniec prideme po *medzu pevnosti*, kedy sa pružina pretrhne.

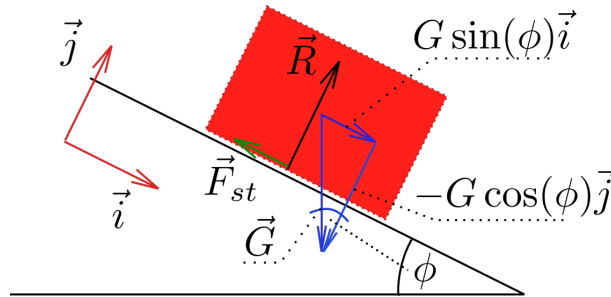
Popis tejto sily vzťahom (2.28) predstavuje efektívny model a platí len pre dostatočne malé predĺženia. Jej fyzikálna podstata je v elektrických silách pôsobiacich medzi atómami, z ktorých sa pružina skladá. V stlačennom alebo natiahnutom stave sú atómy vychýlené z rovnovážneho stavu a výsledná sila pružiny je prejavom ich snahy dostať sa späť.

Kontaktné sily, s ktorými sa stretávame pri riešení problémov, kde sa dve telesá dotýkajú, majú rovnakú fyzikálnu povahu ako sila od pružiny. Pri riešení *predpokladáme*, že telesá sa dotýkajú. Toto obmedzuje možnosti nezávislej zmeny ich súradníc, z čoho vychádza potrebná veľkosť reakčnej sily, ako sme videli v príklade výpočtu veľkosti sily, ktorou pôsobí rozbiehajúci výťah na človeka. Jej “nastavenie” na práve takúto veľkosť môžeme chápať aj tak, že v mieste kontaktu sa materiál mikroskopicky zdeformuje o malinkú vzdialenosť Δl , čo pri veľkej tuhosti materiálu ľahko vytvorí potrebnú veľkosť reakčnej sily v kontakte.

2.3.4 Trecie sily

Trenie spôsobuje spomaľovanie pohybu a preto, podľa 2. Newtonovho zákona, musí byť spojené s pôsobením síl. Výpočet týchto síl robíme pomocou modelov, ktoré sú použiteľné len v určitých situáciách. V nasledujúcom si preberieme štyri modely, s ktorými sa pri riešení technických úloh bežne stretávame.

Statické trenie Predstavme si, že na stôl položíme kváder a ten chceme následne po stole posunúť. Na začiatok, ak zatlačíme na kváder len málo, kváder sa nepohne. Musíme vynaložiť *minimálnu silu*, aby sa kváder začal hýbať. Experimentálne sa našlo, že veľkosť tejto sily je priamo úmerná sile



Obr. 38: Zobrazenie síl pôsobiacich na kváder na naklonenej rovine v zodpovedajúcich pôsobiskách. Gravitačná sila \vec{G} je rozložená na zložky v smere rovnobežnom s rovinou ($\vec{G} \sin(\phi)$) a zložku v smere kolmom na rovinu ($-G \cos(\phi)$). Jednotkové vektory \vec{i} a \vec{j} indikujú kladné smery narastania osí \hat{x} a \hat{y} .

akou pôsobí kváder na podložku (alebo podložka na kváder, nakoľko tieto dve sily sú rovnako veľké podľa 3. Newtonovho zákona). Koeficient úmernosti sa nazýva *koeficient statického trenia* a budeme ho označovať symbolom μ_{st} . Veľkosť minimálnej sily, ktorou treba pôsobiť aby sa dve telesá pritláčaných k sebe silou R začali po sebe šmýkať, nájdeme teda zo vzťahu

$$F_{st} = \mu_{st} R. \quad (2.29)$$

Orientácia tejto sily pôsobí proti smeru pôsobenia vonkajšej sily, kým sila R pôsobí kolmo na tento smer.

Príklad: Hliníkový kváder je položený na hliníkovej podložke, ktorej uhol vzhľadom k horizontálnemu smeru postupne zvyšujeme. Pri akom naklonení podložky sa kváder začne kĺzať, ak koeficient statického trenia medzi ním a podložkou je $\mu_{st} = 1$? Aká veľká je táto sila, ak kváder má hmotnosť 1kg?

Riešenie: V prvom kroku si označíme všetky sily, ktoré v probléme vystupujú. Okrem gravitačnej sily \vec{G} , na kváder pôsobí aj podložka silou reakcie \vec{R} , ktorá zabezpečuje, že teleso nemôže vojsť “do” podložky, a trecia sila \vec{F}_{st} , ktorá zabezpečí, že teleso sa nešmýka po podložke. Ak je kváder v pokoji, potom súčet všetkých týchto síl musí byť nula

$$\vec{G} + \vec{R} + \vec{F}_{st} = 0. \quad (2.30)$$

Túto rovnicu si napíšeme do zložiek vo vhodne zvolenom súradnicovom systéme. Ten si vyberieme tak, že os \hat{x} bude rovnobežná s podložkou a orientovaná v smere potenciálneho pohybu kvádra a os \hat{y} bude ňu kolmá (Obr. 38)

V tomto súradnicovom systéme majú uvedené sily nasledovný tvar:

$$\vec{R} = R\vec{j} \quad (2.31)$$

$$\vec{F}_{st} = -\mu_{st}R\vec{i} \quad (2.32)$$

$$\vec{G} = mg \left(\sin(\phi)\vec{i} - \cos(\phi)\vec{j} \right), \quad (2.33)$$

kde pre zápis gravitačnej sily sme použili rozklad jednotkového vektora smeru jej pôsobenia podľa rovnice (1.69), ale so záporným znamienkom pri y -ovej súradnici, kvôli voľbe súradníc a voľbe uhlu medzi podložkou a horizontálnou rovinou (Obr. 38).

Po dosadení týchto vzťahov do (2.30) a preskupení členov podľa jednotkových vektorov dostaneme

$$(mg \sin(\phi) - \mu_{st}R)\vec{i} + (-mg \cos(\phi) + R)\vec{j} = 0 \quad (2.34)$$

Aby táto vektorová rovnica platila, musí sa každá jej zložka rovnať nule, t.j. nájdeme dve rovnice¹¹,

$$mg \sin(\phi) - \mu_{st}R = 0 \quad (2.35)$$

$$-mg \cos(\phi) + R = 0 \quad (2.36)$$

pre dve neznáme - silu reakcie R a hraničný uhol ϕ , pri ktorom sa kváder ešte nešmykne. Riešením nájdeme

$$\tan(\phi) = \mu_{st}, \rightarrow \phi = \pi/4, \quad (2.37)$$

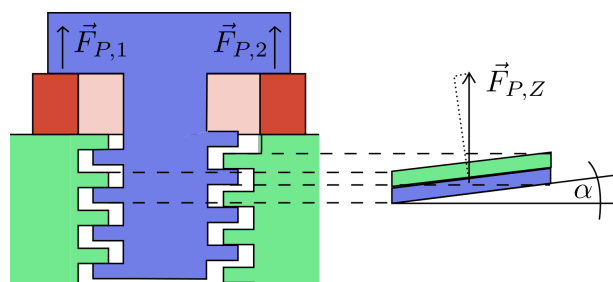
$$R = mg \cos(\phi) = \frac{mg \cos(\phi)}{\sqrt{\sin(\phi)^2 + \cos(\phi)^2}} \quad (2.38)$$

$$= \frac{mg}{\sqrt{1 + \tan(\phi)^2}} = \frac{mg}{1 + \mu_{st}^2} \approx 5\text{N}. \quad (2.39)$$

A teda pre maximálnu statickú treciu silu, ktorú tento kontakt dokáže vyvinúť nájdeme

$$F_{st} = \mu_{st}R = \frac{\mu_{st}mg}{1 + \mu_{st}^2} = 5\text{N}. \quad (2.40)$$

¹¹ Alternatívny a trochu formálnejší postup by bol ich získanie skalárnym prenásobením tejto vektorovej rovnice s \vec{i} a \vec{j} .



Obr. 39: Podložka (červená) je zdeformovaná, a v snahe vrátiť sa do pôvodného rozmeru tlačí na skrutku silami $\vec{F}_{P,i}$. Tieto prenášajú svoje pôsobenie na kontakt v závine, s príspevkom $\vec{F}_{P,Z}$ na jeden závit.

Úloha: Ukážte, že podmienka

$$\mu_{st} > \tan(\alpha) \quad (2.41)$$

predstavuje kritérium, aby sa závit sám nevytáčať (Obr. 39).

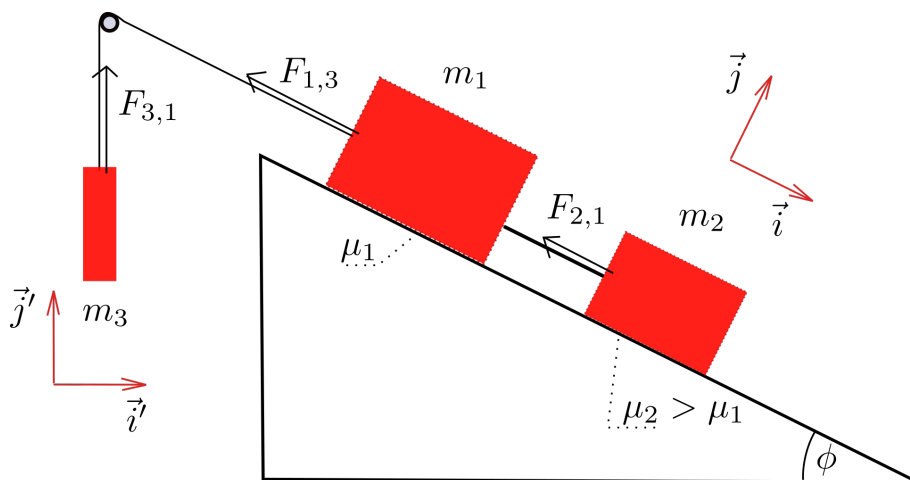
Šmykové trenie zodpovedá podobne ako statické trenie rovinnému kontaktu medzi dvoma telesami, no v tomto prípade sú v pohybe a v rámci tohto modelu je táto sila rovnaká nezávisle od ich vzájomnej rýchlosti, pokiaľ nie je nulová, kedy nastupuje statické trenie. Veľkosť sily je tiež úmerná veľkosti sily, ktorou sú telesá k sebe pritláčané (R),

$$F = \mu R \quad (2.42)$$

kde koeficient úmernosti μ je pre identické kombinácie materiálov typicky menší ako ich koeficient statického trenia. Orientácie síl reakcie a tretej sily sú rovnaké ako v prípade statického trenia.

Prehľad typických hodnôt oboch koeficientov trenia nájdeme v tabuľke na Wikipédii.

Príklad: Akým zrýchlením sa bude pohybovať sústava kvádrov pospájaná lankami zobrazená na obr. ??, ak kvádre sú z rôzneho materiálu, a teda ich koeficienty trenia sú rôzne? Zaznačte všetky sily, ktoré pôsobia na všetky tri kvádre do obrázku! Ak je $\mu_2 > \mu_1$, aké je kritérium pre hmotnosť m_3 , aby



Obr. 40: Dva kvádre z rôzneho materiálu na naklonenej rovine sú brzdené v pohybe dole trením a protizávažou m_3 .

bolo lanko medzi prvým a druhým kvádom napnuté? Hmotnosti kvádrov, koeficienty trenia aj uhol naklonenia považujte za známe. Hmotnosť laniek, ako aj kladky medzi telesami 2 a 3 zanedbajte.

Riešenie: Základ úspešného riešenia tejto úlohy je označenie všetkých pôsobiacich síl: tiažových m_1g, m_2g a m_3 , síl reakcií od podložky na teleso 1 a 2, trecích síl na telesá 1 a 2 a síl prenášaných lanom.

Pre pohybovú rovnicu pre 1. a 2. teleso zvolíme súradnicovú sústavu danú s \vec{i}, \vec{j} , pre popis 3. telesa sústavu \vec{i}', \vec{j}' .

Pri popise predpokladáme, že všetky majú rovnako veľké zrýchlenie a v smere \vec{i} pre 1 a 2 a v smere \vec{j}' pre 3.

Výsledné pohybové rovnice v smere pohybu telies sú:

$$m_1 a = m_1 g \sin(\phi) - \mu_1 m_1 g \cos(\phi) - F_{1,3} + F_{2,1} \quad (2.43)$$

$$m_2 a = m_2 g \sin(\phi) - \mu_2 m_2 g \cos(\phi) - F_{2,1} \quad (2.44)$$

$$m_3 a = F_{1,3} - m_3 g \quad (2.45)$$

Spočítaním všetkých rovníc dokopy sa zbavíme všetkých síl pôsobiacich vzájomne medzi telesami a zároveň dostaneme zrýchlenie,

$$a = \frac{1}{M} (((m_1 + m_2) \sin(\phi) - m_3)g - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)g \cos(\phi)) \quad (2.46)$$

Aby bolo lanko medzi 1 a 2 napnuté, musí platiť,

$$F_{2,1} > 0 \quad (2.47)$$

Dosadením výsledného zrýchlenia do pohybovej rovnice pre 2 po dlhšej úprave nájdeme

$$m_3 > m_1(\mu_2 - \mu_1) \cos(\phi) \quad (2.48)$$

Stokesovo trenie v prostredí Pri pohybe telies v kvapalinách a plynoch malými rýchlosťami tak, že obtekanie okolo nich je laminárne, dochádza k brzdeniu telies silou, ktorá je úmerná rýchlosti telesa vzhľadom na túto kvapalinu,

$$\vec{F} = -\gamma\vec{v} \quad (2.49)$$

Koeficient úmernosti γ sa najčastejšie určuje experimentálne - meraním. Pre teleso v tvare gule ho možno vyjadriť aj analyticky pomocou Stokesovho vzťahu

$$\gamma = 6\pi\eta R, \quad (2.50)$$

kde η je dynamická viskozita prostredia a R polomer guľičky. Dynamická viskozita je miera nakoľko sa vrstvy tekutín pri prúdení rôznou rýchlosťou navzájom strhávajú. Prehľad hodnôt viskozity rôznych tekutín nájdeme napríklad v tabuľkách na Wikipédii.

Ako bolo uvedené, tento lineárny model trenia platí len pri laminárnom prúdení okolo pohybujúceho sa telesa. Kritérium, či prúdenie je laminárnym je hodnota *Reynoldsovho čísla*,

$$\text{Re} = \frac{lv\rho}{\eta} \quad (2.51)$$

kde l je charakteristický rozmer telesa, napr. pre guľku jej priemer, v je rýchlosť prúdenia alebo rýchlosť telesa voči tekutine, ρ je hustota tekutiny a η jej dynamická viskozita. Reynoldsovo číslo, ako napovedá jeho názov, je bezrozmerné a v tom zmysle univerzálne pre daný typ prúdenia. Prúdenie okolo telesa približne guľovitého tvaru vykazuje laminárny charakter ak je splnené kritérium $\text{Re} < 2300$.

Príklad: Kvapky vody v oblakoch majú priemer približne $10\mu\text{m}$. Akou rýchlosťou padajú k zemi? Viskozita vzduchu pri teplote -25°C je $1,5 \cdot 10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

Riešenie: Ak predpokladáme, že kvapky padajú *konštantnou* rýchlosťou, potom súčet všetkých síl, ktoré na kvapku pôsobia, musí byť podľa 2. Newtonovho zákona nulový. Na kvapku pôsobí gravitačná sila smerom dole, sila Stokesovho trenia smerom proti pohybu a ich súčet musí byť nulový

$$mg - 6\pi\eta Rv = 0 \quad (2.52)$$

Hmotnosť kvapky si vyjadríme pomocou jej hustoty (voda) a objemu (guľa), $m = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$, a po dosadení a úprave nájdeme

$$v = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3 g}{6\pi\eta R} = \frac{2\rho g R^2}{9\eta} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot (5 \cdot 10^{-6})^2}{9 \cdot 1,5 \cdot 10^{-5}} = 3,7 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1} \quad (2.53)$$

Takouto malinkou rýchlosťou by padali oblaky v úplnom bezvetrí. Napríklad o 1m by poklesli za

$$t = \frac{l}{v} = \frac{1000 \text{ mm}}{3,7 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}} = 270 \text{ s} = 4,5 \text{ min} . \quad (2.54)$$

Toto vysvetľuje, prečo oblaky zdanlivo vôbec nepadajú.

Nakoniec si overíme, či prúdenie vzduchu (pri teplote -25°C má hustotu asi $\rho_{air} \approx 1,35 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) okolo kvapôčky možno považovať za laminárne výpočtom jeho Reynoldsovho čísla:

$$\text{Re} = \frac{2Rv\rho_{air}}{\eta} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 3,7 \cdot 10^{-3} \cdot 1,35}{1,5 \cdot 10^{-5}} = 3,3 \cdot 10^{-3}, \quad (2.55)$$

šesť rádov menej ako kritérium laminárnosti, 2300. Obtekanie kvapôčiek vzduchom je teda bezpečne laminárne.

Aerodynamické trenie V prípadoch, keď je pre študovaný pohyb $\text{Re} > 2300$, prúdenie okolo pohybujúceho sa telesa nemožno považovať za laminárne. Miesto pojmu trecej sily sa skôr používa názov sila aerodynamického odporu, a vyjadruje sa pomocou koeficientu aerodynamického odporu c_d (z anglického “drag coefficient”)

$$F = \frac{1}{2}\rho S c_d v^2, \quad (2.56)$$

kde ρ je hustota tekutiny (prostredia), S je efektívna plocha prierezu telesa kolmá na smer pohybu a v je rýchlosť telesa v prostredí. Koeficient aerodynamického odporu možno považovať za konštantu pre daný tvar telesa len pre

rýchlosti z určitého intervalu, pre malé rýchlosti jeho hodnota klesá s narastajúcou rýchlosťou čo súvisí s prechodom k Stokesovemu (lineárnemu) treniu ¹². Pre rýchlosti, kde je tento koeficient konštantný, je trecia sila úmerná druhej mocnine rýchlosti, t.j. s narastajúcou rýchlosťou prudko rastie.

Príklad: Na akej rýchlosti sa ustáli cyklista pri pustení sa z kopca s 10% klesaním, ak jeho hmotnosť je 80kg a efektívny prierez je 0,65m²? Koeficient aerodynamického odporu cyklistu je asi $c_d = 1,0$. Hustota vzduchu je pri 15°C je asi $\rho = 1,23\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Riešenie: 10% klesanie znamená, že pomer vertikálneho prevýšenia a horizontálnej vzdialenosti je 0,1. Z toho pre uhol medzi cestou a horizontálnou rovinou máme

$$\tan(\phi) = \frac{1}{10}, \rightarrow \phi = \arctan(1/10) \approx 0,1. \quad (2.57)$$

V zadaní sa nehovorí nič o trení v ložiskách či valivom trení kolies, ale tieto príspevky budú v tomto prípade aj tak zanedbateľne malé, sústredíme sa len na silu aerodynamického odporu, gravitačnú silu a silu reakcie od cesty, ktoré sú dôležité. Podobne ako v príklade o statickom trení, aj tu treba rozložiť sily na zložky. Nulovosť súčtu zložiek síl v smere rovnobežnom s cestou nakoniec dá

$$mg \sin(\phi) - \frac{1}{2}\rho S c_d v^2 = 0 \quad (2.58)$$

z ktorej si vyjadríme ustálenú rýchlosť cyklistu,

$$v = \sqrt{\frac{2mg \sin(\phi)}{\rho S c_d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \cdot 9,81 \cdot \sin(0,1)}{1,23 \cdot 0,65 \cdot 1}} = 14\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \approx 50,4\text{km}/\text{hod}. \quad (2.59)$$

Pre porovnanie, Reynoldsovo číslo pre pohyb cyklistu vychádza,

$$\text{Re} = \frac{2\sqrt{S}v\rho_{air}}{\eta} = \frac{2 \cdot 0,8 \cdot (50/3,6) \cdot 1,23}{1,5 \cdot 10^{-5}} \approx 2 \cdot 10^6, \quad (2.60)$$

t.j. sme ďaleko nad 2300, a teda v turbulentnom režime.

¹²https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Drag_sphere_nasa.svg

Príklad: Časový priebeh poklesu rýchlosti telesa idúceho zotrvačnosťou a brzdeného len aerodynamickým odporom sme našli ešte v príklade netriviálneho spomalenia v kapitole 1.2.6.

2.4 Hybnosť a impulz sily

V tejto kapitole budú zavedené dve nové fyzikálne veličiny - hybnosť hmotného bodu a systému hmotných bodov a impulz sily. Obe veličiny sú užitočné napríklad pri riešení kolízií (zrážok a rozptylu) telies, keď silové pôsobenie medzi telesami trvá len konečný čas a nás zaujíma koncový a počiatočný stav, nie detaily zrážky.

Hybnosť hmotného bodu je súčin jeho hmotnosti a rýchlosti,

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.61)$$

Hybnosť je vektorová veličina s fyzikálnou jednotou $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, ktorej orientácia je totožná s vektorom rýchlosti.

Pomocou hybnosti možno prepísať 2. Newtonov zákon do kompaktného tvaru

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}. \quad (2.62)$$

Ak máme systém viacerých (N) hmotných bodov, ich hybnosťou nazývame vektorový súčet hybností jednotlivých bodov,

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_N\vec{v}_N = \sum_{i=1}^N m_i\vec{v}_i. \quad (2.63)$$

Uvažujme zrážku dvoch telies, napríklad zrážku rýchlejšie a pomalšie pohybujúceho sa vozíka na koľajnici, pričom po zrážke ostanú spojené. Dokážeme nájsť ich výslednú rýchlosť bez toho, aby sme vedeli čokoľvek o tom ako sa spojili, či sa tam stratila nejaká energia a podobne?

Začneme s tým, čo už vieme: pohyb oboch vozíkov popisujeme pomocou 2. Newtonovho zákona,

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}(t) \dots \text{Prvý vozík} \quad (2.64)$$

$$m_2\vec{a}_2 = -\vec{F}(t) \dots \text{Druhý vozík} \quad (2.65)$$

kde $\vec{F}(t)$ je v čase premenlivá sila, ktorou pôsobí druhý vozík na prvý (pribrzdí ho) a $-\vec{F}(t)$ podľa 3. Newtonovho zákona spojená sila, ktorou pôsobí

prvý vozík na druhý (urýchli ho). Pre čas pred aj po zrážke je $F(t) = 0$, a počas zrážky táto sila prudko vzrastie a potom poklesne.

Ak spočítame obe rovnice dokopy a vyjadríme zrýchlenia ako derivácie rýchlostí nájdeme

$$m_1 \frac{d}{dt} \vec{v}_1 + m_2 \frac{d}{dt} \vec{v}_2 = 0 \quad (2.66)$$

z čoho, keďže derivácia je lineárna operácia, máme

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0 \quad (2.67)$$

Výraz v zátvorke je hybnosť sústavy dvoch vozíkov $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, a hoci rýchlosť, a teda hybnosť, každého z nich osamote sa v čase mení počas zrážky, ich súčet je od času nezávislý, lebo jeho derivácia (zmena) je nulová. Napríklad, ak bola rýchlosť vozíkov pred zrážkou $\vec{v}_1 = v_{10} \vec{i}$ a $\vec{v}_2 = v_{20} \vec{i}$, tak pre ich spoločnú rýchlosť po zrážke, \vec{v}_f , máme

$$m_1 v_{10} \vec{i} + m_2 v_{20} \vec{i} = m_1 \vec{v}_f + m_2 \vec{v}_f \quad (2.68)$$

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \vec{i}, \quad (2.69)$$

t.j. ich konečnú rýchlosť vieme nájsť z počiatočných bez znalosti sily pôsobiacej medzi nimi počas zrážky.

Tento výsledok vieme zovšeobecniť pre systém N hmotných bodov do *zákona zachovania hybnosti*: Celková hybnosť N hmotných bodov, medzi ktorými pôsobia ľubovoľné časovo-závislé sily no nepôsobia na ne žiadne vonkajšie sily, sa zachováva.

Zákon zachovania hybnosti nám poskytuje čiastočnú informáciu o dynamike zrážky. Keďže predstavuje jednu vektorovú rovnicu, t.j. tri rovnice - pre každú zložku jedna, dokážeme pomocou neho vyjadriť nanajvýš tri neznáme veličiny, napríklad koncovú rýchlosť jedného hmotného bodu po zrážke.

Príklad: Do vozíka s hmotnosťou $m_1 = 200\text{g}$ stojaceho na vzduchovej dráhe narazil druhý vozík s hmotnosťou $m_2 = 50\text{g}$ rýchlosťou $v_2 = 1\text{m/s}$ a po zrážke postupoval opačným smerom ako šiel pred zrážkou. Nájdite spodné ohraničenie pre veľkosť rýchlosti vozíka s hmotnosťou m_1 po zrážke.

Riešenie: Vzduchová dráha zabezpečuje zanedbateľne malé trenie vozíkov a výsledná sila pôsobiaca na vozíky je len ich vzájomné pôsobenie pri zrážke. Môžeme teda použiť zákon zachovania hybnosti pre smer pozdĺž dráhy:

$$m_1 \cdot 0 + m_2 v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2, \quad (2.70)$$

kde sme si označili rýchlosti vozíkov po zrážke ako u_1 a u_2 . Pre rýchlosť druhého vozíka po zrážke ale platí $u_2 < 0$ a preto

$$m_2 v_2 - m_1 u_1 = m_2 u_2 < 0 \rightarrow u_1 > \frac{m_2}{m_1} v_2 = 0,25 \text{m.s}^{-1}. \quad (2.71)$$

Rýchlosť prvého vozíka po zrážke bude minimálne $0,25 \text{m.s}^{-1}$.

Impulz sily sa rovná zmene hybnosti jedného hmotného bodu pred a po zrážke,

$$\vec{I} = \vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_i), \quad (2.72)$$

kde sme zaviedli označenia počiatočného t_i (z angl. *initial*) a konečného t_f (z angl. *final*) času. Nájdeme vyjadrenie pre impulz sily priamo pomocou sily pôsobiacej na hmotný bod. 2. Newtonov zákon zapísaný pomocou hybnosti má tvar

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}. \quad (2.73)$$

Túto rovnicu preintegrujeme podľa času od t_i po t_f a využijeme to, že integrál z derivácie sú navzájom inverzné operácie, rovnica (1.37),

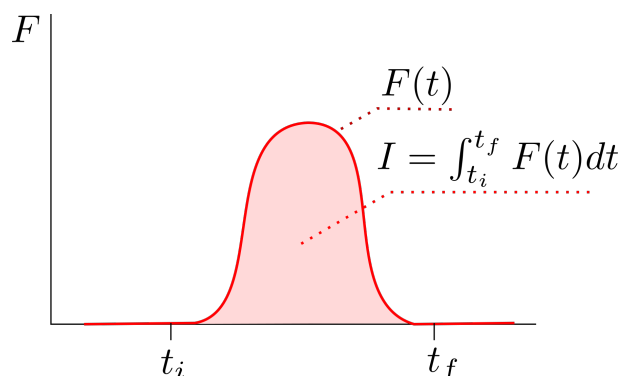
$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt, \quad (2.74)$$

$$\vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt. \quad (2.75)$$

Vidíme teda, že *impulz sily je integrál zo sily počas časového intervalu jej pôsobenia*,

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt. \quad (2.76)$$

Na obr. 41 je symbolicky zobrazený geometrický význam posledného vzťahu. Impulz sily predstavuje plochu pod grafom sily ako funkcie času. Pri zrážke je táto funkcia nenulová len v čase trvania zrážky, kedy vyrastie na maximálnu hodnotu a po skončení zrážky opäť klesne na nulu.



Obr. 41: Priebeh nenulovej zložky sily pri zrážke dvoch telies v čase od t_i po t_f s vyobrazením geometrického významu impulzu sily.

Príklad: Automobil s hmotnosťou 1500kg vrazil rýchlosťou 72km/h do betónovej steny. Ak predpokladáme že zrážka (deformácia karosérie) trvala ¹³ $\Delta t = 0,1s$, akou priemernou silou pôsobila stena počas zrážky na automobil?

Riešenie: Hybnosť auta sa zmenila na nulu, t.j. o

$$\Delta p = mv = 1500 \cdot 72 / 3,6 \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 3 \cdot 10^4 \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (2.77)$$

Toto sa rovná integrálu z pôsobiacej sily za čas zrážky Δt

$$mv = \int_{\Delta t} F(t) dt. \quad (2.78)$$

Ak by sme nahradili premennú sily $F(t)$ jej priemernou a teda konštantnou hodnotou F_{av} , musíme dostať ten istý impulz, t.j.

$$mv = \int_{\Delta t} F_{av} dt = F_{av} \Delta t \quad (2.79)$$

pretože integrál je plocha pod funkciou ¹⁴, čo v tomto prípade predstavuje obdĺžnik so stranami F_{av} a Δt . Priemerná sila pôsobiaca pri zrážke teda bude

$$F_{av} = \frac{mv}{\Delta t} = \frac{3 \cdot 10^4}{0,1} \approx 3 \cdot 10^5 \text{N}. \quad (2.80)$$

¹³<http://auto.howstuffworks.com/car-driving-safety/accidents-hazardous-conditions/crash-test2.htm>

¹⁴Týmto si pripomeňme geometrický význam integrálu diskutovaný v časti 1.2.5.

Príklad: Do dreveného kvádra v pokoji, s hmotnosťou $M = 250\text{g}$, vrazí projektil, s hmotnosťou $m = 1\text{g}$ rýchlosťou $v = 250\text{m/s}$. Akú vzdialenosť prejde kváder po betónovej podložke po zásahu projektilom, ak koeficient šmykového trenia medzi kvádom a podložkou je $\mu = 0,62$? Predpokladajte, že zrážka trvala zanedbateľne krátky čas.

Riešenie: Problém rozdelíme na dve časti: (1) zrážka projektilu s kvádom, (2) pohyb kvádra po zrážke. (1) Pri zrážke sa zmena celkovej hybnosti projektilu a kvádra rovná impulzu vonkajších síl. Gravitačná sila na kváder je kompenzovaná reakciou od podložky a preto nebude prispievať. Tretia sila medzi kvádom a podložkou dodá impulz $\mu(M+m)g\Delta t$. V zadaní je ale spomínané, že trvanie zrážky môžeme zanedbať, t.j. $\Delta t \rightarrow 0$ a preto ani tretia sila nedodá impulz pre zmenu celkovej hybnosti. Inými slovami, v zrážke sa bude celková hybnosť kvádra a projektilu zachovávať. Zo zákona zachovania hybnosti teda môžeme nájsť spoločnú rýchlosť kvádra a projektilu po zrážke u ,

$$m \cdot u + M \cdot 0 = (m + M) \cdot v_0 \quad (2.81)$$

$$v_0 = \frac{m}{m + M} u = \frac{1}{251} 250 \approx 1,0 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (2.82)$$

(2) Pohyb po zrážke popíšeme pohybovou rovnicou, jej horizontálnou zložkou, kde jediná sila, ktorá pôsobí, je sila šmykového trenia

$$(M + m)a = -\mu(m + M)g \quad (2.83)$$

$$a = -\mu g \quad (2.84)$$

Ide teda o rovnomerne spomalený pohyb z počiatočnej rýchlosti $v(0) = v_0$. Pre takýto pohyb sa rýchlosť a súradnica menia nasledovne s časom,

$$v(t) = v_0 + at = v_0 - \mu g t \quad (2.85)$$

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2 \quad (2.86)$$

Čas kedy kváder zastane t_s nájdeme z podmienky nulovosti rýchlosti dosadenej do rovnice (2.85),

$$0 = v_0 - \mu g t_s \rightarrow t_s = \frac{v_0}{\mu g} = \frac{m u}{(m + M) \mu g} = 0,16 \text{s}. \quad (2.87)$$

Dráhu, akú kváder prejde dosadením času zastavenia do súradnice (2.86),

$$s = x(t_s) = \frac{1}{2} \mu g t_s^2 = \frac{m^2 u^2}{2(m + M)^2 \mu g} = 7,8 \text{cm}. \quad (2.88)$$

Príklad: Projektil sa zaborí do dreva do hĺbky 5mm. Odhadnite dĺžku trvania zrážky, impulz sily dodaný za tento čas kvádru trením a zhodnoďte jeho zanedbanie v predchádzajúcom príklade.

Riešenie: Ak projektil zbrzdí na nulu na vzdialenosti $l = 5\text{mm}$ potom brzdenie, ak ho budeme modelovať ako rovnomerne spomalené, potrvá čas τ , kde

$$l = \frac{1}{2}a\tau^2 = \frac{u}{2\tau}\tau^2 = \frac{1}{2}u\tau \quad (2.89)$$

$$\rightarrow \tau = \frac{2l}{u} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{250} = 4 \cdot 10^{-5}\text{s} \quad (2.90)$$

Trvanie zrážky je šesť rádov menšie ako brzdenie kvádra a preto zanedbanie času zrážky v predchádzajúcom príklade bolo opodstatnené.

Impulz tretej sily dodaný kvádru za tento čas bude

$$I_{tr} = F_{trenie}\tau = \mu(M + m)g\tau \quad (2.91)$$

$$= 0,62 \cdot 0,25 \cdot 1,9,81 \cdot 4 \cdot 10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 6,1 \cdot 10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (2.92)$$

Táto hodnota je naozaj zanedbateľná voči hybnosti počiatkovej strely, $mu = 0,25\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ a preto použitie zákona zachovania hybnosti v predchádzajúcom príklade bolo vporiadku.

2.5 Práca a výkon

Práca ako fyzikálna veličina je vo fyzike motivovaná týmto pojmom v bežnej hovorovej reči, ale jej význam je užší a presne vymedzený. Hovoríme, že na telese bola vykonaná práca, ak nejaký činiteľ pôsobí konštantnou silou F v smere pohybu telesa a teleso pritom prejde dráhu s . Prácu potom nájdeme ako súčin tejto sily a dráhy,

$$W = F \cdot s \quad (2.93)$$

Prácu označujeme symbolom W podľa anglického “work” a jej jednotkou je Joule,

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \quad (2.94)$$

Vzťah (2.93) hovorí, že čím väčšou silou pôsobíme alebo čím na dlhšej vzdialenosti pôsobíme silou, tým väčšiu prácu činiteľ vykoná. Treba si uvedomiť, že ak pôsobíme silou hoc aj dlhý čas, ale pôsobisko tejto sily nezmení polohu, teleso sa neposunie, z hľadiska tejto definície žiadnu prácu nekonáme, aj keď nás to môže stať dosť veľa energie.

Príklad: Vzpierač pri zdvihnutí činky (napr. v kategórii muži do 105kg má činka okolo 200kg) nad hlavu prácu koná, lebo pôsobí silou (väčšou ako je gravitačná sila pôsobiaca na činku) na dráhe jej zdvihnutia nad hlavu, t.j asi 2,5m čo predstavuje prácu

$$W = Fs = mgs = 200 \cdot 9,81 \cdot 2,5 \text{J} = 4905 \text{J} \quad (2.95)$$

Následne, keď činku drží nad hlavou už prácu na činke nekoná hoci na ňu pôsobí nemalou silou ($F = 2\text{kN}$), lebo v tejto fáze činka nemení svoju polohu. Prirodzene, neznamená to ale, že vzpierač nestráca energiu. Udržiavanie činky nad hlavou vyžaduje neustále napnutie svalov, čo spotrebúva množstvo energie vzpierača, no nepredstavuje to žiadnu prácu konanú vzpieračom na činke.

Pri impulze sily sme sa stretli so situáciami, keď sa sila môže meniť v čase, čo je v praxi skôr pravidlo ako výnimka. Je preto potrebné rozšíriť špecifickú definíciu vzťahu pre prácu (2.93) na takúto situáciu. Predstavme si, že sila \vec{F} pôsobí na teleso v mieste $\vec{r}(t)$, pričom poloha tohto miesta sa mení v čase t . Samotná sila tiež nie je konštantná, mení sa v čase čo zaznačíme ako $\vec{F}(t)$.

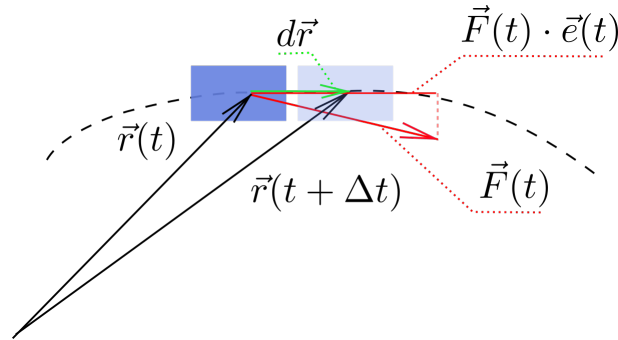
Celkovú prácu W , ktorú táto sila vykoná získame ako súčet príspevkov k práci ΔW_i , konaných počas krátkych intervalov času Δt_i , ktoré, ak ich zvolíme limitne malé, vedú na integrál, ako to bolo prebraté aj v časti 1.2.5,

$$W = \sum_i W_i \rightarrow \int dW \quad (2.96)$$

Vyjadrenie pre malý príspevok k práci nájdeme ako prácu dW , vykonanú silou $\vec{F}(t)$ za tak krátky čas, že ju možno považovať za konštantnú, a teda použiť jej zavedenie v rovnici (2.93). Za krátky čas dt zmení pôsobisko sily polohu o vektor posunutia (Obr. 42)

$$d\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \vec{v}(t)dt = \vec{e}(t)v(t)dt = \vec{e}(t)ds, \quad (2.97)$$

kde sme si označili $\vec{r}(t)$ ako polohový vektor pôsobiska sily, $\vec{e}(t)$ ako okamžitý jednotkový vektor v smere okamžitej rýchlosti $\vec{v}(t)$ a $ds = |d\vec{r}|$ ako dĺžku



Obr. 42: Za krátky čas dt sa teleso (modrý kváder) posunie o vektor $d\vec{r}$ pri pôsobení sily \vec{F} . Smer sily a posunutia nemusia byť zhodné, zhodný je len smer zrýchlenia a sily. Posunutie $d\vec{r} = \vec{v}(t)dt$ má smer okamžitej rýchlosti, $\vec{e}(t)$. Len zložka pôsobiacej sily v tomto smere, $\vec{F}(t) \cdot \vec{e}(t)$, prispieva ku konanej práci.

posunutia telesa za čas dt . Pomocou tohto jednotkového vektora dokážeme získať veľkosť sily v smere pohybu, t.j. v smere rýchlosti, pomocou skalárneho súčinu,

$$F_e(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{e}(t), \quad (2.98)$$

pretože podľa prvej definície, len zložka sily *v smere pohybu* prispieva k práci. Príspevok k práci bude potom súčinom sily v smere pohybu a dĺžky posunutia telesa,

$$dW = F_e(t)ds. \quad (2.99)$$

Zo všetkým uvedeným môžeme teraz prepísať a uviesť *všeobecnú definíciu práce*,

$$W = \int dW = \int F_e(t)ds, \quad (2.100)$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)dt, \quad (2.101)$$

kde t_i a t_f predstavujú počiatočný a konečný čas medzi ktorými vykonanú prácu vyčíslujeme.

Výraz pod integrálom sa nazýva *okamžitý výkon*,

$$P(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t), \quad (2.102)$$

kde označenie P pochádza z anglického slova pre výkon - "power", a jeho fyzikálna jednotka je 1 Watt,

$$[P] = \text{N.m.s}^{-1} = \text{J.s}^{-1} = \text{W}. \quad (2.103)$$

Pretože práca je integrálom výkonu podľa času, platí, vzhľadom na vzťah medzi derivovaním a integrálom (1.37), že okamžitý výkon je deriváciou práce vykonanej po čas t ,

$$P(t) = \frac{d}{dt}W(t). \quad (2.104)$$

Priemerný výkon P_{av} je taká konštantná hodnota výkonu, ktorú keby mal konajúci činiteľ, tak za rovnaký čas by vykonal rovnakú prácu ako uvážením okamžitého výkonu, t.j.

$$W = \int_{t_0}^t P_{av} dt' = \int_{t_0}^t P(t') dt' \quad (2.105)$$

$$P_{av}(t - t_0) = \int_{t_0}^t P(t') dt' \quad (2.106)$$

$$P_{av} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t P(t') dt' = \frac{W}{\Delta t}. \quad (2.107)$$

Príklad: V jednoduchom prípade konštantnej sily \vec{F} pôsobiacej len v konštantnom smere pohybu \vec{i} , sa pôsobisko sily posunulo za čas $\Delta t = t - t_0$ po dráhe s . Nájďme prácu vykonanú od času t_0 po čas t a priemerný výkon za tento interval času. Vektor rýchlosti má nemenný smer a preto preň platí

$$\vec{v}(t) = \vec{i}v(t). \quad (2.108)$$

Preto pre prácu dostaneme

$$W(t) = \int_{t_0}^t F\vec{i} \cdot \vec{i}v(t) dt = F(x(t) - x(t_0)) = Fs \quad (2.109)$$

Použitím vzťahu (2.107) pre priemerný výkon nájdeme

$$P_{av} = \frac{Fs}{\Delta t} = Fv_{av}, \quad (2.110)$$

kde sme použili označenie pre priemernú rýchlosť $v_{av} = s/\Delta t$.

Príklad: Automobil Škoda Octavia 2.0 TDI RS dokáže zrýchliť z 0 na 100km/h za 8,2s. Ak je jeho pohotovostná hmotnosť ¹⁵ 1490kg, aký musí byť maximálny výkon motora? Aký je jeho priemerný výkon počas zrýchľovania? Predpokladajte, že auto zrýchľuje rovnomerne priamočiario.

Riešenie: Označíme si maximálnu rýchlosť $v_{max} = 100\text{km/h}$, čas zrýchľovania Δt a hmotnosť auta m . Ak sa zrýchľuje, potom motor spôsobuje, že na auto pôsobí konštantná urýchľujúca sila

$$F = ma = m \frac{v_{max}}{\Delta t} \quad (2.111)$$

Maximálny výkon motora je v momente dosiahnutia maximálnej rýchlosti, a preto

$$P_{max} = Fv_{max} = m \frac{v_{max}^2}{\Delta t} = 1490 \cdot \frac{(100/3,6)^2}{8,2} = 140,2\text{kW} \quad (2.112)$$

Rýchlosť automobilu postupne narastá, $v(t) = at$. Priemerný výkon dostaneme použitím priemernej rýchlosti,

$$v_{av} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} at dt = \frac{1}{2} a \Delta t = \frac{1}{2} v_{max} \Delta t \quad (2.113)$$

t.j.

$$P_{av} = Fv_{av} = m \frac{v_{max}^2}{2\Delta t} = 70,1\text{kW}. \quad (2.114)$$

Podľa technickej špecifikácie, má motor 2.0 TDI maximálny výkon 135kW, t.j. nižší, ako sme tu našli, ale stále vyšší, ako je nami nájdený priemerný výkon. Súvisí to s tým, že v skutočnosti sa auto nerozbíha rovnomerne. Pri rozbehu sa mení prevod prevodovky a výkon motora je maximálny pri určitých špecifických otáčkach. Maximálny výkon sa teda dosiahne niekoľko krát počas jedného rozbiehania na rozdiel od tu uvažovaného modelu konštantnej sily, keď sa maximálny výkon dosiahne len raz a to pri maximálnej rýchlosti.

¹⁵Pohotovostná hmotnosť podľa EN zahŕňa 75kg ako typickú hmotnosť jedného vodiča

2.6 Energia

2.6.1 Úvod

O energii hovoríme ako o číselnej charakteristike telies, všeobecnejšie látky, alebo aj fyzikálnych polí, ktoré sú schopné silovo pôsobiť a teda konať prácu. Vždy teda musíme vedieť o energii čoho (telesa, látky, elektromagnetického poľa a podobne) hovoríme. Ak teleso vykoná určitú prácu, hovoríme že jeho energia sa znížila o rovnaké množstvo vykonanej práce, t.j.

$$\Delta E = W. \quad (2.115)$$

Preto je fyzikálnou jednotkou energie rovnaká jednotka ako pre prácu, Joule.

V tejto časti sa budeme zaoberať len energiou hmotných bodov, ktorú tiež nazývame mechanickou energiou. Neskôr sa s energiou ideálne tuhého telesa, čo bude stále predstavovať mechanickú energiu. V rámci termodynamiky sa stretávame aj s vnútornou energiou telies do ktorej spadá aj energia, ktorá sa uvoľňuje či spotrebúva pri chemických reakciách, v rámci elektriny a magnetizmu zase s energiou elektrického a magnetického poľa. Vnútornú energiu pritom možno chápať ako mechanickú energiu častíc a ich elektromagnetických polí na mikroskopickej úrovni. Všetky tieto *formy* energie sa môžu medzi sebou meniť prostredníctvom konania práce, ale pritom celková hodnota energie sa ukazuje byť v našom svete konštantná - hovoríme že sa zachováva.

V nektorých zjednodušených modeloch uvidíme, že sa zachováva aj mechanická energia samostatne, čo sa dá využiť na jednoduchšie riešenie úloh. Typicky ide o úlohy pohybu telies, kde zanedbávame trenie.

2.6.2 Kinetická energia hmotných bodov

Kinetická energia hmotného bodu s hmotnosťou m a rýchlosťou \vec{v} je definovaná vzťahom

$$E_k = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2, \quad (2.116)$$

a kinetickou energiou N hmotných bodov s hmotnosťami m_i a rýchlosťami \vec{v}_i je súčet kinetických energií jednotlivých bodov,

$$E_k = E_{k,1} + E_{k,2} + \dots + E_{k,N}, \quad E_{k,i} = \frac{1}{2}m_i|\vec{v}_i|^2. \quad (2.117)$$

Takáto definícia má vlastnosť spomínanú v úvode k energii - zmena kinetickej energie hmotných bodov je rovná práci, ktorú na týchto bodoch konajú pôsobiace sily.

K výrazu pre energiu sa dostaneme pomocou výpočtu práce konanej na hmotnom bode. Nech časovo-premenná $\vec{F}(t)$ pôsobí na hmotný bod s hmotnosťou m . Táto sila vykoná prácu

$$W = \int \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt \quad (2.118)$$

Pohyb hmotného bodu popíšeme 2. Newtonovým zákonom,

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \vec{F}(t). \quad (2.119)$$

Vyjadrenie sily z tejto rovnice možno dosadiť do vzťahu pre prácu a úpravou nájdeme,

$$W = \int_{t_0}^t m \left(\frac{d}{dt'} \vec{v}(t') \right) \cdot \vec{v}(t') dt' = \int_{t_0}^t m \frac{1}{2} \frac{d}{dt'} (\vec{v}(t') \cdot \vec{v}(t')) dt' \quad (2.120)$$

$$= \frac{1}{2} m |\vec{v}(t)|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}(t_0)|^2 = E_k(t) - E_k(t_0) \quad (2.121)$$

Vidíme teda, v súhlase s vzťahom (2.115), že konaná práca sa rovná rozdielu medzi kinetickou energiou bodu na konci a na začiatku.

Príklad: V príklade k zavedeniu hybnosti v časti 2.4 sme našli spodné ohraničenie pre rýchlosť ťažšieho vozíka po zrážke za predpokladu, že sa ľahší vozík odrazí pomaly späť. Uvažujme identický začiatok zrážky, no predpokladajme že celková kinetická energia sa zachová. Toto môžeme za predpokladu, že nepríde k trvalej deformácii vozíkov či ich zahriatiu v mieste nárazu. Čo vieme povedať o výsledku takejto zrážky?

Riešenie: Okrem celkovej hybnosti sa teda nezmení ani celková kinetická energia. Toto pridá ďalšiu rovnicu k rovnici (2.70),

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad (2.122)$$

Máme teda dve rovnice a dve neznáme rýchlosti - u_1 a u_2 a preto ich vieme určiť. Z rovnice (2.70) si vyjadríme u_2 ,

$$u_2 = v_2 - \frac{m_1}{m_2} u_1 \quad (2.123)$$

a dosadíme do (6.124),

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - m_1v_2u_1 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2}u_1^2 \quad (2.124)$$

$$0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)u_1 - v_2 \quad (2.125)$$

$$u_1 = \frac{2v_2}{1 + m_1/m_2} \quad (2.126)$$

a dosadením do (2.123)

$$u_2 = \frac{1 - m_1/m_2}{1 + m_1/m_2}v_2 \quad (2.127)$$

Vidíme, že v tomto prípade sa vozík 2 odrazí späť vždy, keď je jeho hmotnosť menšia ako prvého. Po dosadení hmotnosti a počiatkovej rýchlosti nájdeme

$$u_1 = 2/5\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 0,4\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \quad (2.128)$$

$$u_2 = -3/5\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = -0,6\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \quad (2.129)$$

čo súhlasí s výsledkom analýzy problému v časti 2.4, kde sme našli, že pre $u_2 < 0$ bude $u_1 > 0,25\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, bez predpokladu o zachovaní kinetickej energie.

Úloha: O koľko sa zmenia rýchlosti vozíkov po zrážke, ak sa na deformáciu a oteplenie vozíkov spotrebuje 10% mechanickej energie?

2.6.3 Potenciálna energia

Pri zavedení práce sme uvažovali, že sila sa môže v priebehu svojho pôsobenia meniť v čase, a teda výpočet celkovej práce bolo nevyhnutné spraviť pomocou integrálu

$$W = \int_{t_0}^t \vec{F}(t') \cdot \vec{v}(t') dt' \quad (2.130)$$

Pre mnohé silové pôsobenia je sila závislá nie priamo od času, ale od *miesta*, kde sa hmotný bod nachádza, t.j. od jeho polohového vektora,

$$\vec{F}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)). \quad (2.131)$$

Dôležitý rozdiel oproti všeobecnej závislosti sily od času je v tom, že v tomto prípade, keď je teleso na tom istom mieste v rôznom čase, bude naň pôsobiť vždy tá istá sila. V tomto prípade možno prepísať integrovanie cez čas na integrovanie *po krivke*

$$W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'. \quad (2.132)$$

Krivka, po ktorej integrujeme v (2.132) začína z referenčného miesta $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ a končí v mieste $\vec{r}(t)$. Element integrovania je $ds = |d\vec{r}'|$ kde

$$d\vec{r}' = \vec{v}(t')dt', \quad (2.133)$$

a integrand je priemet sily do dotykového vektora na krivke, t.j.

$$d\vec{r}' = \vec{e}(\vec{r}')ds, F_e = \vec{F}(\vec{r}') \cdot \vec{e}(\vec{r}') \quad (2.134)$$

$$W = \int_0^l F_e ds, \quad (2.135)$$

Hranice integrovania v poslednom prechádzajú cez dĺžku krivky, t.j. l je celková dĺžka krivky.

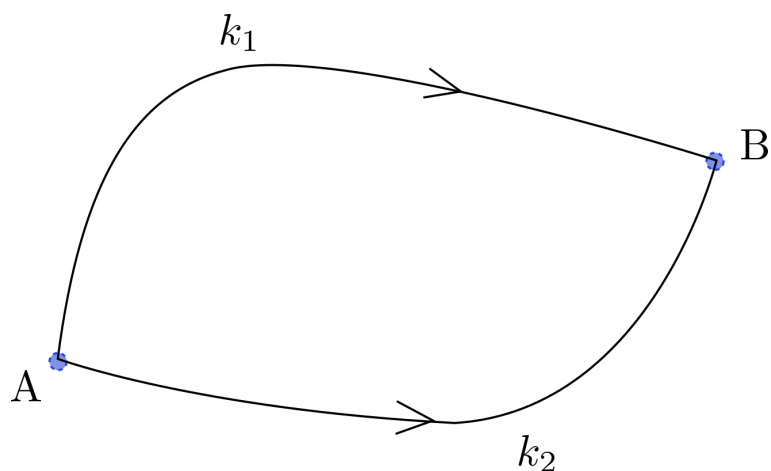
Ďalej obmedzíme uvažované sily len na také, pre ktoré *výsledná práca nezávisí od konkrétnej krivky* medzi miestami $\vec{r}(t_0)$ a $\vec{r}(t)$. Takéto sily nazývame *potenciálové*. Potenciálové sily majú dôležitú vlastnosť, že práca vykonaná po ľubovoľnej uzavretej trajektórii je vždy nulová (Obr. 43). Ako v niektorých príkladoch uvidíme, gravitačné sily, sily od pružín, elektrostatické sily sú príklady potenciálových síl. Na druhej strane, trecie sily alebo sila ktorou pôsobí magnetické pole na vodič s elektrickým prúdom potenciálovými nie sú.

Pre potenciálové sily sa zavádza užitočná forma energie - *potenciálna energia hmotného bodu* v mieste \vec{r} vzhľadom na miesto referenčné \vec{r}_0 ,

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (2.136)$$

Takto zavedená potenciálna energia je rovná záporne vzatej práci vykonanej uvažovanou silou pri premiestnení hmotného bodu medzi referenčnou a koncovou polohou. Pre potenciálne sily možno dokázať, že práca konaná potenciálnou silou po uzavretej krivke je vždy nulová (Obr. 43).

V referenčnom mieste je potenciálna energia nulová, lebo ide o integrál s nulovou dĺžkou.



Obr. 43: Ak je sila potenciálová, potom výpočet práce pri prenose z miesta A do miesta B po dvoch rôznych krivkách k_1 a k_2 dá ten istý výsledok $W_1 = W_2 = W_{AB}$. Obrátením orientácie krivky k_2 , t.j. pri prenose telesa z B do A po $-k_2$ bude práca po nej $W_{BA} = -W_{AB}$. Spojením k_1 a $-k_2$ získame jednu uzavretú krivku z A do A, pričom celková práca na tento prenos je nulová, $W_{AA} = W_{AB} + W_{BA} = W_{AB} - W_{AB} = 0$.

Príklad: Nájdeme tvar potenciálnej energie pre guľičku (hmotný bod) uchytenú na vodorovnej pružine s tuhosťou k . Počiatok súradnicovej sústavy si zvolíme v mieste, kde sa nachádza guľička pri uvoľnenej pružine, os \hat{x} a teda jednotkový vektor \vec{i} v smere naťahovania pružiny. Ak guľičku vychýlime, polohový vektor guľičky bude $\vec{r} = x\vec{i}$. Predĺženie pružiny je pri tejto voľbe súradníc priamo súradnica x . Veľkosť sily pôsobiacej na guľičku bude $F = kx$ a jej orientácia bude proti výchylke, t.j.

$$\vec{F} = kx(-\vec{i}) = -k\vec{r} \quad (2.137)$$

Ako východzí bod pre potenciálnu energiu si zvolíme počiatok, $\vec{r}_0 = 0$, a teda pre potenciálnu energiu guľičky uchytenej na pružine nájdeme

$$U(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^x -kx'\vec{i} \cdot \vec{i} dx' = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.138)$$

Keďže táto potenciálna energia závisí len od x súradnice polohového vektora \vec{r} , zvykneme často písať

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.139)$$

Príklad: Potenciálna energia telesa s hmotnosťou m nachádzajúceho sa vo výške z v gravitačnom poli Zeme je daná známym výrazom

$$U(z) = mgz. \quad (2.140)$$

Prídeme k nemu opäť z definície potenciálnej energie gravitačnej sily pôso-
biacej na hmotnosť m , $\vec{F} = mg(-\vec{k})$,

$$U(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} mg(-\vec{k}) \cdot d\vec{r}. \quad (2.141)$$

Budeme hľadať potenciálnu energiu v mieste $\vec{r} = x\vec{i} + z\vec{k}$ vzhľadom na nejaké miesto O na zemi. Zvolíme si dve rôzne krivky pre jeho výpočet, znázornené na Obr. 44 V prípade krivky A je na úseku A1 $d\vec{r} = \vec{i}dx$, v integrále sa objaví $\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$ a príspevok k potenciálnej energii na tejto časti krivky bude nulový. Na úseku A2 bude $d\vec{r} = \vec{k}z$ a príspevok k potenciálnej energii bude

$$U_A(\vec{r}) = - \int_0^z mg(-\vec{k}) \cdot \vec{k}z = \int_0^z mgdz = mgz \quad (2.142)$$

V prípade krivky B to bude naopak, príspevok od B1 bude

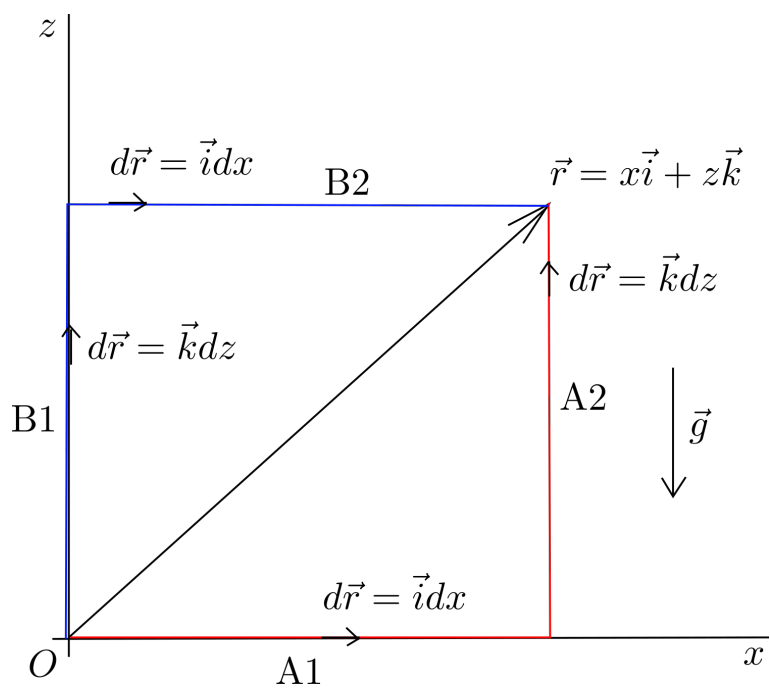
$$U_B(\vec{r}) = - \int_0^z mg(-\vec{k}) \cdot \vec{k}z = mgz \quad (2.143)$$

a príspevok od B2 bude nulový. Vidíme, že pre dve rôzne krivky je výraz pre potenciálnu energiu rovnaký, čo demonštruje potenciálový charakter homogénneho gravitačného poľa.

Úloha: Presvedčte sa, že aj po krivke danej polohovým vektorom

$$\vec{r}(s) = s\frac{x}{R}\vec{i} + s\frac{z}{R}\vec{k}, \quad R = \sqrt{x^2 + z^2} \quad (2.144)$$

a s prebieha z intervalu $(0, R)$ bude potenciálna energia v mieste $\vec{r} = x\vec{i} + z\vec{k}$ rovná $U = mgz$.



Obr. 44: Potenciálna energia hmotného bodu v mieste \vec{r} vzhľadom na bod O nezávisí od krivky, ktorá tieto dva body spája. Krivka A aj B dá ten istý výsledok, $U = mgz$.

2.6.4 Mechanická energia a práca

V časti 2.6.2 sme z 2. Newtonovho zákona našli, že práca vykonaná vonkajšou silou sa rovná zmene kinetickej energie. V prípade, že na teleso pôsobí naraz viacero síl, platí to rovnako pre celkovú prácu, konanú všetkými silami. Typicky nás ale nezaujíma celková práca, ale len práca konaná niektorou zo síl. Napríklad, pri tlačení telesa po naklonenej rovine nás zaujíma práca ktorú konáme jeho tlačением a celková práca gravitačnej, trecej a sily, ktorou pôsobíme spolu. Uvažujme teleso-hmotný bod, na ktorý pôsobia viaceré sily, ktoré si rozdelíme na potenciálové (\vec{F}_p) a nepotenciálové,

$$\vec{F}_c = \vec{F}_p + \vec{F}_{np}. \quad (2.145)$$

Pri riešení úloh sa môže ukázať užitočné rozdeliť si nepotenciálové sily na sily, ktorými riadime pohyb - napríklad od motora, pôsobiaci človek a podobne, a sily trecie,

$$\vec{F}_{np} = \vec{F}_r + \vec{F}_t. \quad (2.146)$$

Práca konaná riadiacimi silami bude ukazovať akú energiu treba na pohyb vynaložiť, práca konaná trecími silami, ktorá bude vždy záporná, energiu ktorú trením strácame.

Výsledkom takéhoto rozdelenia bude mimoriadne užitočná *bilančná rovnica* pre energiu, zodpovedajúca takémuto rozdeleniu síl,

$$W_r = \Delta E_m - W_t, \quad (2.147)$$

kde W_r je práca riadiacich síl, W_t je práca trecích síl a

$$\Delta E_m = \Delta E_k + \Delta U \quad (2.148)$$

je zmena súčtu kinetickej a potenciálnej energie telesa počas konania práce. Súčet kinetickej a potenciálnej energie nazývame *mechanická energia*.

Ukážeme si, ako odvodíme vzťahy (2.147) a (2.148). Pohybová rovnica pre teleso - hmotný bod pri zavedenom rozdelení síl má tvar

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = \vec{F}_p + \vec{F}_t + \vec{F}_r \quad (2.149)$$

Prácu riadiacich síl môžeme upraviť vyjadrením riadiacej sily z tejto rovnice,

$$W_r = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_r \cdot \vec{v} dt = \quad (2.150)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \left(\frac{d}{dt} \vec{v} \right) \cdot \vec{v} dt - \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_p \cdot \vec{v} dt - \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_t \cdot \vec{v} dt \quad (2.151)$$

$$= E_k(t_2) - E_k(t_1) + U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) - W_t = \Delta E_m - W_t, \quad (2.152)$$

kde sme využili už nám známu úpravu integrálu pre kinetickú energiu (2.121) a definíciu potenciálnej energie (2.136).

Príklad: Akou rýchlosťou musíme vyhodíť tenisovú loptičku, aby vyletela do výšky 20m? Aerodynamický odpor loptičky zanedbajte.

Riešenie: Hoci túto úlohu možno riešiť ako zvislý vrh, t.j. pomocou pohybovej rovnice, tu pri riešení využijeme energetickú bilanciu (2.147). Počas letu hore na loptičku nepôsobí žiadna “riadiaca” sila, a treciu silu zanedbáme preto jediné nenulové príspevky sú zmena kinetickej energie - z počiatočnej po udelení rýchlosti rukou po zastavenie v požadovanej výške

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2.153)$$

a zmena potenciálnej energie - z nulovej výšky, kde si zvolíme referenčnú polohu a teda z nulovej potenciálnej energie na potenciálnu energiu v požadovanej výške

$$\Delta U = mgh - 0 \quad (2.154)$$

Dosadením do energetickej bilancie máme

$$0 = \Delta E_k + \Delta U - 0 \quad (2.155)$$

$$0 = -\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \quad (2.156)$$

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 20} \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 19,8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (2.157)$$

Príklad: Riadiacou silou vynútime, aby sa vozík rozbehol rovnomerne zrýchlene so zrýchlením $a = 1 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ z pokoja na rýchlosť $v_1 = 4 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Aká časť energie z celkovej práce potrebnej na rozbeh sa stratí v aerodynamickom trení? Hmotnosť vozíka je $m = 35 \text{kg}$, koeficient aerodynamického odporu vozíka $c_d = 0,8$, hustota vzduchu $\rho = 1,23 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a efektívny prierez plochy vozíka je $S = 0,25 \text{m}^2$.

Riešenie: Predpokladáme, že ide o pohyb v horizontálnom smere, nakoľko žiadne stúpanie sa nespomína. T.j. jeho potenciálna energia sa nemení, a preto práca konaná riadiacou silou sa spotrebúva len na nárast kinetickej

energie vozíka a na prácu trecích síl. Obe si vyčíslime. Zmena kinetickej energie je jednoduchá,

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 = 280\text{J}. \quad (2.158)$$

Prácu trecích síl musíme spočítať integrálom,

$$W_t = \int_0^{t_1} \vec{F}_t \cdot \vec{v}(t) dt = - \int_0^{t_1} F_t v(t) dt = - \int_0^{t_1} \frac{1}{2} \rho S c_d v(t)^3 dt \quad (2.159)$$

$$= - \frac{1}{2} \rho S c_d \int_0^{t_1} a^3 t^3 dt = - \frac{1}{2} \rho S c_d a^3 \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^{t_1} = - \frac{\rho S c_d a^3 t_1^4}{8} \quad (2.160)$$

kde sme využili fakt, že aerodynamická sila má smer proti rýchlosti, čo dá faktor -1 zo skalárneho súčinu, tvar sily aerodynamického odporu z rovnice (2.56) a fakt, že pri rovnomernej zrýchlenom pohybe z pokoja bude rýchlosť narastať priamoúmerne s časom, $v = at$. Samotný čas t_1 , keď rýchlosť dosiahne požadovanú veľkosť v_1 , nie je zadaný, a preto si ho vyjadríme, $t_1 = v_1/a$, a vyjadrenie dosadíme do výsledku integrovania,

$$W_t = - \frac{\rho S c_d v_1^4}{8a} = -31,4\text{J}. \quad (2.161)$$

Celková práca riadiacej sily je teda

$$W_r = \Delta E_k - W_t = 314,4\text{J} \quad (2.162)$$

a straty tvoria $|W_t|/W_r \cdot 100\% = 10\%$. Účinnosť urýchlenia týmto spôsobom na v_1 je teda zhruba 90%.

2.6.5 Potenciálna energia a gradient

Vzťah (2.136) definuje potenciálnu energiu telesa v mieste \vec{r} pomocou integrálu po krivke zo sily. Analogicky k vzťahom (1.37) a (1.36), ktoré ukazujú na opak operácie integrovania a derivovania existuje typ vektorového derivovania, ktorý vyjadri silu pomocou potenciálnej energie. Táto derivácia sa volá gradient, zapisuje sa pomocou obráteného trojuholníka, nazývaného aj *gradient* alebo *nabla operátor*,

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) \quad (2.163)$$

a tu si ju uvedieme s jej geometrickým významom. Mínus súvisí s prítomnosťou mínus znamienka v definícii potenciálnej energie.

Predstavme si, že poznáme potenciálnu energiu telesa ako funkciu jeho polohy, $U(\vec{r})$. Toto predstavuje funkciu troch reálnych premenných - x, y, z . Nech sa teleso nachádza v mieste \vec{r} a budeme sa zaoberať tým, ako sa zmení jeho potenciálna energia, ak sa z tohto miesta vyberieme určitým smerom daným jednotkovým vektorom \vec{e} , t.j. keď sa poloha zmení na

$$\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r} = \vec{r} + \vec{e}ds \quad (2.164)$$

kde ds je malá dráha, o ktorú sa v smere \vec{e} posunieme z miesta \vec{r} . V zložkách môžeme poslednú rovnicu napísať nasledovne

$$x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} = (x + e_x ds)\vec{i} + (y + e_y ds)\vec{j} + (z + e_z ds)\vec{k} \quad (2.165)$$

kde e_x, e_y a e_z sú zložky jednotkového vektora \vec{e} . Rozdiel v potenciálnej energii medzi týmito pozíciami bude

$$dU = U(\vec{r}') - U(\vec{r}) = U(\vec{r} + \vec{e}ds) - U(\vec{r}) \quad (2.166)$$

Túto zmenu vypočítame v troch krokoch; najprv $dU = dU_x + dU_y + dU_z$, kde jednotlivé príspevky sú zmeny potenciálnej energie keď sa posunieme z \vec{r} postupne v smeroch \vec{i}, \vec{j} a \vec{k} .

$$dU_x = U(x + e_x ds, y, z) - U(x, y, z) = e_x ds \frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z), \quad (2.167)$$

kde $\partial/\partial x$ je znak derivovania podľa premennej x , a symbol ∂ a používa namiesto d len na zdôraznenie, že funkcia $U(x, y, z)$ má aj ďalšie premenné podľa ktorých by sme mohli chcieť derivovať, no v tomto momente sú to len konštanty. Takto prevádzaná derivácia funkcie viacerých premenných sa v matematike volá *parciálna derivácia*. Pripomeňme, že rovnica (2.167) priamo súvisí s definíciou derivácie, napr. v súvislosti s rýchlosťou, (1.28), a s tým súvisiacim vzťahom $\Delta x = v\Delta t$. V rovnici (2.167) má dU_x úlohu Δx , $e_x ds$ úlohu Δt a ich pomer s limitne malým $e_x ds$ zodpovedá rýchlosti v .

Analogicky rovnici (2.167) nájdeme príspevky pre posunutie v smeroch \vec{j} a \vec{k} ,

$$dU_y = e_y ds \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z), \quad dU_z = e_z ds \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z), \quad (2.168)$$

a pre celkovú zmenu potenciálnej energie pri posunutí v smere \vec{e}

$$dU = ds \left(e_x \frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) + e_y \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z) + e_z \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) \right) \quad (2.169)$$

Tento výraz možno zapísať pomocou skalárneho súčinu ak si zavedieme vektorové derivovania, a operátor nabla alebo gradient

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.170)$$

s ktorým rovnica (2.169) nadobudne tvar

$$dU = ds (\vec{e} \cdot \nabla U(\vec{r})) = d\vec{r} \cdot \nabla U(\vec{r}) \quad (2.171)$$

Na druhej strane, z definície potenciálnej energie (2.136) je zmena potenciálnej energie pri posune (2.164)

$$dU = - \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.172)$$

Porovnaním posledných dvoch vyjadrení pre dU a uvážením, že posunutie $d\vec{r}$ je malé ale ľubovoľným smerom, nájdeme hľadaný vzťah pre vyjadrenie sily z potenciálnej energie,

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) \quad (2.173)$$

Príklad: Potenciálna energia pre teleso uchytené na pružine je

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.174)$$

Silu pôsobiacu na teleso nájdeme zo všeobecného vzťahu (2.173)

$$\vec{F} = - \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{2} kx^2 = -\vec{i} kx, \quad (2.175)$$

presne ako očakávame.

Úloha: Presvedčte sa, že vzťah (2.173) dá správnu veľkosť a smer pre gravitačnú silu pôsobiacu na teleso hmotnosti m v homogénnom gravitačnom poli.

Pôvod názvu gradient je v tom, že orientácia vektora, ktorý získame aplikovaním nabla na potenciálnu energiu $U(\vec{r})$, je v smere jej *najväčšieho nárastu*. Toto možno jasne vidieť z prvej formy rovnice (2.171). Ak uvažujeme rôzne orientované posunutia s rovnakou veľkosťou ds ale rôznymi smermi \vec{e} . Skalárny súčin $\vec{e} \cdot \nabla U$ má význam priemetu vektora ∇U do smeru \vec{e} . Tento priemet bude vtedy najväčší, keď \vec{e} bude rovnako orientovaný ako ∇U , a teda nárast potenciálnej energie dU bude najväčší, ak sa vyberieme v smere ∇U . Gradient U je teda smer najväčšieho nárastu U .

Úplne analogicky, smer $-\nabla U(\vec{r})$ je smer najväčšieho poklesu potenciálnej energie z polohy \vec{r} , t.j. sila pôsobiaca na teleso (2.173) smeruje v smere najstrmšieho poklesu potenciálnej energie. Toto je mnohým intuitívne jasné tvrdenie s presnou matematickou formuláciou.

3 Pohyb v gravitačnom poli

3.1 Gravitačný zákon

Newton spolu s tromi pohybovými zákonmi navrhol aj formuláciu *gravitačného zákona*, ktorý hovorí, že hmotný bod s hmotnosťou m_1 v mieste \vec{r}_1 pôsobí na hmotný bod s hmotnosťou m_2 v mieste \vec{r}_2 silou

$$\vec{F}_{2,1} = \kappa \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (3.1)$$

kde $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitačná konštanta. Menovateľ v prvom zlomku je kvadrát vzájomnej vzdialenosti bodov, druhý zlomok udáva len smer silového pôsobenia, ktoré je pozdĺž spojnice polôh bodov a orientovaný tak, že sa body k sebe priťahujú. Preto zjednodušene sa často píše (a ľahšie pamätá) v tvare

$$\vec{F} = \kappa \frac{m_1 m_2}{R^2} \vec{e}, \quad (3.2)$$

pričom R je vzájomná vzdialenosť týchto hmotností a smer \vec{e} je orientovaný podľa toho, na ktorú z hmotností sila pôsobí, aby sa hmotnosti priťahovali.

Newton pomocou kombinácie troch pohybových a jedného gravitačného zákona spravil mimoriadny posun v chápaní fyzikálneho popisu sveta - tým istým aparátom popísal let a pád telies na Zemi, ako aj pohyb vesmírnych telies.

3.2 Homogénne gravitačné pole na povrchu Zeme

Hoci samotný gravitačný zákon hovorí o pôsobení hmotných bodov, možno ho použiť aj na guľové telesá s polomerom R , pričom za ich polohu vezmeme

stred gule, a hmotnosť ako hmotnosť celého telesa. O tom, že takéto použitie je vporiadku sa možno presvedčiť tým, že celkové silové pôsobenie zoskupenia N hmotných bodov tvoriace guľu s polomerom R , s celkovou hmotnosťou M , na inú hmotnosť m , je v týchto dvoch prípadoch rovnaké. Ide o obdobný problém s akým sa stretne v elektrickom poli, kde sa mu budeme detailne venovať.

Pri pôsobení sily medzi Zemou s hmotnosťou $M_Z = 5,972 \cdot 10^{24} \text{kg}$ a telesom s hmotnosťou m v blízkosti povrchu zeme, t.j. pri ich vzdialenosti

$$R = R_Z + z, \quad (3.3)$$

kde $R_Z = 6371 \text{km}$ je polomer Zeme a z je vertikálna výška telesa nad povrchom, pôsobí podľa gravitačného zákona (3.2) na teleso sila o veľkosti

$$F = \kappa \frac{M_Z m}{(R_Z + z)^2}. \quad (3.4)$$

Ak aj vezmeme výšku, kde sa pohybujú dopravné lietadlá, $z \sim 10 \text{km}$, bude rozdiel medzi silou pôsobiacou na jednotku hmotnosti telesa malý,

$$\frac{1}{m} F(z = 10 \text{km}) = \kappa \frac{M_Z}{(R_Z + z)^2} = 9,79 \text{m.s}^{-2} \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{m} F(z = 0 \text{km}) = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} = 9,82 \text{m.s}^{-2} \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

Je to preto, lebo zmeny vo výške telesa z sú malé oproti polomeru Zeme. Preto vo výpočtoch typicky berieme, že sila na jednotku hmotnosti telies je v širokom rozsahu výšok konštantná, a rovná tej na povrchu,

$$\frac{F}{m} = g', \quad g' = 9,82 \text{m.s}^{-2} \quad (3.8)$$

Toto nie je ešte totožné s gravitačným zrýchlením, pretože Zem sa otáča. Pohybová rovnica, t.j. 2. Newtonov zákon musí byť vyjadrený vzhľadom na inerciálnu sústavu, čo Zem nie je. Celkové rýchlénie telesa \vec{a} teda vyjadríme ako zrýchlenie telesa vzhľadom na Zem, \vec{a}' , a zrýchlenie bodu v pokoji vzhľadom na Zem \vec{a}_0 ,

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' \quad (3.9)$$

Pohybová rovnica pre teleso v blízkosti povrchu Zeme bude

$$m(\vec{a}' + \vec{a}_0) = mg'(-\vec{k}) \quad (3.10)$$

$$m\vec{a}' = m(-g'\vec{k} - \vec{a}_0) \quad (3.11)$$

V prípade Zeme, najväčší príspevok k zrýchleniu pochádza od dostredivého zrýchlenia v dôsledku rotácie Zeme okolo vlastnej osi, orientovaného rovnako ako gravitačná sila v smere $-\vec{k}$,

$$\vec{a}_0 = -R_{\perp}\omega^2\vec{k} \quad (3.12)$$

takže nakoniec nájdeme gravitačné zrýchlenie ako rozdiel príspevku od gravitačnej sily a dostredivého zrýchlenia (viď časť 1.3.14)

$$m\vec{a}' = -m(g' - R_{\perp}\omega^2)\vec{k} = -mg\vec{k}, g = g' - R_{\perp}\omega^2 = 9,80\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \quad (3.13)$$

Štandardne používaná hodnota je $g = 9,806\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Vidíme ale, že jej presná hodnota mierne závisí od zemepisnej šírky a nadmorskej výšky. (3.8) dá známu hodnotu gravitačného zrýchlenia

$$g = g' - 0,02\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (3.14)$$

Gravitačný zákon tak zahŕňa špeciálne prípady pohybu telies na Zemi ako sú voľný pád, šikmý vrh a pod.

3.3 Pohyb družice Zeme

Pri obiehaní družice okolo Zeme už nemožno automaticky vziať gravitačnú silu za konštantnú pre dané hmotnosti. Vo všeobecnosti sú dráhy družíc eliptické, no existuje aj riešenie pre pohyb po kruhovej dráhe, ktoré je jednoduššie a názorné, pretože vzdialenosť družice od stredu Zeme je nemenná ¹⁶

Družica rovnomerne obieha Zem vo vzdialenosti R (od stredu Zeme) za čas T má uhlovú rýchlosť $\omega = 2\pi/T$ a teda dostredivé zrýchlenie

$$a_d = R\omega^2 = R\frac{4\pi^2}{T^2} \quad (3.15)$$

Podľa Newtonovho 2. zákona, toto musí zodpovedať sile pôsobiacej na družicu,

$$ma_d = \kappa\frac{M_Z}{R^2}m. \quad (3.16)$$

¹⁶ Či je pohyb eliptický alebo po kružnici je dané počiatočnými podmienkami pre polohu a rýchlosť. Ak tieto sú také, že v počiatočnom čase je rýchlosť kolmá na polohový vektor družice vzhľadom na stred Zeme, bude pohyb po kruhovej dráhe. Ak je tento uhol rôzny od pravého, výsledkom bude eliptická dráha pre rýchlosti väčšie ako prvá kozmická rýchlosť a menšie ako druhá kozmická rýchlosť.

Z posledných dvoch rovníc nájdeme obežnú dobu družice

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\kappa M_Z}} \quad (3.17)$$

Podobný vzťah platí aj pre periódy obehu planét okolo Slnka, len hmotnosť Zeme musíme zameniť hmotnosťou Slnka. Z neho potom vychádza, že pre periódy planét a ich vzdialenosť od Slnka je pomer

$$\frac{T^2}{R^3} \quad (3.18)$$

rovnaký. Toto predstavuje jeden z Keplerových zákonov pre popis pohybu planét, a Newtonovi bol známy. Newton ukázal spätným postupom, že tento Keplerov zákon vedie na gravitačnú silu nepriamo úmernú štvorcu vzdialenosti, čo motivovalo jeho formuláciu gravitačného zákona.

Družica, ktorá by obiehala okolo Zeme na najnižšej možnej orbite, t.j. vo vzdialenosti R_Z by mala najkratšiu dobu obehu,

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{R_Z^3}{\kappa M_Z}} = 1,4 \text{ hod.} \quad (3.19)$$

Jej rýchlosť obehu nazývame *prvou kozmickou rýchlosťou*,

$$v_{1c} = \frac{2\pi R_Z}{T_{\min}} = 7,9 \text{ km.s}^{-1}. \quad (3.20)$$

Príklad: Medzinárodná vesmírna stanica ISS je asi 400km nad povrchom Zeme, t.j. vzdialenosť od stredu Zeme bude $R = 6371\text{km} + 400\text{km} = 6771\text{km}$. Doba jej obehu bude potom

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(6771 \cdot 10^3)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}} = 5550\text{s} = 92,46 \text{ min} = 1,54 \text{ hod.} \quad (3.21)$$

Príklad: Aká je približná vzdialenosť Mesiaca od Zeme ak vieme, že jeho

priemerná doba obehu je 27 dní? Obrátíme vzťah medzi periódou a vzdialenosťou a nájdeme

$$R = \left(\frac{\kappa M_Z T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot (27 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \quad (3.22)$$

$$= 3,8 \cdot 10^8 \text{m} = 380000 \text{km} \quad (3.23)$$

Stredná vzdialenosť Mesiaca od Zeme ¹⁷ je v skutočnosti 384399km, s čím náš jednoduchý výpočet celkom dobre súhlasí.

Príklad: Pre porovnanie spočítame veľkosť rýchlosti Zeme okolo Slnka. Stredná vzdialenosť Slnka od Zeme, tzv. jedna astronomická jednotka (1AU) predstavuje asi 150.10⁶km. Obežná rýchlosť teda bude

$$v_Z = \frac{2\pi 1\text{AU}}{1\text{rok}} = 29,9 \text{km} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (3.24)$$

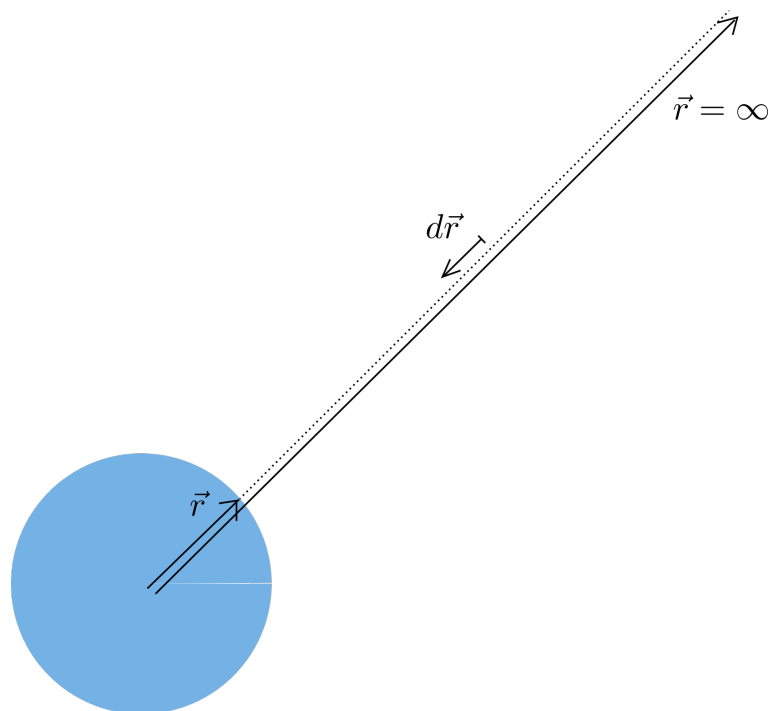
Úloha: Nájdite výšku geostacionárnej dráhy, t.j. výšku v akej sa musí družica pohybovať aby jej jedna perióda trvala 24 hod.

3.4 Potenciálna energia v gravitačnom poli Zeme

Keď sa teleso nachádza na povrchu Zeme, a my ho chceme dostať zo Zeme preč, do širšieho vesmíru, musíme konať prácu, resp. motory musia konať prácu. Pretože gravitačná sila daná Newtonovým zákonom je potenciálová, môžeme prácu nájsť z rozdielu potenciálnej energie telesa na povrchu Zeme a vo veľmi veľkej vzdialenosti od Zeme. V prípade gravitačného poľa sa volí referenčné miesto, kde je potenciálna energia nulová miesto nekonečne vzdialené, kde je sila takmer nulová. Potenciálna energia v mieste \vec{r} potom bude

$$U_G(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \kappa \frac{M_Z \cdot m}{r^2} \vec{e} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \kappa \frac{M_Z \cdot m}{r^2} \vec{e} \cdot d\vec{r} \quad (3.25)$$

¹⁷<https://en.wikipedia.org/wiki/Moon>



Obr. 45: Zobrazenie krivky po ktorej integrujeme silu pre výpočet potenciálnej energie. Krivka zodpovedá obrátenej trajektórii prenosu telesa z nekonečna na povrch Zeme.

(zmena orientácie krivky zmení znamienko integrálu) kde \vec{r} je polohový vektor telesa s hmotnosťou m vzhľadom na stred Zeme, a \vec{e} jednotkový vektor orientovaný z tejto polohy do stredu Zeme. Budeme integrovať po radiálnej priamke od miesta na povrchu Zeme do nekonečna, ako je zobrazené na Obr. 45. Pre túto voľbu integračnej krivky máme $\vec{e} \cdot d\vec{r} = -dr$ a teda

$$U_G(\vec{r}) = - \int_r^\infty \kappa \frac{M_Z \cdot m}{r^2} dr = \left[\kappa \frac{M_Z m}{r} \right]_r^\infty = -\kappa \frac{M_Z m}{r}. \quad (3.26)$$

Práca potrebná na vynesenie telesa s hmotnosťou m do nekonečnej vzdialenosti od Zeme potom bude daná rozdielom energie telesa na konci vyňatia mínus potenciálne energia na začiatku prenášania (t.j. v zmysle vzťahu (2.147),

$$W = U(\infty) - U(R) = 0 - \left(-\kappa \frac{M_Z m}{R} \right) = \kappa \frac{M_Z m}{R} \quad (3.27)$$

Toto množstvo práce sa konvenčne charakterizuje pomocou *druhej kozmickej rýchlosti*, to je rýchlosť, ktorú treba telesu udeliť na Zemi, aby sa dokázalo od nej úplne odpútať a doletieť, ak mu je čas dopriať, až do nekonečna. Zrýchľovanie telesa prebieha v čase, keď sa koná na telese práca. Keď dosiahne rýchlosť v_{2c} , nadobudne kinetickú energiu

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{2c}^2 \quad (3.28)$$

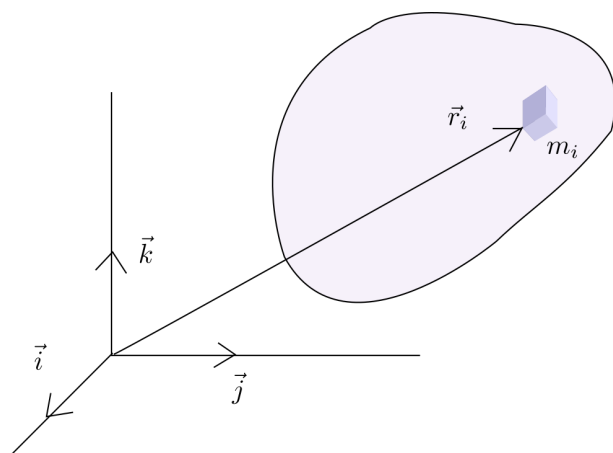
Následne si predstavíme, že motory sa vypili, vonkajšia práca sa prestane konať a celková mechanická energia sa už pri následnom pohybe zachováva. Vyčíslime ju v dvoch momentoch: (1) keď je raketa urýchlená na v_{2c} , motory sa vypili, no raketa sa nachádza ešte relatívne blízko povrchu Zeme, (2) keď je raketa dostatočne vzdialená od Zeme, jej rýchlosť už poklesla takmer na nulu, lebo narástla jej potenciálna energia zo zápornej na nulovú

$$E_{k,1} + U_1 = E_{k,2} + U_2 \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{2} m v_{2c}^2 + \left(-\kappa \frac{M_Z m}{R_Z} \right) = 0 + 0 \quad (3.30)$$

$$v_{2c} = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \quad (3.31)$$

Úloha: Aká veľká je úniková rýchlosť pre raketu začínajúcu na Zemi z gravitačného pôsobenia Slnka? Hmotnosť Slnka získajte zo známej vzdialenosti Zeme od Slnka (150 Mkm) a doby obehu Zeme okolo Slnka.



Obr. 46: Ideálne tuhé teleso si myšlienково budeme deliť na malé hmotné elementy. Zobrazená kocka predstavuje jeden takýto element s indexom i , s hmotnosťou m_i , nachádzajúci sa na pozícii \vec{r}_i .

4 Dynamika tuhých telies

4.1 Ideálne tuhé teleso

Tri Newtonove pohybové zákony boli v časti 2.2 sformulované pre hmotné body. V tejto kapitole ich aplikujeme na telesá rozložené v priestore, pokiaľ sú tieto dostatočne tuhé.

Pod *ideálne tuhým telesom* (itt) budeme rozumieť teleso rozložené v priestore ale také, že ľubovoľné dva body na ňom nemenia svoju vzdialenosť. Takéto teleso sa dokáže len presúvať z miesta na miesto a otáčať sa. Hovoríme, že môže konať *translačný a rotačný pohyb*, no v dôsledku pôsobenia síl sa nikdy nedeformuje.

4.2 Ťažisko

Ideálne teleso si myslene rozdelíme na veľa malých hmotných častí, ktoré už možno považovať za hmotné body. Pohyb týchto hmotných bodov môžeme popísať pomocou Newtonových pohybových zákonov. Ich polohové vektory budeme označovať ako \vec{r}_i a ich hmotnosti m_i , kde $i = 1, \dots, N$ a N je celkový počet častí na ktoré teleso delíme, Obr. 46. Pre ich hmotnosti musí prirodzene platiť $\sum_{i=1}^N m_i = m$.

Príklad: Aj keď sa všetka hmota skladá z atómov, nie je nevyhnutné za delením tuhého telesa na hmotné elementy vidieť rozklad na atómy. Vzďialenosť medzi susednými atómami je asi 10^{-10} m. Napr. pre koleso s polomerom 10 cm, na jednu jeho stranu pripadá asi

$$\frac{\pi 0,1^2}{10^{-10} \cdot 10^{-10}} \approx 3 \cdot 10^{18} \quad (4.1)$$

atómov. Pri numerickom popise takéhoto kolesa ako systému hmotných bodov by úplne postačoval ich menší počet.

Pre popis polohy ideálne tuhého telesa budeme používať polohový vektor jeho ťažiska, ktorý budeme označovať hviezdičkou, \vec{r}^* . Pre dva hmotné body s rovnakou hmotnosťou je ich ťažiskom geometrický priemer ich polôh,

$$\vec{r}^* = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \quad (4.2)$$

Ak by tieto body mali rôzne hmotnosti, potom polohový vektor ťažiska bude bližšie k polohe ťažšieho bodu, čo možno dosiahnuť pridaním hmotností ako koeficientov

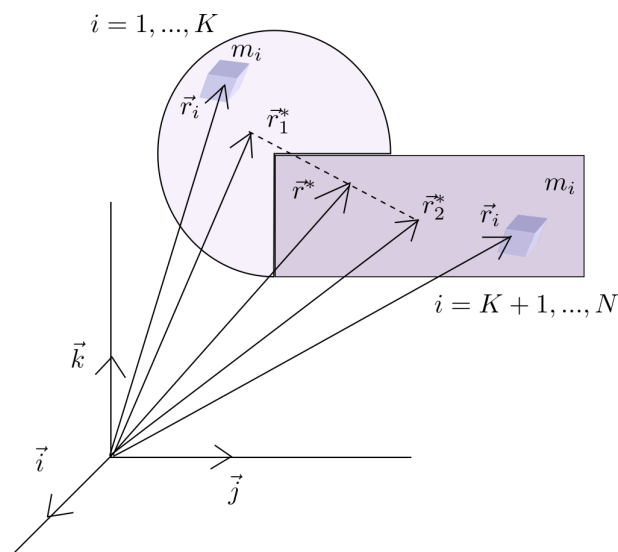
$$\vec{r}^* = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2). \quad (4.3)$$

V prípade, že sú hmotnosti rovnaké, dostávame späť vzťah (4.2). Nakoniec zovšeobecníme posledný výraz na N bodov čím získame definíciu ťažiska systému hmotných bodov

$$\vec{r}^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad m = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (4.4)$$

Príklad: Presvedčíme sa, že podľa vzťahu (4.4) je ťažisko tyče v jej geometrickom strede. Zvolme si počiatok súradnicovej sústavy do jedného konca tyče, os x pozdĺž tyče, jej dĺžku si označme ako l . Tyč si nadelíme na malé hmotné elementy s dĺžkou dx , súradnicou x_i a hmotnosťami $dm = (m/l)dx$. Polohový vektor elementu bude $\vec{r}_i = x_i \vec{i}$ a teda pre ťažisko máme podľa definície

$$\vec{r}^* = \frac{1}{m} \sum_i x_i \vec{i} \frac{m}{l} dx \quad (4.5)$$



Obr. 47: Výpočet polohového vektora ťažiska telesa rozdelením jeho elementov na dve skupiny, pokrývajúce jeho dve časti: obdĺžnik a 3/4-kruhu.

Ak budeme robiť delenie dostatočne jemné, môžeme podobne ako v kinematike nahradiť túto sumu integrálom,

$$\vec{r}^* = \vec{i} \frac{1}{m} \int_0^l x \frac{m}{l} dx = \vec{i} \frac{1}{l} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{l}{2} \vec{i} \quad (4.6)$$

t.j. ťažisko sa naozaj nachádza v polovici tyče.

Ak vieme teleso myslene rozdeliť na M telies s hmotnosťami $m_j, j = 1, \dots, M$, pre ktoré polohové vektory ich ťažísk poznáme, \vec{r}_j^* , potom ťažisko zloženého telesa bude

$$\vec{r}^* = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^M \vec{r}_j^* m_j, \quad (4.7)$$

t.j. čiastkové teleso môžeme nahradiť hmotnými bodmi v ťažiskách.

Dôkaz tohto tvrdenia je nasledovný: Majme teleso s hmotnosťou m ktoré rozdelíme na N malých častí - elementy. Elementy s polohovými vektormi $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_K$ nech vytvoria jednu časť telesa, s hmotnosťou m_1 a ťažiskom \vec{r}_1^* , a ostatné elementy $\vec{r}_{K+1}, \dots, \vec{r}_N$ nech vytvoria jeho druhú časť, s ťažiskom \vec{r}_2^*

(Obr. ??). Potom polohový vektor ťažiska celkového telesa bude

$$\vec{r}^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{m_1 + m_2} \left(\sum_{i=1}^K m_i \vec{r}_i + \sum_{i=K+1}^N m_i \vec{r}_i \right) \quad (4.9)$$

$$= \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{r}_1^* + m_2 \vec{r}_2^*) \quad (4.10)$$

kde sme použili vzťahy pre ťažiská čiastkových telies

$$\vec{r}_1^* = \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^K \vec{r}_i m_i, \quad \vec{r}_2^* = \frac{1}{m_2} \sum_{i=K+1}^N \vec{r}_i m_i \quad (4.11)$$

Opakovaním tohto postupu na čiastkové telesá sa presvedčíme, že to platí pre rozdelenie na akýkoľvek počet telies.

Príklad: Nájdite polohu ťažiska hranola s dĺžkou $l = 3\text{m}$ a profilom v tvare písmena L s hrúbkou $h = 1\text{cm}$ a dĺžkami $d = 10\text{cm}$.

Riešenie: Zorientujeme si súradnicovú sústavu tak, že dĺžka hranola je pozdĺž osi z , a roh profilu L je v počiatku a strany sú v kladných smeroch osí x a y . Zložky polohového vektora ťažiska $\vec{r}^* = x^* \vec{i} + y^* \vec{j} + z^* \vec{k}$ budeme rátať samostatne. Výpočet z^* je totožný s predchádzajúcim príkladom, a teda rovno máme

$$z^* = l/2 = 1,5\text{m}. \quad (4.12)$$

Pre výpočet x^* a y^* využijeme rozdelenie profilu L na dva hranoly s profilmi $1\text{cm} \times 10\text{cm}$ a $9\text{cm} \times 1\text{cm}$, ktorých ťažiská budú v stredoch (Obr. 48),

$$x_1^* = h/2, \quad y_1^* = d/2 \quad (4.13)$$

$$x_2^* = h + (d - h)/2 = (d + h)/2, \quad y_2^* = h/2\text{cm}. \quad (4.14)$$

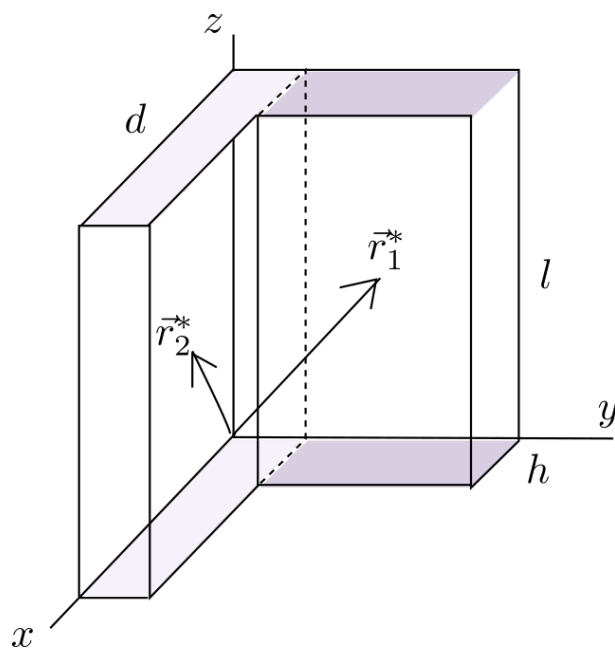
Hmotnosti hranolov budú (ρ je hustota materiálu)

$$m_1 = \rho l d h, \quad m_2 = \rho l (d - h) h \quad (4.15)$$

a preto súradnice celkového ťažiska podľa vzťahu (4.10)

$$x^* = \frac{\rho l d h h/2 + \rho l (d - h) h (h + d)/2}{\rho l h (2d - h)} = \frac{d^2 h/2 + d h^2/2 - h^3/2}{h(2d - h)} \quad (4.16)$$

$$y^* = \frac{\rho l d h d/2 + \rho l (d - h) h h/2}{\rho l h (2d - h)} = \frac{d^2 h/2 + d h^2/2 - h^3/2}{h(2d - h)} \quad (4.17)$$



Obr. 48: Pre výpočet ťažiska si profil rozdelíme na dva hranoly, pre ktoré čiastkové polohové vektory ich ťažísk nájdeme ľahko.

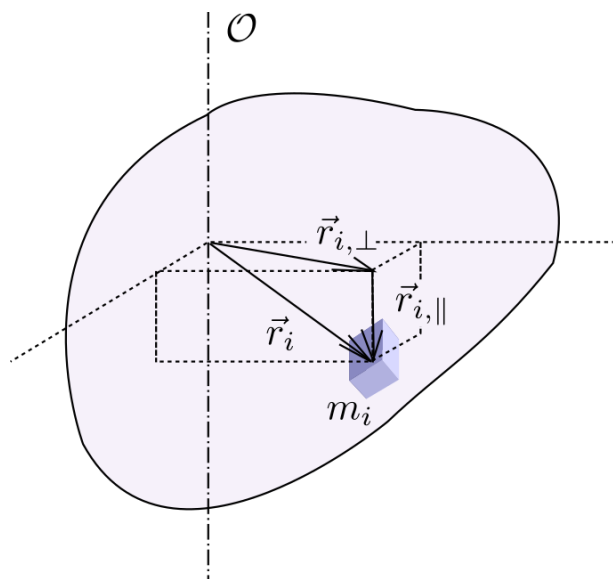
Obe sú teda rovnaké, ako by sme čakali zo symetrie, a rovné

$$x^* = y^* = 2,87\text{cm}. \quad (4.18)$$

Úloha: Pri trojuholníkoch sa ťažisko nachádza v priesečníku ťažníc, t.j. priamok vedúcich z vrcholu do stredu protiláhlej strany. Presvedčte sa že toto je ekvivalentné tu uvedenej definícii ťažiska.

4.3 Moment zotrvačnosti

Na rotačný pohyb telesa nemá vplyv len jeho celková hmotnosť, ale i to, ako je táto hmotnosť rozložená vzhľadom na os otáčania. Miera rozloženia hmotnosti vzhľadom na os otáčania sa nazýva *moment zotrvačnosti*. Jeho



Obr. 49: Polohový vektor \vec{r}_i určuje polohu elementu vzhľadom na os otáčania prechádzajúcu ťažiskom, polohový vektor $\vec{r}_{i,\perp}$ jeho zložku kolmú na os \mathcal{O} . Len veľkosť tejto kolmej zložky vstupuje do definície momentu zotrvačnosti telesa.

veľká hodnota znamená, že veľa hmoty je ďaleko od osi otáčania a roztáčať ako aj brzdiť otáčanie bude náročné. Moment zotrvačnosti je opäť zavedený pomocou rozdelenia telesa na malé elementy. Kolmú vzdialenosť každého elementu od uvažovanej osi otáčania si označíme ako $r_{\perp,i}$ (Obrázok 49). S týmto označením moment zotrvačnosti definujeme vzťahom

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_{\perp,i}^2. \quad (4.19)$$

Moment zotrvačnosti má fyzikálny rozmer $[I] = \text{kg}\cdot\text{m}^2$, a závisí od polohy a orientácie osi otáčania vzhľadom na ktorý sa počíta.

Príklad: Gulička s hmotnosťou $m = 10\text{g}$ a polomerom $R = 1\text{cm}$ má moment zotrvačnosti vzhľadom na os, ktorá prechádza jej stredom menší ako

$$I < mR^2 = 10\text{g}\cdot\text{cm}^2 \quad (4.20)$$

pretože maximálna kolmá vzdialenosť ktorého koľvek elementu od osi otáčania je menšia nanajvýš rovná R . Ak ale budeme túto istú guľičku rýchlo

otáčať na lanku dlhom $d = 0,5\text{m}$ (ktorého hmotnosť nateraz zanedbáme), bude jej moment zotrvačnosti

$$mr_{\perp, \min}^2 < \sum_i m_i r_{\perp, i}^2 < mr_{\perp, \max}^2 \quad (4.21)$$

$$10\text{g} \cdot (50\text{cm})^2 = 25\text{kg} \cdot \text{cm}^2 < I' < 10\text{g} \cdot (50\text{cm} + 2\text{cm})^2 = 27\text{kg} \cdot \text{cm}^2 \quad (4.22)$$

t.j. 2500 až 2700 krát väčší.

Príklad: Nájdite vzťah pre moment zotrvačnosti tyče s dĺžkou l a hmotnosťou m vzhľadom na os otáčania prechádzajúcu jej ťažiskom a kolmú na samotnú tyč.

Riešenie: V ťažisku tyče si zvolíme počiatok súradníc, os x bude rovnobežná s tyčou a tým pádom os otáčania je napríklad os z . Tyč si rozdelíme na elementy s dĺžkou dx , hmotnosťou $dm = (m/l)dx$ a vzdialenosťou x_i od osi otáčania, v tomto prípade je to totožné so vzdialenosťou od počiatku. Moment zotrvačnosti podľa definície (4.19) bude

$$I = \sum_i x_i^2 \frac{m}{l} dx, \quad (4.23)$$

ktorý opäť, v limite malých elementov spočítame integrovaním,

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12} ml^2. \quad (4.24)$$

Steinerova veta je vzťah umožňujúci výpočet moment zotrvačnosti vzhľadom na os \mathcal{O}' pomocou momentu zotrvačnosti vzhľadom na os \mathcal{O} , ktorá je k nej rovnobežná a prechádza ťažiskom. Ak si označíme ako kolmú vzdialenosť týchto dvoch osí d a hmotnosť telesa m , potom Steinerova veta tvrdí,

$$I_{\mathcal{O}'} = I_{\mathcal{O}} + md^2. \quad (4.25)$$

Jedným z dôsledkov Steinerovej vety je, že moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom je minimálny spomedzi všetkých ostatných, s touto osou rovnobežných osí otáčania.

Príklad: Aký je moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os prechádzajúcu jej koncom, kolmú na samotnú tyč?

Riešenie: Pre os prechádzajúcu ťažiskom sme vyššie našli výsledok

$$I^* = \frac{1}{12}ml^2 \quad (4.26)$$

Tu zadaná os otáčania je vzdialená od ťažiska o $l/2$ a preto moment zotrvačnosti vzhľadom na ňu, podľa Steinerovej vety, bude

$$I = I^* + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2. \quad (4.27)$$

Dôkaz Steinerovej vety vychádza opäť z rozdelenia telesa na elementy, Obr. 50.

Polohový vektor elementu i vzhľadom na ťažisko, \vec{r}_i , si rozdelíme na zložku kolmú na os otáčania, $\vec{r}_{i,\perp}$, a zložku rovnobežnú s touto osou, $\vec{r}_{i,\parallel}$. Zavedieme si vektor \vec{d} , charakterizujúci vysunutie osi \mathcal{O}' vzhľadom na \mathcal{O} , s dĺžkou d , ktorý je kolmý na tieto osi. Podobne ako \vec{r}_i si rozdelíme polohový vektor tohto elementu i vzhľadom na bod, ktorý vznikne vysunutím ťažiska o vektor \vec{d} ,

$$\vec{r}'_i = \vec{r}'_{i,\perp} + \vec{r}'_{i,\parallel}. \quad (4.28)$$

Evidentne, vektor posunutia osí \vec{d} prepája čiarkované a nečiarkované vektory,

$$\vec{r}'_{i,\perp} = \vec{r}_{i,\perp} + \vec{d}, \quad (4.29)$$

z čoho nájdeme,

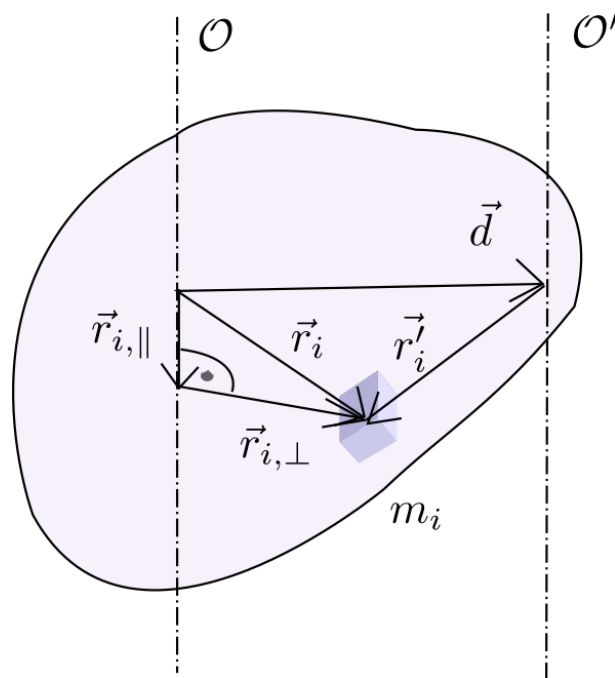
$$|\vec{r}'_{i,\perp}|^2 = |\vec{r}_{i,\perp} + \vec{d}|^2 \quad (4.30)$$

$$= r_{i,\perp}^2 + 2\vec{r}_{i,\perp} \cdot \vec{d} + d^2 \quad (4.31)$$

Tento výraz dosadíme do vzťahu pre moment zotrvačnosti vzhľadom na \mathcal{O}' ,

$$I' = \sum_i m_i (r'_{\perp,i})^2 = \sum_i m_i \left(r_{\perp,i}^2 + 2\vec{r}_{\perp,i} \cdot \vec{d} + d^2 \right) \quad (4.32)$$

$$= I + md^2 + 2\vec{d} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad (4.33)$$



Obr. 50: Polohový vektor \vec{r}_i určuje polohu elementu vzhľadom na os otáčania prechádzajúcu ťažiskom, polohový vektor \vec{r}'_i jeho polohu vzhľadom na os \mathcal{O}' , vysunutú voči osi \mathcal{O} o vektor \vec{d} . Pre vyjadrenie momentu zotrvačnosti sú dôležité len kolmé vzdialenosti elementov od osi otáčania, preto si polohové vektory rozdelíme na zložky kolmé a rovnobežné vzhľadom na os.

kde v poslednom člene sme využili, že

$$\vec{d} \cdot \vec{r}_i = \vec{d} \cdot (\vec{r}_{i,\perp} + \vec{r}_{i,\parallel}) = \vec{d} \cdot \vec{r}_{i,\perp}, \quad (4.34)$$

pretože \vec{d} je kolmý na všetky vektory rovnobežné s osami otáčania, a teda aj na všetky vektory $\vec{r}_{i,\parallel}$.

Posledný člen v (4.33) je nulový, pretože polohový vektor ťažiska *vzhľadom* na ťažisko je nulový vektor,

$$\frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i = 0. \quad (4.35)$$

Ostatok v rovnici (4.33) dáva vyššie uvedenú Steinerovu vetu.

4.4 Prvá pohybová rovnica itt

Pohyb hmotného bodu bol popísaný 2. Newtonovým zákonom. Prvá pohybová rovnica ideálne tuhého telesa má takú istú formu,

$$m\vec{a}^* = \vec{F}. \quad (4.36)$$

kde ale \vec{a}^* je zrýchlenie *ťažiska telesa* a \vec{F} je súčet všetkých síl, ktoré na teleso pôsobia, aj keď pôsobia v rôznych miestach tohto telesa. Táto rovnica nepredstavuje nový zákon, ale je dôsledkom už nám známych Newtonových zákonov - dá sa z nich odvodiť.

Podobne, ako v dynamike hmotných bodov, zavádzame *hybnosť* telesa pomocou rýchlosti

$$\vec{p} = m\vec{v}^* \quad (4.37)$$

s ktorou prvú pohybovú rovnicu možno prepísať do tvaru

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}. \quad (4.38)$$

Pri odvodení tohto výsledku budeme opäť vychádzať z rozdelenia telesa na malé elementy. Každý z nich, považovaný za hmotný bod, musí spĺňať 2. Newtonov zákon,

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.39)$$

kde \vec{F}_i je externá sila pôsobiaca v tomto bode telesa, napr. gravitačná alebo sila v mieste \vec{r}_i uchytenej pružiny a \vec{F}_{ij} sú sily, ktorými pôsobia elementy

$j = 1, \dots, N, j \neq i$ na uvažovaný i -ty element. Spočítaním všetkých N rovníc (4.39) dokopy nájdeme,

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \quad (4.40)$$

Súčet všetkých síl, ktorými na seba vzájomne pôsobia elementy tuhého telesa dá nulu vďaka 3. Newtonovmu zákonu,

$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}. \quad (4.41)$$

Sumu na ľavej strane možno vyjadriť pomocou ťažiska telesa,

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = m \vec{r}^* \quad (4.42)$$

a tak výsledne dostaneme

$$\frac{d^2}{dt^2} m \vec{r}^* = \sum_i \vec{F}_i, \quad (4.43)$$

výsledok totožný s rovnicou (4.36).

Príklad: Ak je v telese hmotnosť nehomogénne rozdelená, t.j. rôzne elementy telesa v mieste \vec{r}_i s objemom dV majú rôznu hmotnosť dm_i , tak súčet všetkých gravitačných síl (v homogénnom poli) pôsobiacich na teleso je

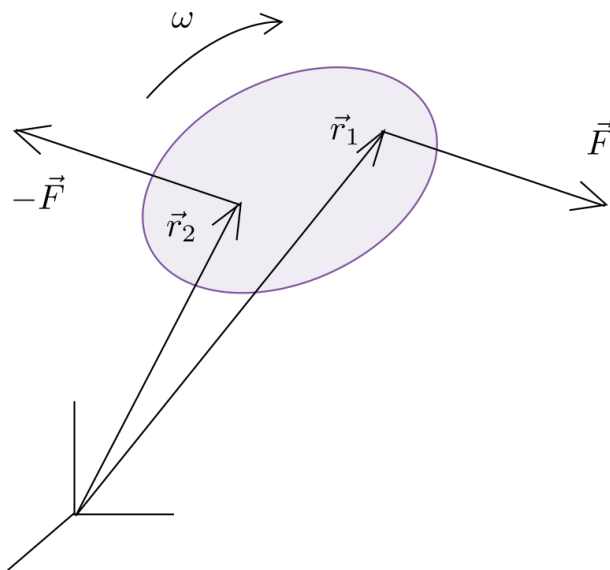
$$\vec{F} = \sum_i dm_i \vec{g} = m \vec{g} \quad (4.44)$$

4.5 Redukcia síl a moment sily

Na teleso môže pôsobiť viac síl s rôznymi orientáciami a v mnohých miestach. Ak ich počet bude N , tak si túto informáciu môžeme predstaviť ako množinu polohových vektorov pôsobísk a vektorov síl,

$$\left\{ \vec{r}_1, \vec{F}_1; \vec{r}_2, \vec{F}_2; \dots; \vec{r}_N, \vec{F}_N \right\}. \quad (4.45)$$

t.j. $2N \cdot 3 = 6N$ čísiel. Pri zaoberaní sa telesom, ktoré je deformovateľné, by všetka táto informácia bola potrebná pre sledovanie jeho pohybu. V prípade



Obr. 51: Pohybový účinok dvoch síl pôsobiacich v rôznych bodoch bude roztáčanie telesa.

ideálne tuhého telesa dokážeme tieto sily *zredukovať* len na dve veličiny: celkový súčet síl pôsobiacich v ťažisku, ktorý jediný vplýva na pohyb ťažiska, ako sme videli v predchádzajúcej časti, a celkový *moment síl*, ktorý určí otáčanie telesa, ako uvidíme v nasledovnej kapitole.

Zo skúsenosti vieme, že ak na teleso pôsobia dve opačne orientované sily v rôznych miestach, tak ich výsledok bude roztáčanie telesa (Obr. 51). Je to príklad pohybového účinku síl, ktorých celkový súčet je nulový, a teda pri pôsobení ktorých sa pohybový stav ťažiska podľa 1. pohybovej rovnice itť meniť nebude.

Pre charakterizáciu otáčavého účinku síl pôsobiacich na teleso *zavádzame* veličinu moment sily

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (4.46)$$

kde \vec{r} je polohový vektor pôsobiska sily \vec{F} . Veľkosť momentu sily je daná plochou, ktorú polohový vektor a sila vytvárajú,

$$D = rF \sin(\phi), \quad (4.47)$$

Fyzikálna jednotka momentu sily je $[D] = \text{N.m}$, a hoci rozmerovo ide o rovnakú jednotku ako má energia, význam momentu sily je úplne iný - dĺžka tu vystupuje ako poloha kde pôsobí sila a nie dráha na ktorej pôsobí. Smer

momentu sily je kolmý na rovinu vektorov \vec{r} a \vec{F} , ako to vyplýva z definície vektorového súčinu.

Pre uvedený príklad dvoch síl na obrázku 51, bude výsledný moment síl

$$\vec{D} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} \quad (4.48)$$

Ak by boli vektory $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ a \vec{F} rovnobežné, bude ich vektorový súčin nulový, rovnako ako ich otáčavý účinok.

Pri momente sily je dôležité si uvedomiť, že jeho veľkosť aj smer závisia od voľby súradnicovej sústavy vzhľadom na teleso. To nás nemusí rozrušovať, nakoľko aj *popis* otáčania od tejto voľby bude závisieť, a až v konečnom výsledku samotný pohyb od tejto voľby závisieť nebude. Na druhej strane, v prípade že je celkový súčet síl nulový, nebude ich výsledný moment závisieť od polohy počiatku súradníc, ako je to zrejmé napr. z rovnice (4.48) kde moment sily závisí len od relatívneho posunutia jedného pôsobiska voči druhému, $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

Celkový moment síl je súčet momentov všetkých síl pôsobiacich na teleso,

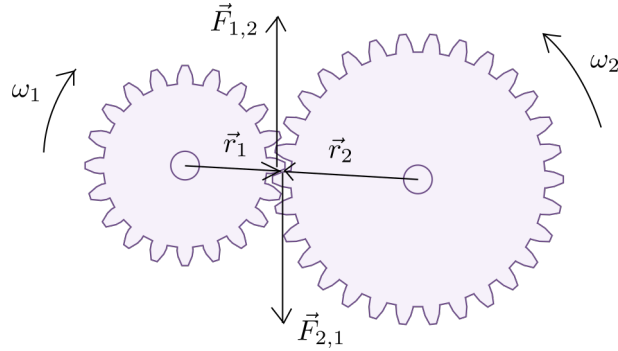
$$\vec{D} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (4.49)$$

Celkový moment síl ako vektor má tri zložky, podobne ako vektor celkového súčtu síl a preto miesto pôvodných $6N$ čísiel uvedených v (4.45) potrebujeme pre jednoznačný popis pohybu iba len 6 čísiel - vektory \vec{D} a \vec{F} . Toto predstavuje výraznú redukciu potrebných údajov.

Príklad: Ak je v telese hmotnosť aj nehomogénne rozdelená, t.j. rôzne elementy telesa na miestach \vec{r}_i s tým istým objemom dV majú rôznu hmotnosť dm_i , tak súčet všetkých momentov gravitačných síl (v homogénnom poli) pôsobiacich na teleso je ekvivalentný celkovej gravitačnej sile pôsobiacej v jeho ťažisku

$$\vec{D}_g = \sum_i \vec{r}_i \times dm_i \vec{g} = \left(\sum_i dm_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} = \vec{r}^* \times m \vec{g}. \quad (4.50)$$

Tento výsledok sa často používa pri riešení problémov, keď sa gravitačné pôsobenie na iba nahrádza jeho pôsobením len v ťažisku.



Obr. 52: Najjednoduchší prevod sa skladá z dvoch kolies v kontakte. Sily vytvárajúce moment sily sú spriahnuté prostredníctvom 3. Newtonovho zákona. Predpokladáme, že ľavé koleso je poháňané, takže pravé koleso naň pôsobí momentom sily proti jeho otáčaniu - predstavuje záťaž.

Príklad: Mechanický prevod pomocou kolies s rôznym polomerom slúži na zmenu uhlovej rýchlosti, no rovnako dôležitá je aj s tým súvisiaca zmena momentu sily. Na obrázku 52 sú dve kolesá prevodu s polermi r_1 a r_2 , a teda s prevodovým pomerom $\eta = r_2/r_1$ (poháňané koleso ku hnanému).

Vzťah medzi uhlovými rýchlosťami dostaneme z podmienky, že v kontakte kolesa neprešmykujú, t.j. dĺžky oblúčikov pootočenia sa rovnajú,

$$ds_1 = ds_2 \quad (4.51)$$

$$r_1 d\phi_1 = r_2 d\phi_2 \quad (4.52)$$

$$r_1 \frac{d\phi_1}{dt} = r_2 \frac{d\phi_2}{dt} \quad (4.53)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{\eta} \quad (4.54)$$

Vzťah pre moment sily pôsobiacej na kolesá prevodu nájdeme z 3. Newtonovho zákona. Predpokladajme, že prvé koleso je poháňané určitým momentom sily \vec{D} , ktorý vyvoláva uhlovú rýchlosť ω_1 , t.j. je orientovaný smerom *do* roviny danej obrázkom. Poháňané ľavé koleso pôsobí silou $\vec{F}_{2,1}$ na pravé koleso. Moment tejto sily, pôsobiacej na pravé koleso je

$$\vec{D}_{2,1} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,1}, \quad (4.55)$$

t.j. je orientovaný smerom *k nám* z roviny obrázku, a teda vyvoláva naznačenú rotáciu ω_2 . Ako reakcia, pravé koleso pôsobí späť na prvé momentom sily

$$\vec{D}_{1,2} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,2} = -\vec{r}_1 \times \vec{F}_{2,1}, \quad (4.56)$$

orientovaný *k nám*, a teda *proti* poháňaciemu momentu sily \vec{D} , a teda ľavé koleso spomaľuje, predstavuje preň záťaž.

Pomer veľkostí týchto previazaných momentov je

$$\frac{D_{21}}{D_{12}} = \frac{r_2 F_{1,2}}{r_1 F_{1,2}} = \eta. \quad (4.57)$$

Príklad: Jednoramenný rebrík s hmotnosťou $m = 10\text{kg}$ a s dĺžkou $l = 2\text{m}$ sa opiera o stenu tak, že s podlahou zvierá uhol $\alpha = 55^\circ$. Koeficient trenia medzi rebríkom a podlahou je $\mu = 0,7$, trenie medzi stenou a rebríkom zanedbajte. Akú maximálnu hmotnosť M_m môže mať človek na to, aby sa dostal až na vrchol rebríka?

Riešenie: Budeme riešiť úlohu, keď sa človek nachádza vo výške h , a následne budeme v nájdenom výsledku skúmať špeciálne prípady, na ktoré sa príklad pýta. Podmienkou toho, aby sa rebrík (ako tuhé teleso) nehýbal je, že celkový súčet síl a celkový súčet momentov síl sú nulové. Toto samozrejme platí pre všetky ich zložky. V úlohe musíme identifikovať sily reakcií na rebrík od steny aj podlahy, a trecie sily v týchto kontaktoch. Súčet x a y zložiek síl dá,

$$-T_p + R_s = 0 \quad (4.58)$$

$$-Mg - mg + R_p = 0 \quad (4.59)$$

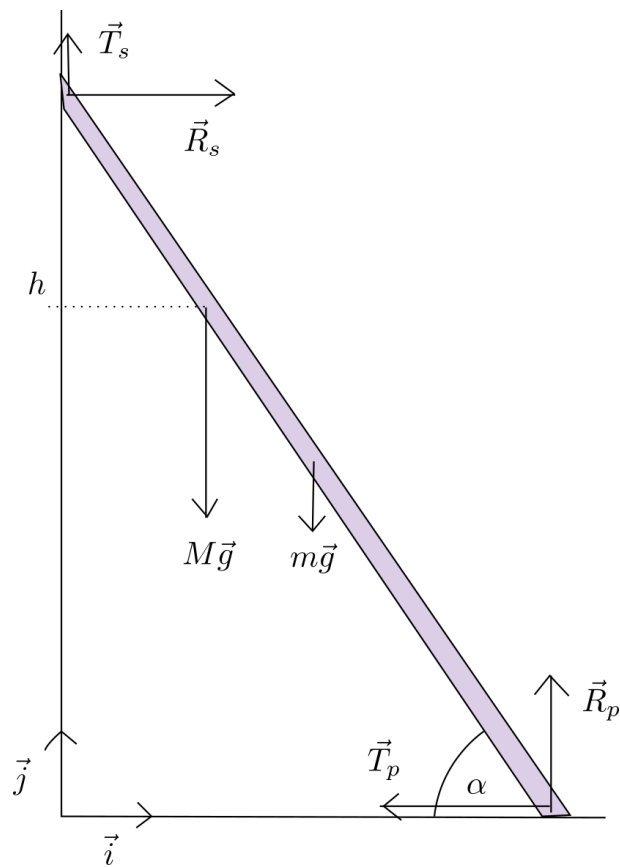
V smere osi z v tomto prípade žiadne sily nepôsobia. Trecie sily predstavujú statické trenie, a preto

$$|T_p| \leq \mu |R_p| \quad (4.60)$$

Pre výpočet momentov síl si zvolíme bod, vzhľadom na ktorý budeme momenty síl vyhodnocovať ako miesto, kde je najväčší počet pôsobiacich síl, t.j. horný alebo dolný koniec rebríka. Tak povedzme dolný. Potom momenty síl \vec{T}_p a \vec{R}_p budú vzhľadom na toto miesto nulové, lebo majú nulové vektory pôsobísk, a ostatné sily dajú momenty síl len v smere osi z ,

$$\frac{l}{2} mg \sin(\alpha + \pi/2) + \frac{h}{\sin(\alpha)} Mg \sin(\alpha + \pi/2) - l R_s \sin(\pi - \alpha) = 0 \quad (4.61)$$

Rovnice (4.58), (4.59) a (4.61) sú tri rovnice, z ktorých pre ľubovoľné hodnoty naklonenia α a výšky vystúpenia h nájdeme tri neznáme - T_p , R_p a R_s . Nájdene možnosti ale musia spĺňať nerovnosť (4.60).



Obr. 53: Označenie síl pôsobiacich na rebrík pri jeho opretí o stenu. Vo výške h sa na rebríku nachádza človek s hmotnosťou M . Treciu silu medzi rebríkom a stenou, \vec{T}_s , v tomto príklade zanedbávame.

Budeme následne hľadať kritický stav zodpovedajúci maximálnej výške h_m , kam môže človek vyjsť, t.j. pridali sme jednu neznámu navyše, h_m . Pre $h > h_m$ nebude nerovnica (4.60) splnená, v kritickom momente budú akurát splnené, a preto

$$R_s = T_p = \mu R_p = \mu(m + M)g \quad (4.62)$$

$$\frac{l}{2}mg \cos(\alpha) + \frac{h}{\sin(\alpha)}Mg \cos(\alpha) - l\mu(m + M)g \sin(\alpha) = 0 \quad (4.63)$$

kombináciou ktorých nájdeme

$$\frac{h}{l \sin(\alpha)} = \mu\left(1 + \frac{m}{M}\right) \tan(\alpha) - \frac{m}{2M} \quad (4.64)$$

$$= \mu \tan(\alpha) + \frac{m}{M} \left(\mu \tan(\alpha) - \frac{1}{2} \right) \quad (4.65)$$

Teraz skúmame, akú maximálnu hmotnosť môže mať človek, ktorých dokáže vyjsť až na vrch rebríka. V tomto prípade bude $h_m = l \sin(\alpha)$ a pre maximálnu hmotnosť bude platiť,

$$1 = \mu \tan(\alpha) + \frac{m}{M_m} \left(\mu \tan(\alpha) - \frac{1}{2} \right) \quad (4.66)$$

$$\frac{M_m}{m} = \frac{\mu \tan(\alpha) - \frac{1}{2}}{1 - \mu \tan(\alpha)} \quad (4.67)$$

Pre uhol $\alpha < \tan^{-1}(1/(2\mu))$ nebude rebrík stabilný pre žiadnu hmotnosť človeka, a na druhej strane, pre $\alpha > \tan^{-1}(1/(\mu))$ bude rebrík už stabilný pre ľubovoľnú hmotnosť človeka (ak to mechanicky unesie. Pre uhly medzi týmito hodnotami bude existovať horná hranica hmotnosti človeka, ktorý dokáže vyliezť hore, daná vzťahom (4.67).

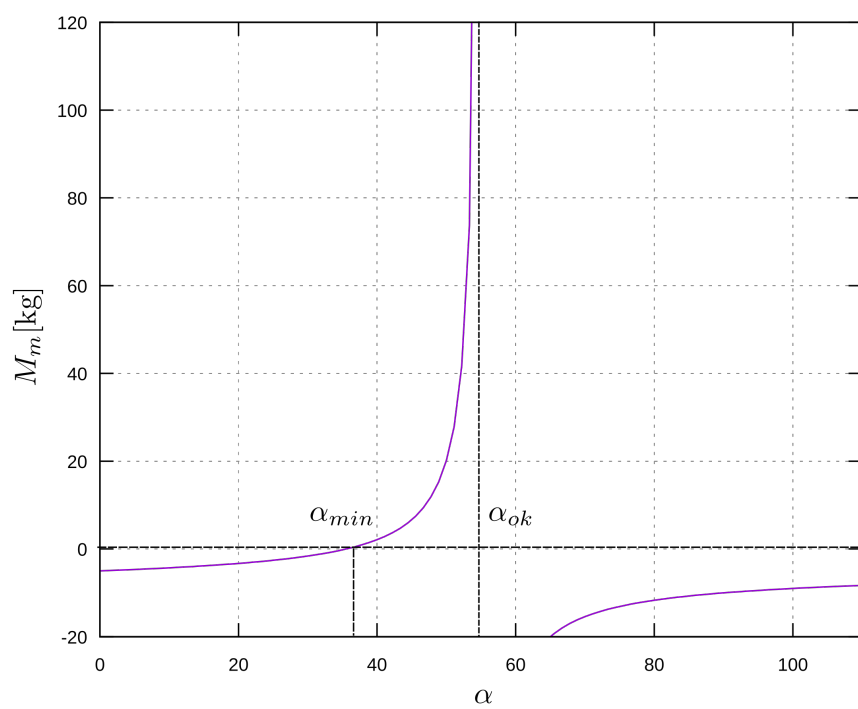
Pre získanie predstavy skúsme dosadiť odhad relevantných premenných. Pre hmotnosť rebríka cca $m = 10\text{kg}$, koeficient trenia $\mu \sim 0,7$ (guma na betóne) nájdeme minimálny uhol, pre ktorý je rebrík stabilný aj bez človeka (t.j. pre $h = 0$)

$$\alpha_{min} = \tan^{-1}(1/(2\mu)) = 35,5^\circ \quad (4.68)$$

a uhol, nad ktorým už na hmotnosti nezáleží (t.j. $M_m \rightarrow \infty$)

$$\alpha_{ok} = \tan^{-1}(1/(\mu)) = 55,01^\circ. \quad (4.69)$$

Medzi tým predstavuje funkcia (4.67) prudko rastúcu nelineárnu funkciu, ktorú je pre predstavu vhodné vykresliť (Obr. 54).



Obr. 54: Graf závislosti hmotnosti človeka, ktorý môže vystúpiť na vrch rebríka od uhlu jeho naklonenia voči podlahe (4.67.)

4.6 Druhá pohybová rovnica itt

4.6.1 Všeobecná formulácia

Prvá pohybová rovnica popisuje pohyb ťažiska. Okrem toho, tuhé teleso sa pri pohybe aj otáča, mení sa jeho orientácia. Toto popisuje druhá pohybová rovnica itt. Otáčanie okolo pevnej osi predstavuje najjednoduchší prípad rotácie, kombinácia translačného pohybu a rotácie okolo osi, ktorá nemení svoj smer, čiastočne komplikovanejší príklad. Obe tieto situácie si detailne popíšeme. Prípad všeobecných rotácií v priestore je technicky náročnejší problém, ktorý sa rozoberá v kurzoch teoretickej mechaniky, a nebude predmetom tohto kurzu.

Napriek rozdielu v technickej náročnosti pri úplnom riešení, všetky tri spomenuté prípady rotácií možno formálne zapísať jedinou rovnicou - druhou pohybovou rovnicou itt v tvare

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{D}, \quad (4.70)$$

kde \vec{D} je celkový súčet momentov síl pôsobiacich na teleso, zavedený v predchádzajúcej časti a \vec{L} je *moment hybnosti* telesa,

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (4.71)$$

zavedený nateraz pomocou rozkladu na malé hmotné elementy s polohovými vektormi \vec{r}_i a hybnosťami $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$. Neskôr uvidíme, ako možno vyjadriť moment hybnosti pomocou uhlovej rýchlosti telesa v prvých dvoch vyššie spomínaných príkladoch rotovania telesa.

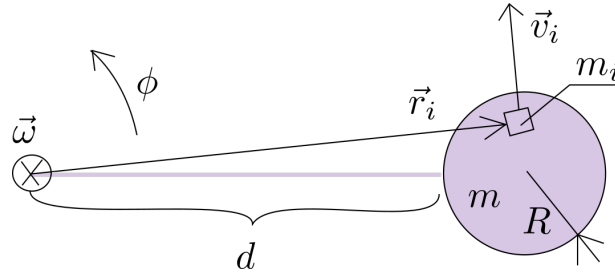
Príklad:

V kapitole venovanej momentu zotrvačnosti sme použili príklad guľičky s hmotnosťou $m = 10\text{g}$ s polomerom $R = 1\text{cm}$ na lanku s dĺžkou $d = 50\text{cm}$. Jej moment zotrvačnosti vzhľadom na stred otáčania sme odhadli ako

$$I \sim m(d + R \pm R)^2 = (26 \pm 1)\text{kg}\cdot\text{cm}^2. \quad (4.72)$$

Lanko chytíme na opačnom konci ako je guľička a guľičku rýchlo roztočíme v *horizontálnej rovine* (Obr. ??) tak, že spraví tri obrátky za sekundu. Uhlová rýchlosť hmotných bodov guľičky bude

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1/3} = 18,84\text{s}^{-1}. \quad (4.73)$$



Obr. 55: Gulička, uchytená na tenkom vlákne, má moment hybnosti, ktorý dokážeme vyjadriť pomocou jej momentu hybnosti a uhlovej rýchlosti jej otáčania.

Polohové vektory bodov vzhľadom na stred otáčania sú približne kolmé na ich obvodové rýchlosti. Orientácia výsledného momentu hybnosti podľa (4.71) bude kolmo na rovinu otáčania a jeho veľkosť, ak použijeme vzťah $v_i = \omega r_i$,

$$L = \sum_i r_i m_i v_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I \omega \quad (4.74)$$

$$m r_{min}^2 \omega < \sum_i r_i^2 m_i \omega < m r_{max}^2 \omega \quad (4.75)$$

$$L = m(d + R \pm R)^2 \omega = I \omega = (490 \pm 20) \text{kg} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.76)$$

Rovnicu (4.70), podobne ako 1. pohybovú rovnicu itt, odvodíme z 2. Newtonovho zákona pre hmotné body rozdelením itt na malé hmotné elementy s hmotnosťami dm_i , ktoré sa nachádzajú na miestach \vec{r}_i . V mieste každého elementu pôsobia vonkajšie sily \vec{F}_i a vnútorné sily \vec{F}_{ij} , popisujúce pôsobenie j -tych elementov na i -ty. 2. Newtonov zákon pre všetky tieto elementy dá N rovníc,

$$dm_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.77)$$

Intuitívne vieme, že otáčanie spôsobuje nenulový moment vonkajších síl, a ten aby sme získali, musíme vektorovo prenásobiť každú z týchto rovníc zľava s \vec{r}_i , pretože výsledný moment sily je daný vzťahom

$$\vec{D} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (4.78)$$

Spočítaním prenásobených rovníc (4.77) dostaneme

$$\sum_i dm_i \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} \vec{v}_i = \vec{D} + \sum_{i,j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \quad (4.79)$$

Posledná suma sa rovná nule kvôli charakteru síl akcie-reakcie. V súčte sa totiž vyskytujú členy typu $\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}$ aj $\vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = -\vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}$. Ich spočítaním máme

$$\dots \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + (-1) \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} \dots = \dots (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} \dots \quad (4.80)$$

Sila \vec{F}_{12} má ale presne smer spojnice miest bodov \vec{r}_1 a \vec{r}_2 , t.j. $\vec{F}_{12} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ a preto bude ich vektorový súčin nulový.

Ľavú stranu možno prepísať nasledovne,

$$\sum_i dm_i \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i dm_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \right), \quad (4.81)$$

pretože spätne podľa pravidiel derivovania súčtinu,

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = \left(\frac{d}{dt} \vec{r} \right) \times \vec{v} + \vec{r} \times \left(\frac{d}{dt} \vec{v} \right) \quad (4.82)$$

$$= \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \left(\frac{d}{dt} \vec{v} \right) = 0 + \vec{r} \times \left(\frac{d}{dt} \vec{v} \right). \quad (4.83)$$

Výraz v zátvorke (4.81) sa nazýva celkový *moment hybnosti*,

$$\vec{L} = \sum_i dm_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (4.84)$$

a tým nachádzame všeobecný tvar rovnice (4.70),

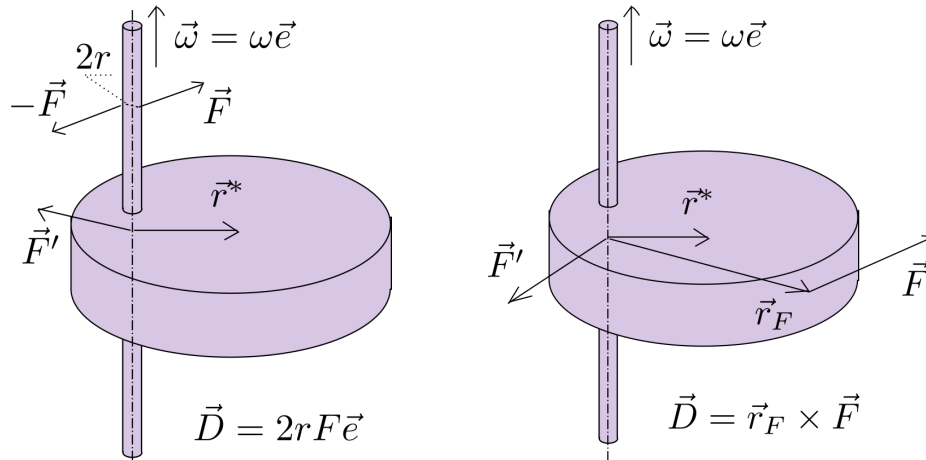
$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{D}. \quad (4.85)$$

4.6.2 Otáčanie okolo pevnej osi

V prípade otáčania okolo pevnej osi (obr. 56) je výhodné zvoliť počiatok súradnicovej sústavy na osi otáčania. Uhlová rýchlosť bude mať smer totožný s orientáciou osi otáčania, $\vec{\omega} = \omega \vec{e}$, a možno ju vybrať pred sumu cez elementy,

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times dm_i \vec{v}_i = \omega \sum_i dm_i \vec{r}_i \times (\vec{e} \times \vec{r}_i) \quad (4.86)$$

$$= \omega \sum_i dm_i (\vec{e} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{e} \cdot \vec{r}_i)), \quad (4.87)$$



Obr. 56: Dve situácie pôsobenia síl a z nich vyplývajúcich momentov síl na teleso otáčajúce sa okolo pevnej osi. V oboch prípadoch bude aj os pôsobiť na teleso určitou silou \vec{F}' , ktorá zabezpečí, že napriek pôsobeniu vonkajších síl sa poloha osi nezmení.

kde sme použili vzťah (1.97) v poslednom kroku. Vidíme, že moment hybnosti je úmerný veľkosti uhlovej rýchlosti a členu, ktorý obsahuje faktor charakterizujúci geometrické rozloženie hmotnosti okolo osi otáčania. Jeho fyzikálny význam nájdeme, ak si polohové vektory elementov rozložíme na zložku rovnobežnú so smerom \vec{e} a na zložku na ňu kolmú,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{\parallel,i} + \vec{r}_{\perp,i}, \quad \vec{r}_{\perp,i} \cdot \vec{e} = 0, \quad \vec{r}_{\parallel,i} = r_{\parallel,i} \vec{e} \quad (4.88)$$

Dosadením posledného do (4.87) nájdeme dve kolmé zložky momentu zotrvačnosti,

$$\vec{L} = \omega \sum_i dm_i r_{\perp,i}^2 \vec{e} - \omega \sum_i dm_i r_{\parallel,i} \vec{r}_{\perp,i} = L_e \vec{e} + \vec{L}_d \quad (4.89)$$

Prvý člen predstavuje zložku momentu hybnosti v smere osi otáčania \vec{e} , obsahuje v sebe momentom zotrvačnosti (4.19),

$$L_e = \vec{L} \cdot \vec{e} = I\omega. \quad (4.90)$$

Dosadením tohto výsledku do 2. pohybovej rovnice (4.70) a následným skalárnym prenasobením so smerom otáčania \vec{e} , dostaneme základnú rovnicu pre zmenu uhlovej rýchlosti pri otáčaní okolo pevnej osi,

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = D_e \quad (4.91)$$

kde $D_e = \vec{D} \cdot \vec{e}$ je zložka celkového momentu síl v smere osi otáčania.

Príklad: Veľký zotrvačník má polomer $R = 0,25\text{m}$ a moment zotrvačnosti $I = 10\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Ak ho rozkrúcame lanom namotaným na jeho vnútornom polomere $r = 0,1\text{m}$ silou $F = 100\text{N}$, za aký čas sa bude otáčať 10-krát za sekundu?

Riešenie: Moment sily roztáčajúci zotrvačník je rF (a nie RF), lebo sila pôsobí vo vzdialenosti r od osi otáčania. Preto aj pohybová rovnica pre tento problém dá

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = rF \quad (4.92)$$

$$I \frac{d}{dt}\omega = rF \quad (4.93)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{rF}{I} \quad (4.94)$$

Integrovaním máme

$$\omega(t) = \frac{rF}{I}t + \omega_0 \quad (4.95)$$

Na začiatku bol zotrvačník v pokoji, preto $\omega_0 = 0$. Ak vykoná 10 otáčok za sekundu, jeho okamžitá uhlová rýchlosť bude

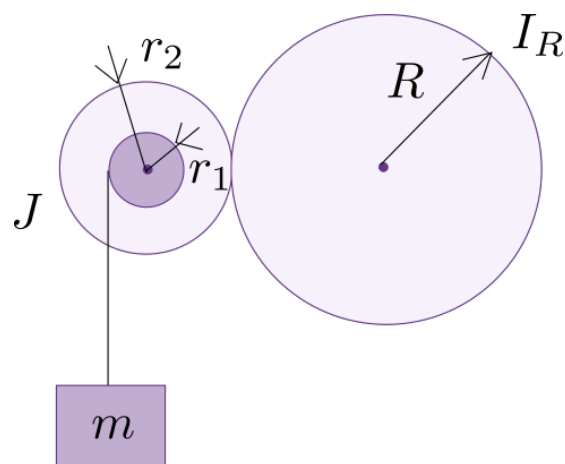
$$\omega(T) = \frac{10 \cdot 2\pi}{1\text{s}} = 20\pi\text{s}^{-1} \quad (4.96)$$

Čas roztáčania teda bude

$$\omega(T) = \frac{rF}{I}T \rightarrow T = \frac{\omega(T)I}{rF} \quad (4.97)$$

$$= \frac{20\pi \cdot 10}{0,1 \cdot 100}\text{s} = 20\pi\text{s} \approx 62,8\text{s}. \quad (4.98)$$

Úloha: S akým zrýchlením sa bude pohybovať závažie s hmotnosťou m pri odvíjaní kladky s prevodom podľa obrázku, ak J a I_R sú momenty zotrvačnosti jednotlivých kolies a r_1, r_2 a R ich geometrické rozmery vyznačené na obrázku (57)?



Obr. 57: Dodatočný valec s polomerom R predstavuje záťaž a preto bude odvíjanie lana spomaľovať.

Výsledok:

$$a = g \left[1 + \frac{J}{mr_1^2} + \frac{I_R}{mR^2} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right]^{-1} \quad (4.99)$$

Druhý príspevok k momentu hybnosti v (4.89),

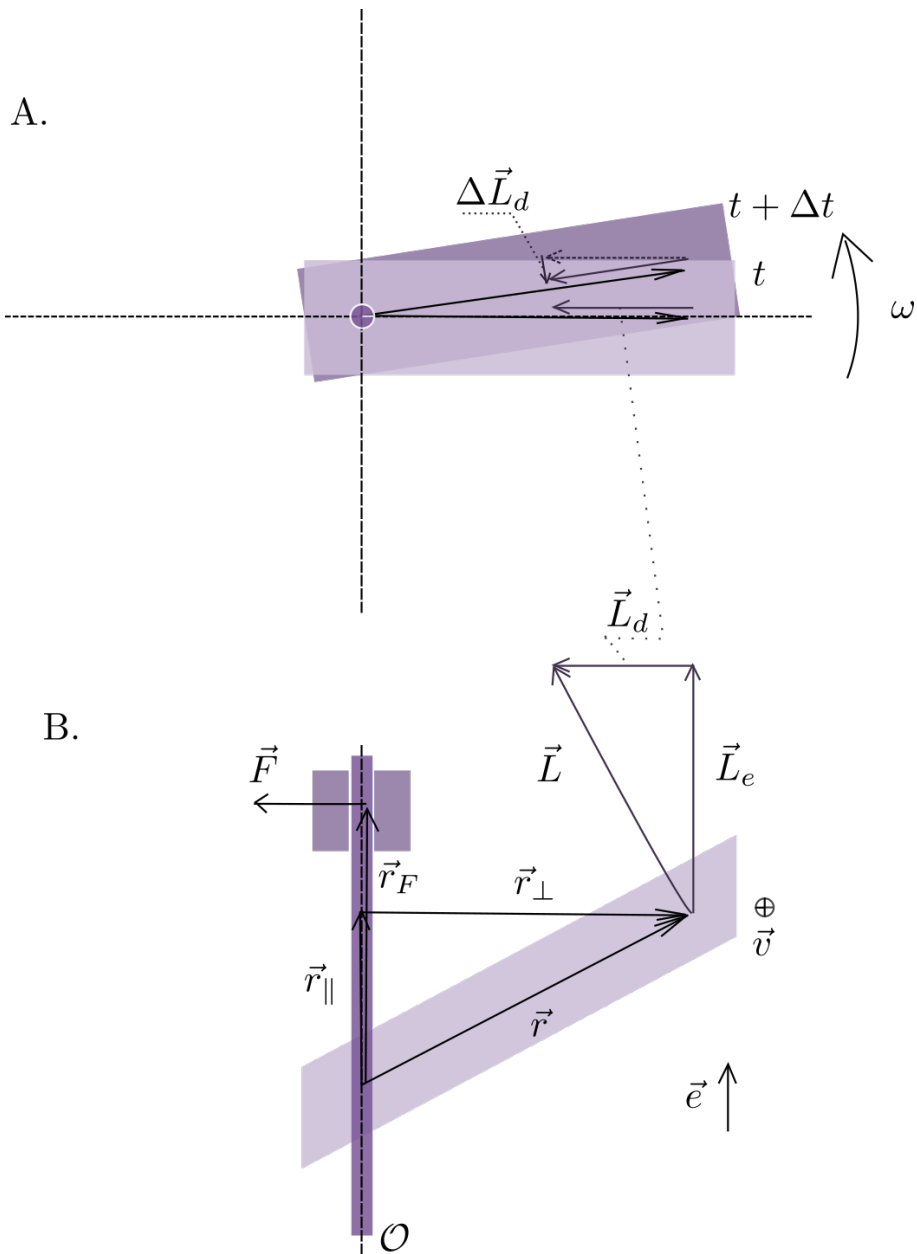
$$\vec{L}_d = -\omega \sum_i m_i r_{\parallel,i} \vec{r}_{\perp,i} \quad (4.100)$$

môže byť nenulový len pre rotačne nesymetrické telesá. Táto časť momentu hybnosti nevyhnutne mení svoj smer v čase, a táto zmena musí byť v zmysle rovnice (4.70) kompenzovaná príspevkom k momentu síl kolmému na rotačnú os. Toto predstavuje silové namáhanie v ložiskách, kde je os uchytená.

Na obrázku (58) je zobrazené pootočenie nesymetrického telesa za čas Δt . Kým pri rovnomernom otáčaní je zložka momentu hybnosti \vec{L}_e nemenná, zložka v smere kolmom na os, \vec{L}_d , sa stále otáča. Ak použijeme 2. pohybovú rovnicu pre krátky okamžik času Δt nájdeme

$$\Delta \vec{L}_d = \frac{d\vec{L}}{dt} \Delta t = \vec{D} \Delta t \quad (4.101)$$

Pretože smer kompenzujúceho momentu síl musí mať smer $\Delta \vec{L}_d$ (vi. obr. 58), musí byť vytvorený silou \vec{F} v ložisku.



Obr. 58: Pohľad zhora (A.) a pohľad z boku (B.) na príspevok k momentu hybnosti \vec{L} od elementu v mieste \vec{r} na nesymetrickom telese. Neustálu zmenu smeru zložky momentu hybnosti ΔL_d musí kompenzovať sila \vec{F} pôsobiaca v mieste \vec{r}_F v ložisku tak aby $\Delta L_d = \vec{r}_F \times \vec{F} \Delta t$.

Fyzikálny náhľad na pôvod tejto sily môžeme získať aj nasledovne: hmotný element s hmotnosťou dm na mieste \vec{r}_i koná pohyb po kružnici, a preto má dostredivé zrýchlenie \vec{a}_d . Musí naň teda pôsobiť podľa 2. Newtonovho zákona dostredivá sila

$$d\vec{F}_{i,do} = dm_i \vec{a}_{do} \quad (4.102)$$

ktorá sa prenáša celým *ideálne tuhým telesom*, a má pôvod práve v uvedenom tlačení v ložisku, aby sa smer osi otáčania nemenil. Tento moment sily môže byť je kompenzovaný zodpovedajúcim hmotným elementom j , s $\vec{r}_{j,\parallel} = -\vec{r}_{i,\parallel}$, na ktorý pôsobí síce rovnako veľká sila, ale odlišná poloha elementu j vedie na opačný moment sily.

Ložiská môžu byť namáhané aj v prípade, že je deviačný moment hybnosti nulový. Stále sa môže totiž stať, že poloha ťažiska telesa sa bude nachádzať mimo os otáčania, čo tiež povedie k namáhaniu v ťažisku, pretože pri otáčaní, keďže sa mení poloha ťažiska, musí na teleso pôsobiť externá sila. Práve tá pôsobí prostredníctvom ložiska.

V praxi sa chceme nadbytočnému namáhaniu v ložiskách vyhnúť, a preto treba dbať veľký dôraz na symetriu točiacich sa zariadení, či už má jeden (nenulový deviačný moment) alebo druhý (ťažisko mimo os otáčania) pôvod.

Príklad: Ak koleso, s hmotnosťou $m = 18\text{kg}$ (hmotnosť disku a pneumatiky osobného automobilu) bude mať vysunuté ťažisko voči osi otáčania o $d = 1\text{cm}$, bude naň pri rýchlosti $v = 50\text{km/h}$ pôsobiť dostredivá sila (z prvej pohybovej rovnice itt, nakoľko ťažisko sa hýbe približne po kruhovej dráhe)

$$F = m \frac{v^2}{d} = 18 \cdot \frac{(50/3,6)^2}{0,01} \text{N} \approx 350\text{kN}. \quad (4.103)$$

4.6.3 Otáčanie okolo pohyblivej osi s nemenným smerom

Typickým prípadom takéhoto pohybu je valiace sa koleso, ktoré kontinuálne mení polohu osi otáčania. Na konci tejto kapitoly si ukážeme, že moment hybnosti môžeme v tomto prípade prepísať do tvaru

$$\vec{L} = \vec{r}^* \times \vec{p} + I^* \vec{\omega} + \vec{L}_d^*, \quad (4.104)$$

kde prvý príspevok má význam momentu hybnosti telesa ak by bolo nahradené hmotným bodom v \vec{r}^* a ostatné dva zodpovedajú momentu hybnosti

vzhľadom na os otáčania prechádzajúcu ťažiskom. Tieto sú rozdelené podobne ako v prípade otáčania okolo pevnej osi - prvá časť je v smere osi otáčania \vec{e} a druhá je naň kolmá.

Rovnako sa rozdelí celkový moment síl,

$$\vec{D} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}^* + \vec{d}_i) \times \vec{F} = \vec{r}^* \times \vec{F} + \vec{D}^*, \quad (4.105)$$

kde $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ je súčet všetkých síl pôsobiacich na teleso, $\vec{D}^* = \sum_i \vec{d}_i \times \vec{F}_i$ je celkový moment síl pôsobiaci vzhľadom na ťažisko a hmotné elementy majú relatívnu polohu voči ťažisku danú vektormi \vec{d}_i ,

$$\vec{r}_i = \vec{r}^* + \vec{d}_i. \quad (4.106)$$

Použitím týchto označení má 2. pohybová rovnica tvar

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}^* \times \vec{p} + I^* \vec{\omega} + \vec{L}_d) = \vec{r}^* \times \vec{F} + \vec{D}^* \quad (4.107)$$

Prvý člen na ľavej a pravej strane sa navzájom vyrušia vďaka platnosti 1. pohybovej rovnice

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}. \quad (4.108)$$

a uvážením identity (4.83).

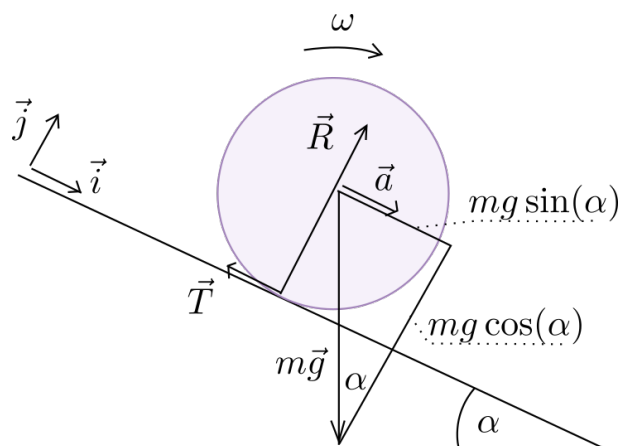
Časová derivácia momentu hybnosti \vec{L}_d musí byť opäť kompenzovaná momentom síl v ťažisku, podobne ako to bolo v prípade pevnej osi, ak má byť smer otáčania nemenný, takže nakoniec nájdeme tvar 2. pohybovej rovnice popisujúcej časovú zmenu uhlovej rýchlosti v tvare (napr. skalárnym prenásobením s vektorom smeru \vec{e} ,

$$\frac{d}{dt} (I^* \omega) = D_e^*. \quad (4.109)$$

Príklad: Aký minimálny musí byť koeficient statického trenia medzi podložkou, naklonenej pod uhlom α a valcom s polomerom r , ktorý sa na nej valí, aby valec po nej neprešmykoval? Pomer

$$\frac{I^*}{mr^2} = \frac{1}{\eta} \quad (4.110)$$

považujte za známy.



Obr. 59: Sily pôsobiace na valiaci sa valec. Tiažovú silu potrebujeme rozložiť na dve zložky v zmysle voľby súradnicového systému.

Riešenie:

Podľa označenia na obr. 59 zapíšeme všetky netriviálne zložky 1. a 2. pohybovej rovnice:

$$ma = mg \sin(\alpha) - T \quad (4.111)$$

$$0 = -mg \cos(\alpha) + R \quad (4.112)$$

$$I^* \epsilon = rT, \quad (4.113)$$

kde s ϵ sme si označili uhlové zrýchlenie,

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (4.114)$$

Pri valivom pohybe platí, že uhol, $d\phi$, o ktorý sa valec pootočí za čas dt udáva jeho dráhu, o ktorú sa posunie ťažisko dx , rovnú zodpovedajúcemu oblúku povrchu valca,

$$rd\phi = dx \rightarrow r \frac{d\phi}{dt} = \frac{dx}{dt} \rightarrow r\epsilon = a \quad (4.115)$$

Dosadením do 2. pohybovej rovnice nájdeme

$$I^* \frac{a}{r} = rT \quad (4.116)$$

Táto, spolu s prvou rovnicou pre zrýchlenie ťažiska predstavujú dve rovnice s dvoma neznámymi - a a T . Nájdeme z nich potrebnú treciu silu,

$$I^*(g \sin(\alpha) - T/m) = r^2 T \rightarrow \frac{I^* g \sin(\alpha)}{r^2 + I^*/m} = T \quad (4.117)$$

Minimálna hodnota koeficientu statického trenia je daná potrebnou trecou silou aby sa valec neprekĺzal,

$$T = \mu_{min}R = \mu_{min}mg \cos(\alpha) \quad (4.118)$$

kde sme vyjadrili silu reakcie z 1. pohybovej rovnice. Kombináciou posledných dvoch rovníc nakoniec dostaneme

$$\frac{I^*g \sin(\alpha)}{r^2 + I^*/m} = \mu_{min}mg \cos(\alpha) \quad (4.119)$$

$$\mu \geq \frac{I^*/(mr^2) \tan(\alpha)}{1 + I^*/(mr^2)} = \frac{\tan(\alpha)}{1 + \eta} \quad (4.120)$$

Nakoniec si odvodíme tvar momentu hybnosti (4.104), vychádzajúc zo všeobecnej definície (4.84),

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times dm_i \vec{v}_i = \sum_i dm_i (\vec{r}^* + \vec{d}_i) \times (\vec{v}^* + \dot{\vec{d}}_i) \\ &= \vec{r}^* m \vec{v}^* + \left(\sum_i dm_i \vec{d}_i \right) \times \vec{v}^* + \vec{r}^* \times \sum_i dm_i \dot{\vec{d}}_i + \sum_i dm_i \vec{d}_i \times (\omega \times \vec{d}_i) \end{aligned} \quad (4.121)$$

kde sme použili, že z rozdelenia polohy elementov na dve časti, (4.106), derivovaním podľa času vyplýva aj podobné rozdelenie rýchlostí,

$$\vec{v}_i = \vec{v}^* + \dot{\vec{d}}_i \quad (4.123)$$

a bodka označuje derivovanie podľa času. Z (4.106) zároveň vyplýva, že druhý člen vo vyjadrení momentu hybnosti je nulový, pretože po jej prenasobení s m_i a spočítaní cez i máme

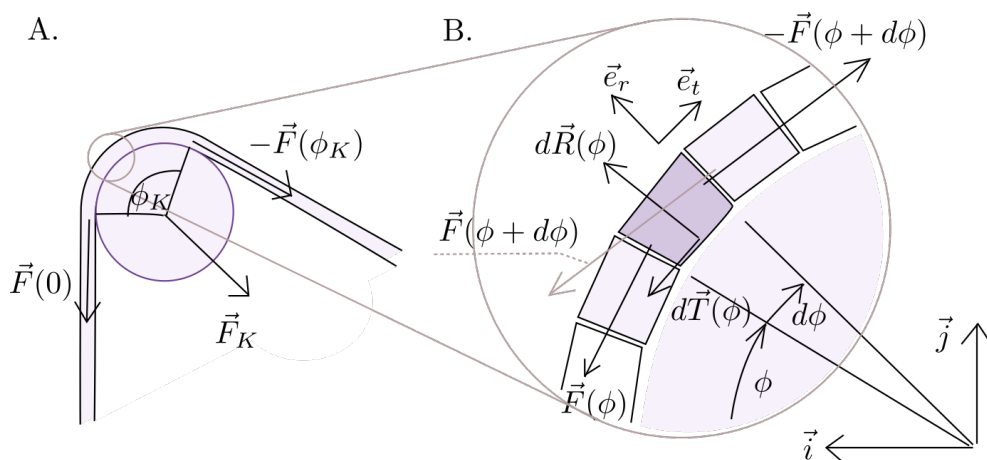
$$\sum_i dm_i \vec{r}_i = m \vec{r}^* + \sum_i dm_i \vec{d}_i \quad (4.124)$$

$$\sum_i dm_i \vec{d}_i = \sum_i dm_i \vec{r}_i - m \vec{r}^* = 0 \quad (4.125)$$

vzhľadom na definíciu ťažiska. Derivovaním tejto rovnosti podľa času príde na to že aj tretí člen v (4.122) je nulový. Nakoniec posledný člen v (4.122) sa už upraví úplne rovnako ako moment hybnosti pre pevnú os (4.87)-(4.89) len s tým rozdielom, že všetky veličiny sú vzhľadom na polohu ťažiska, t.j. celkovo máme

$$\vec{L} = \vec{r}^* \times \vec{p} + I^* \vec{\omega} + \vec{L}_d^*, \quad (4.126)$$

ako sme v úvode tejto kapitoly uviedli.



Obr. 60: Celkový (A) a detailný (B) pohľad na remenicu v kontakte s kladkou. Farebne zvýraznený element remenicu je analyzovaný z pohľadu všetkých pôsobiacich síl od susedných elementov ($\vec{F}(\phi)$ a $\vec{F}(\phi + d\phi)$) a od kolesa kladky ($d\vec{R}$ a $d\vec{T}$).

4.7 Prenos sily remenicou

V mechanických sústavách sa často prenáša silové pôsobenie pomocou remeníc, lán či reťazí. Pre lepšie porozumenie tohto silového pôsobenia uvažujme remenicu poháňajúcu kladku podľa Obr. 60, pričom remenica obopína kladku na vzdialenosti určenej uhlom ϕ_K .

Pre previazanie pohybových rovníc kladky a telies uchytených na remenici niekde ďalej potrebujeme poznať sily, ktorými sú napínané oba konce remenicu, $\vec{F}(0)$ a $-\vec{F}(\phi_K)$, výslednú silu pôsobiacu na kladku, \vec{F}_K a výsledný moment sily pôsobiaci na kladku \vec{D} .

Pre ich vyjadrenie budeme uvažovať sily pôsobiace na malý kúsok remenicu. Jeho hmotnosť si označíme ako $dm = (m/l)rd\phi$, kde m/l je hmotnosť remenicu na jednotku jej dĺžky, r je polomer kladky, a $d\phi$ je uhol určujúci dĺžku tohto kúska (Obr. 60 B.).

Pohybová rovnica pre tento kúsok v radiálnom a tangenciálnom smere

budú

$$dma_d = dR(\phi) + (\vec{F}(\phi) - \vec{F}(\phi + d\phi)) \cdot \vec{e}_r \quad (4.127)$$

$$dma_t = -dT(\phi) + (\vec{F}(\phi) - \vec{F}(\phi + d\phi)) \cdot \vec{e}_t \quad (4.128)$$

Priemet súčtu síl predchádzajúceho a nasledujúceho elementu remenice do radiálneho smeru bude

$$(\vec{F}(\phi) - \vec{F}(\phi + d\phi)) \cdot \vec{e}_r = -F(\phi)d\phi \quad (4.129)$$

a do tangenciálneho smeru bude

$$(\vec{F}(\phi) - \vec{F}(\phi + d\phi)) \cdot \vec{e}_t = \frac{dF(\phi)}{d\phi}d\phi \quad (4.130)$$

Pri remenici budeme pre jednoduchosť často uvažovať, že jej hmotnosť je zanedbateľná. Znamená to, že ľavé strany v rovniciach (4.127) a (4.128) sú nulové a ich kombináciou s poslednými dvoma rovnicami nájdeme

$$dR(\phi) - F(\phi)d\phi = 0 \quad (4.131)$$

$$-dT(\phi) + \frac{dF(\phi)}{d\phi}d\phi = 0 \quad (4.132)$$

Integrovaním rovnice (4.132) cez ϕ nájdeme

$$T_K = F(\phi_K) - F(0), \quad (4.133)$$

t.j. že *velkosti* síl ktorými je napínaná remenica sa líšia o celkovú tangenciálnu silu, ktorou pôsobí remenica na kladku. Tieto určujú aj celkový moment sily pôsobiaci na kladu od remenice,

$$D_K = \int_0^{\phi_K} r dT = r(F(\phi_K) - F(0)). \quad (4.134)$$

Výsledná sila pôsobiaca na kladku je daná súčtom reakčných síl na $d\vec{T}$ a $d\vec{R}$,

$$\vec{F}_K = \int_0^{\phi_K} \vec{e}_t dT - \vec{e}_r dR \quad (4.135)$$

Uvážením, že

$$\vec{e}_r \cdot \vec{i} = \cos(\phi) \quad (4.136)$$

$$\vec{e}_t \cdot \vec{i} = -\sin(\phi) \quad (4.137)$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{j} = \sin(\phi) \quad (4.138)$$

$$\vec{e}_t \cdot \vec{j} = \cos(\phi) \quad (4.139)$$

Nájdeme

$$\vec{F}_K \cdot i = \int_0^{\phi_K} -\sin(\phi) \frac{dF(\phi)}{d\phi} d\phi - \cos(\phi) F(\phi) d\phi \quad (4.140)$$

$$= F(0) \sin(0) - F(\phi_K) \sin(\phi_K) \quad (4.141)$$

$$\vec{F}_K \cdot j = \int_0^{\phi_K} \cos(\phi) \frac{dF(\phi)}{d\phi} d\phi - \sin(\phi) F(\phi) d\phi \quad (4.142)$$

$$= F(\phi_K) \cos(\phi_K) - F(0) \cos(0) \quad (4.143)$$

Rovnice (4.133, 4.134, 4.141 a 4.143) predstavujú vzťahy potrebné na prenos sily a momentu sily medzi remenicou a kladkou za predpokladu, že hmotnosť remenice možno zanedbať.

Z uvedenej analýzy možno nájsť aj podmienku prešmykovania remenice po kladke. Najväčšia možná trecia sila, ktorá dokáže ešte brániť prešmyku je daná statickým koeficientom trenia,

$$dT = \mu dR \quad (4.144)$$

Dosadením do rovníc (4.131) a (4.132) a vylúčením dR nájdeme diferenciálnu rovnicu

$$\frac{dF(\phi)}{d\phi} - \mu F(\phi) = 0 \rightarrow F(\phi) = F(0)e^{\mu\phi} \quad (4.145)$$

Maximálny prenášaný moment sily, pri ktorom ešte nedochádza k prešmyku remenice bude

$$D_{K,max} = r(F(\phi_K) - F(0)) = rF(0)(e^{\mu\phi_K} - 1) \quad (4.146)$$

4.8 Zachovávanie hybnosti a momentu hybnosti sústavy itt

Podobnosť 1. a 2. pohybovej rovnice s 2. Newtonovým zákonom nám umožní veľmi ľahko rozšíriť zákon zachovania hybnosti v sústave hmotných bodov uvedený v kapitole 2.4.

Uvažujme dve telesá, ktoré na seba vzájomne silovo pôsobia, a inak na ne iné sily nepôsobia. Potom môžeme napísať ich pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_1 = \vec{F}_{21}, \quad \frac{d}{dt}\vec{L}_1 = \vec{D}_{12} \quad (4.147)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_2 = \vec{F}_{12}, \quad \frac{d}{dt}\vec{L}_2 = \vec{D}_{21} \quad (4.148)$$

Podobne, ako platí $\vec{F}_{12} - \vec{F}_{21}$, tak platí aj pre vzájomné pôsobenie momentmi síl,

$$\vec{D}_{21} = -\vec{D}_{12} \quad (4.149)$$

a preto spočítaním 1. pohybových rovníc dostaneme zákon zachovania celkovej hybnosti

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots) = 0 \quad (4.150)$$

a spočítaním 2. pohybových rovníc zákon zachovania celkového momentu hybnosti

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots) = 0 \quad (4.151)$$

pre sústavu ideálne tuhých telies, na ktoré nepôsobia žiadne externé sily ani externé momenty síl.

Príklad: Klasický prípad, kedy sa prejavuje približné zachovávanie momentu hybnosti sú piruety krasokorčuliarov. Kým má krasokorčuliar široko rozpažené ramená, otáča sa relatívne pomaly, po ich pripažení sa jeho rotácia výrazne zrýchli. Vysvetliť to možno tým, že na začiatku mal viac svojej hmotnosti ďaleko od osi otáčania, t.j. väčší moment zotrvačnosti I_1 a po pripažení sa jeho moment zotrvačnosti zmenšil $I_2 < I_1$. Nakoľko moment hybnosti sa v prípade kontaktu korčule na ľade, kde je len veľmi malé trenie, dosť dobre zachováva, bude

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 > \omega_1. \quad (4.152)$$

4.9 Práca a mechanická energia ideálne tuhého telesa

Definícia práce zostáva rovnaká, ako bola práca konaná na hmotnom bode, t.j.

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt \quad (4.153)$$

pričom práca je konaná medzi časmi t_1 a t_2 a $\vec{v}(t)$ je okamžitá rýchlosť bodu itt, v ktorom pôsobí sila $\vec{F}(t)$.

Pre prípad otáčania okolo pevnej osi je možné vyjadriť prácu pomocou momentu síl, ktorý roztáča spôsobuje a aktuálnej uhlovej rýchlosti,

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)) dt \quad (4.154)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{\omega}(t) \cdot (\vec{r}(t) \times \vec{F}(t)) dt \quad (4.155)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{D}(t) \cdot \vec{\omega}(t) dt. \quad (4.156)$$

Vzhľadom na definíciu výkonu (2.102), pre otáčavý pohyb zároveň nachádzame z posledného vzťah pre výkon momentu sily,

$$P = \vec{D} \cdot \vec{\omega} \quad (4.157)$$

Príklad: Ideálny mechanický prevod ¹⁸ cez kolesá s rôznym polomerom prenáša výkon bez straty, čo možno vidieť z výsledkov (4.54) a (4.57). Výkon stratený v ľavom kolese v dôsledku brzdenia

$$\vec{D}_{1,2} \cdot \vec{\omega}_1 = -D_{1,2}\omega_1 \quad (4.158)$$

predstavuje výkon dodaný pravému kolesu,

$$\vec{D}_{2,1} \cdot \vec{\omega}_2 = D_{2,1}\omega_2 = \eta D_{1,2} \frac{\omega_1}{\eta} = D_{1,2}\omega_1. \quad (4.159)$$

Na tuhé teleso sa možno pozeráť ako na systém hmotných bodov, a preto aj výsledky z dynamiky hmotných bodov musia byť prenositeľné na systém itt. V dynamike hmotných bodov sme našli, že práca konaná sa premieňa na mechanickú energiu a prípadne prácu konanú proti trecím silám. Ukážeme si ako vyjadriť celkovú mechanickú energiu itt pomocou už zavedených veličín: ťažiska, hmotnosti celého itt a momentu zotrvačnosti.

¹⁸Vid' napr. prevod v autách na http://www.carbibles.com/transmission_bible.html.

Použijeme už nám známe rozdelenie itt na hmotné elementy na miestach $\vec{r}_i = \vec{r}^* + \vec{d}_i$ a s hmotnosťami m_i . Kinetická energia celého systému bude

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} dm_i \left| \frac{d}{dt} \vec{r}_i \right|^2 = \sum_i \frac{1}{2} dm_i |\vec{v}^* + \dot{\vec{d}}_i|^2 = \sum_i \frac{1}{2} dm_i |\vec{v}^* + \dot{\vec{d}}_i|^2 \quad (4.160)$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} dm_i (\vec{v}^* + \dot{\vec{d}}_i) \cdot (\vec{v}^* + \dot{\vec{d}}_i) \quad (4.161)$$

$$= \frac{1}{2} m (v^*)^2 + \frac{1}{2} \sum_i dm_i |\omega \times \vec{d}_i|^2 \quad (4.162)$$

kde sme v priebehu úprav využili už známe identity

$$\sum_i dm_i = m, \quad \sum_i dm_i \vec{d}_i = 0, \quad \dot{\vec{d}}_i = \vec{\omega} \times \vec{d}_i. \quad (4.163)$$

Nakoniec v poslednej rovnici rozdelíme polohový vektor elementu vzhľadom na ťažisko na zložku rovnobežnú s rotačnou osou a zložku na ňu kolmú,

$$\vec{d}_i = \vec{d}_{i,\parallel} + \vec{d}_{i,\perp}, \quad \vec{e} \cdot \vec{d}_{i,\perp} = 0, \quad \vec{e} \times \vec{d}_{i,\parallel} = 0 \quad (4.164)$$

kde \vec{e} je v smere osi otáčania nájdeme

$$E_k = \frac{1}{2} m (v^*)^2 + \frac{1}{2} I^* \omega^2, \quad I^* = \sum_i dm_i d_{i,\perp}^2 \quad (4.165)$$

Prvý príspevok k kinetickej energii sa nazýva aj kinetická energia translačného pohybu a druhý príspevok kinetická energia rotačného pohybu. Kinetická energia rotujúceho telesa kvantitatívne popisuje bežnú skúsenosť, že roztočiť teleso s veľkým momentom zotrvačnosti nás stojí podstatne viac práce ako roztočenie telesa s malým momentom zotrvačnosti na rovnakú uhlovú rýchlosť.

V prípade potenciálnej energie je situácia jednoduchá len v prípade *homogénnych* silových polí. V tomto prípade je celková potenciálna energia vyjadriteľná len pomocou polohy ťažiska,

$$U = \sum_i dm_i g z_i = m g z^*. \quad (4.166)$$

V prípade nehomogénnych polí, napr. pri vodiči s elektrickým prúdom nachádzajúcom sa v magnetickom poli statora pri jednosmernom motore, sú potrebné zjednodušenia (priemerné silové pole) alebo komplikovanejšie, často numerické výpočty.

Z vyššie uvedeného tvrdenia, že pre systém itt platí rovnako energetická bilancia ako pre systém hmotných bodov

$$W = \Delta E_M - W_t \quad (4.167)$$

kde W_t je práca trecích síl, a že kinetická energia každého itt má dva členy - translačnú a rotačnú.

Príklad: Po naklonenej rovine, s výškovým rozdielom h , sa valí valček. Akú bude mať rýchlosť ťažiska po zídení z naklonenej roviny, ak jeho hmotnosť je m a polomer R , a na vrchu mal nulovú rýchlosť? Moment zotrvačnosti valca vzhľadom na jeho rotačnú os je $I^* = \frac{1}{2}mR^2$.

Riešenie: Na vrchu mal nulovú kinetickú energiu a jeho potenciálna energia bol $U_1 = mg(h + R)$. Po zkotúľaní dole mal nulovú potenciálnu energiu, a jeho kinetická energia bola

$$E_{2,k} = \frac{1}{2}m(v^*)^2 + \frac{1}{2}I^*\omega^2 = \frac{1}{2}m(v^*)^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega^2 \quad (4.168)$$

Pretože valček sa valí, medzi rýchlosťou jeho ťažiska a uhlovou rýchlosťou bude platiť $v^* = \omega R$, a teda kinetická energia sa dá upraviť na

$$E_{2,k} = \frac{3}{4}m(v^*)^2. \quad (4.169)$$

Keďže v zadaní iné sily okrem gravitačnej neboli spomínané, práca vonkajších aj trecích síl bude nulová a dostávame

$$0 = \Delta E = E_{2,M} - E_{1,M} = E_{2,k} - U_1 \quad (4.170)$$

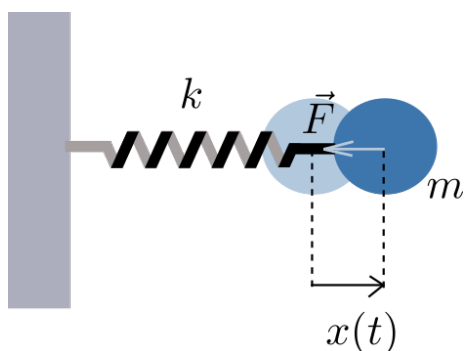
$$0 = \frac{3}{4}m(v^*)^2 - mgh \quad (4.171)$$

$$v^* = \sqrt{\frac{4gh}{3}} \quad (4.172)$$

Ak by sme nedosadili konkrétny tvar momentu zotrvačnosti, našli by sme

$$v^* = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I/(mR^2)}} \quad (4.173)$$

Čím je väčší moment zotrvačnosti v pomere k mR^2 , tým bude rýchlosť valenia sa valčeka na konci menšia. Interpretácia tohto je taká, že väčšia časť potenciálnej energie sa mení na rotačnú kinetickú energiu, a len jej menšia



Obr. 61: Základný model harmonického oscilátora sa skladá z guľičky s hmotnosťou m , uchytenej na pružine s tuhosťou k . Pri vychýlení z rovnovážnej polohy o výchylku $x(t)$ bude na guľičku pôsobiť od pružiny sila \vec{F} , orientovaná proti tejto výchylke.

časť ostane na translačnú, t.j. aj posuvnú rýchlosť. Pomer $I^*/(mR^2)$ presne zodpovedá pomeru rotačnej a translačnej kinetickej energie pri valivom pohybe.

5 Kmitanie

5.1 Pohybová rovnica netlmených kmitov

V mechanike kmitaním nazývame typ pohybu, ktorý je dôsledkom dvoch vecí - existencii sily, ktorá pôsobí vždy smerom k rovnovážnej polohe, a zotrvačnej vlastnosti látky. Výsledkom je periodické striedanie nenulovej výchylky súradnice a nenulovej rýchlosti telesa. Poznáme aj iné ako mechanické kmitania, napríklad kmitanie elektrického prúdu a napätia v elektrických obvodoch, a s tým súvisiacich elektrických a magnetických polí. Matematický popis týchto kmitov je veľmi podobný tým mechanickým, a preto dobré porozumenie jedného modelu kmitania nám umožní rýchlo chápať o čo ide pri rôznych kmitajúcich fyzikálnych systémoch.

Budeme študovať model, ktorý sa nazýva harmonický oscilátor. Jeho fyzikálna realizácia predstavuje hmotné teleso uchytené na pružine, ktorá je charakterizovaná tuhosťou k (Obr. 61). Súradnicu telesa si označíme ako x , a jej počiatok si zvolíme v polohe, keď na teleso nepôsobí sila od pružiny, t.j. keď je pružina v uvoľnenom stave.

Použitím 2. Newtonovho zákona nájdeme rovnicu pre kmitanie v tvare

$$m\ddot{x} = -kx \quad (5.1)$$

Sila, pôsobiaca na teleso nie je konštantná, a preto pohyb celkom isto nebude rovnomerne zrýchlený. Rovnica (5.1) je *diferenciálna rovnica*, kde neznámou je celá funkcia $x(t)$. Táto diferenciálna rovnica hovorí - súradnica bude takou funkciou času, že keď ju dva krát zderivujeme, dostaneme tú istú funkciu času, len pre násobenú zápornou konštantou $-k/m$.

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že riešením tejto rovnice je funkcia

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) \quad (5.2)$$

kde A a ϕ_0 sú ľubovoľné čísla a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.3)$$

Zmysel parametra A je *amplitúda kmitov* - predstavuje najväčšiu dosahovanú hodnotu súradnice počas kmitania, nakoľko $-1 \leq \cos(\phi) \leq 1$. Pretože súradnica má rozmer dĺžky, rovnaký rozmer musí mať aj amplitúda.

Výraz v argumente funkcie \cos , $\phi(t) = \omega t + \phi_0$ sa nazýva *fáza*, pretože podľa jeho hodnoty sa kmitanie nachádza v rôznej fáze výchylky: pre $\phi(t_1) = \omega t_1 + \phi_0 = 0$, t.j. pre čas $t_1 = -\phi_0/\omega$ je výchylka maximálna a rovná amplitúde, pre $\phi(t_2) = \omega t_2 + \phi_0 = \pi/2$, t.j. pre čas $t_2 = (\pi/2 - \phi_0)/\omega$ je výchylka nulová, teleso prechádza cez rovnovážnu polohu a.t.ď. Samotné ϕ_0 má význam *počiatočnej fázy*, t.j. hodnoty fázy pre čas $t = 0$.

Kosínus je funkcia s periódou 2π a preto sa súradnica bude opakovať ak čas narastie o *periódu* T danú rovnicou,

$$\phi(t+T) - \phi(t) = 2\pi \quad (5.4)$$

$$(\omega(t+T) + \phi_0) - (\omega t + \phi_0) = 2\pi \quad (5.5)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (5.6)$$

ω sa nazýva *uhlovou frekvenciou* a vyjadruje zmenu fázy za jednotku času

$$\omega = \frac{\Delta\phi(t)}{\Delta t}. \quad (5.7)$$

Frekvencia periodického pohybu udáva počet zopakovaní pohybu za jednotku času, t.j. počet zmien fázy o 2π za jednotku času,

$$f = \frac{\Delta\phi(t)/(2\pi)}{\Delta t} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (5.8)$$

Jednotka frekvencie je $[f] = \text{s}^{-1}$ no v praxi sa nazýva aj 1 Hertz, $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$.

Podobne, ako to bolo pri rovnomernom pohybe, aj pri kmitaní máme dve počiatkové podmienky - počiatkovú polohu $x_0 = x(0)$ a počiatkovú rýchlosť telesa $v_0 = \dot{x}(0)$. Zadaním týchto dvoch sú parametre A a ϕ_0 *jednoznačne* určené,

$$x_0 = A \cos(\phi_0), \quad (5.9)$$

$$v_0 = -A\omega \sin(\phi_0). \quad (5.10)$$

Amplitúdu získame spočítaním kvadrátov týchto rovníc,

$$x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = A^2 (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)), \quad (5.11)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}, \quad (5.12)$$

a fázu ich predelením,

$$\tan(\phi_0) = -\frac{v_0}{\omega x_0} \quad (5.13)$$

$$\phi_0 = -\tan^{-1}\left(\frac{v_0}{\omega x_0}\right) + \pi m, \quad m = 0 \text{ alebo } 1 \quad (5.14)$$

Hodnoty $m = 2, 3, \dots$ alebo $m = -1, -2, \dots$ netreba uvažovať, lebo $\cos()$ je periodická funkcia s periódou 2π , a teda napr. $m = 2$ je rovnaké riešenie ako $m = 0$.

Celkovo teda vidíme, že funkcia v tvare (5.2) je riešením pohybovej rovnice harmonického oscilátora (5.1), pričom všetky konštanty sú v nej jednoznačne určené až zadaním dvoch počiatkových podmienok. Poznamenajme, že potreba dvoch počiatkových podmienok pre jednoznačnosť riešenia priamo súvisí s prítomnosťou druhej časovej derivácie v tejto diferenciálnej rovnici.

Príklad: Nájdite hodnotu počiatkovej fázy pre situácie keď (a) $x_0 > 0$ a $v_0 = 0$, (b) $x_0 < 0$ a $v_0 = 0$, (c) $x_0 = 0$ a $v_0 > 0$ a (d) $x_0 = 0$ a $v_0 < 0$.

Riešenie:

(a) V rovnici (5.14) je $\tan^{-1}(0) = 0$, vezmeme $m = 0$ t.j. $\phi_0 = 0$ a výchylka bude $x(t) = A \cos(\omega t)$.

(b) V rovnici (5.14) je $\tan^{-1}(0) = 0$, ale vezmeme $m = 1$ t.j. $\phi_0 = \pi$ a výchylka bude $x(t) = A \cos(\omega t + \pi) = -A \cos(\omega t)$.

(c) V rovnici (5.14) je $\tan^{-1}(+\infty) = \pi/2$, vezmeme $m = 0$ t.j. $\phi = -\pi/2$ a výchylka bude $x(t) = A \cos(\omega t - \pi/2) = A \sin(\omega t)$.

(d) V rovnici (5.14) je $\tan^{-1}(-\infty) = -\pi/2$, vezmeme $m = 0$ t.j. $\phi = \pi/2$ a

výchylka bude $x(t) = A \cos(\omega t \pi + \pi/2) = -A \sin(\omega t)$.

Príklad: Ak na silomer zavesíme závažie s neznámou hmotnosťou, tak sa predĺži o $\Delta l = 1\text{cm}$. Aká bude perióda kmitov tejto záťaži, ak do nej jemne šťuchneme?

Riešenie: Nakoľko sa silomer predlžuje, na závažie pôsobí okrem sily od pružiny, $F = k\Delta l$ aj konštantná tiažová sila $F_g = mg$. Nech y je súradnica ťažiska telesa uchyteného o pružinu v jej uvoľnenom stave a nech súradnica narastá v smere vertikálne dole. Pohybová rovnica pre teleso bude

$$m\ddot{y} = -ky + mg \quad (5.15)$$

V prvom kroku vyriešime rovnovážnu situáciu, keď predĺženie pružiny, t.j. y je rovné Δl a súradnica sa nemení, t.j. $\dot{y} = 0$ a teda aj $\ddot{y} = 0$,

$$0 = -k\Delta l + mg \rightarrow k = \frac{mg}{\Delta l} \quad (5.16)$$

V druhom kroku zavedieme posunutú súradnicu vzhľadom na toto rovnovážne vysunutie¹⁹

$$y = \Delta l + x \rightarrow \ddot{y} = \ddot{x} \quad (5.17)$$

pomocou ktorej prepíšeme pohybovú rovnicu,

$$m\ddot{x} = -k(\Delta l + x) + mg = -kx \quad (5.18)$$

t.j. tvar rovnice harmonického oscilátora (5.1), a preto riešenie bude vyzeráť presne rovnako ako (5.2). Špeciálne pre túto úlohu, perióda kmitov bude

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}} \approx 6,28\sqrt{10^{-3}} = 0,2\text{s} \quad (5.19)$$

¹⁹ x je v tomto prípade len názov novej súradnice, neide o žiadnu “zmenu smeru” v zmysle označenia kartézskych súradníc.

Príklad: Teleso s hmotnosťou $m = 1\text{kg}$ je uchytené na rotačnej osi vo vzdialenosti $d = 10\text{cm}$ od svojho ťažiska. Jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na jeho ťažisko je $I^* = 5 \cdot 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Aká bude frekvencia jeho malých kmitov okolo tejto rotačnej osi umiestnenej vodorovne v homogénnom gravitačnom poli?

Riešenie: Vyjdeme z 2. pohybovej rovnice tohto telesa pre otáčanie okolo pevnej osi

$$I\ddot{\alpha} = D_\alpha \quad (5.20)$$

$$(I^* + md^2)\ddot{\alpha} = -dmg \sin(\alpha) \quad (5.21)$$

pre malé výchylky uhlu α použijeme Taylorov rozvoj funkcie $\sin(\alpha)$ pričom členy vyššie ako lineárny zanedbáme,

$$\sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \approx \alpha \quad (5.22)$$

a teda nájdeme rovnicu kmitov uhlu α v tvare

$$\ddot{\alpha} = -\frac{dmg}{I^* + md^2}\alpha, \quad (5.23)$$

ktorá pri porovnaní s (5.1) a (5.2) má riešenie

$$\alpha(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\frac{dmg}{I^* + md^2}} \quad (5.24)$$

a teda frekvencia malých kmitov bude

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{dmg}{I^* + md^2}} = 1,3\text{s}^{-1} \quad (5.25)$$

5.2 Mechanická energia harmonického oscilátora

Harmonický oscilátor predstavuje translačný kmitavý pohyb telesa, ktorého kinetickú energiu vieme vyjadriť nasledovne

$$E_k = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 \quad (5.26)$$

Pre silové pôsobenie od pružiny možno zaviesť potenciálnu energiu (viď príklad v Sec. 2.6.3),

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (5.27)$$

Pokiaľ harmonický oscilátor voľne kmitá, a nepôsobí sa naň už žiadnou inou silou, bude sa jeho celková mechanická energia zachovávať,

$$E_m = E_k + U. \quad (5.28)$$

Hoci je tento súčet v každom okamihu času nemenný, jednotlivé jeho súčasti - kinetická a potenciálna energia sa v čase menia,

$$E_k(t) = \frac{1}{2}m \left(\frac{d}{dt} A \cos(\omega t + \phi_0) \right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) \quad (5.29)$$

$$U(t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) \quad (5.30)$$

Priebeh hodnôt kinetickej a potenciálnej energie je zobrazený na obr. 62 od kiaľ vidíme, že aj ich hodnoty kmitajú, pričom keď je jedna maximálna, druhá je nulová tak, že ich súčet je v každom okamihu času rovnaký,

$$E_m = E_k(t) + U(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (5.31)$$

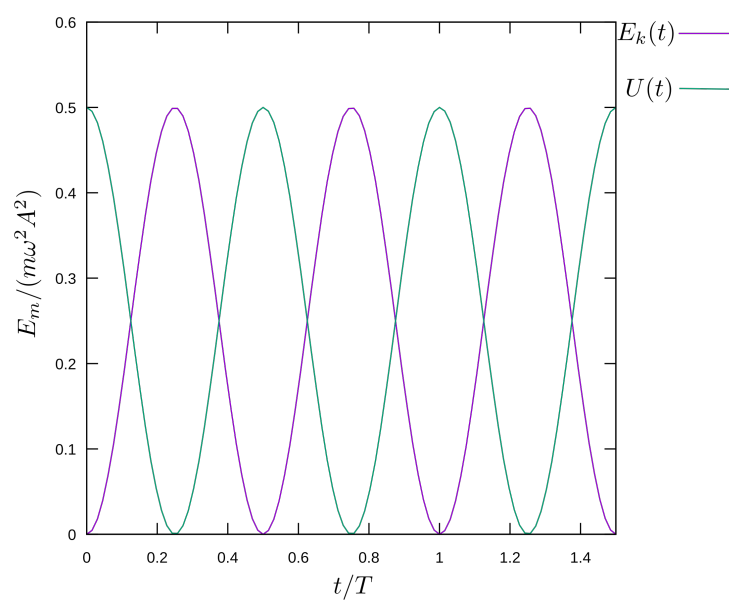
Možno teda hovoriť, že počas kmitania sa premieňa potenciálna energia na kinetickú a späť.

5.3 Komplexné čísla

Aritmetika komplexných čísiel sa výhodne používa pri riešení mnohých problémov spojených s kmitaním, či už je to v mechanických alebo elektrických sústavách. Preto v tejto podkapitole v stručnosti zhrnieme to, čo je potrebné o komplexných číslach vedieť a v nasledovnej časti si ukážeme, ako ich možno využiť pri riešení pohybu harmonického oscilátora z predchádzajúcej časti. Následne využijeme komplexnú aritmetiku na riešenie aj komplikovanejších úloh - tlmeného a buďeného harmonického oscilátora.

Prirodzené čísla, $N = 1,2,3,\dots$ predstavujú množinu spočítateľných objektov, sú nám intuitívne jasné, rovnako ako operácie spočítavania, odpočítavania, násobenia a delenia medzi nimi. Kým spočítavanie a násobenie ľubovoľných dvoch prirodzených čísiel dá ako výsledok opäť prirodzené číslo, odpočítavanie a delenie nedajú. Napr. rovnica

$$x = 2 - 3 \quad (5.32)$$



Obr. 62: Časový priebeh kinetickej a potenciálnej energie harmonického oscilátora pre $\phi_0 = 0$. V priebehu kmitov sa tieto menia tak, že ich súčet ostáva stále nemenný.

nemá riešenie v množine prirodzených čísel, a preto rozširujeme prirodzené čísla na čísla celé, $Z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Podobne je to s delením, rovnica

$$x = 5 : 3 \quad (5.33)$$

nemá riešenie v množine celých čísel, a preto ich rozširujeme na množinu racionálnych čísel, ako čísiel, ktoré vieme napísať ako podiel $n : m = \frac{n}{m}$, kde n je celé číslo a m je prirodzené číslo. Reálne čísla predstavujú rozšírenie množiny čísel tak, aby napr. rovnica

$$x^2 = 2 \quad (5.34)$$

mala riešenie, nakoľko $\sqrt{2}$ nedokážeme napísať v tvare zlomku, t.j. nie je racionálne číslo.

Touto matematickou prechádzkou prichádzame k rozšíreniu až na komplexné čísla. Komplexné čísla predstavujú rozšírenie množiny reálnych čísel tak, aby aj rovnica

$$z^2 = -1 \quad (5.35)$$

mala riešenie v tejto množine čísel. Ukazuje sa, že toto možno zaviesť pridaním jediného znaku ku množine reálnych čísel, imaginárnej jednotky,

$$i = \sqrt{-1}. \quad (5.36)$$

Ľubovoľné komplexné číslo potom vieme napísať v tvare

$$z = x + iy, \quad (5.37)$$

kde x a y sú reálne čísla, a nazývame ich *reálna* a *imaginárna* časť komplexného čísla

$$x = \Re\{z\}, \quad y = \Im\{z\} \quad (5.38)$$

Okrem už rozšírených operácií $+$, $-$, \cdot a $:$ zavádzame aj tzv. komplexné združenie čísla, ktoré číslu $z = x + iy$ priradí číslo

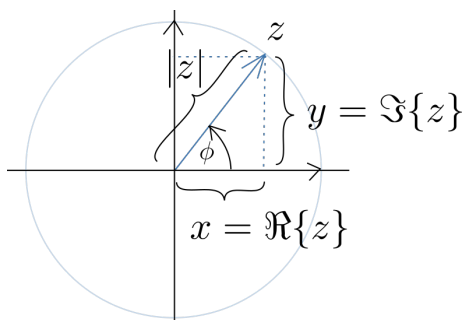
$$z^* = x - iy. \quad (5.39)$$

Veľkosťou komplexného čísla budeme nazývať reálne číslo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*}. \quad (5.40)$$

Okrem zápisu cez zložky x a y môžeme ľubovoľné komplexné číslo napísať aj v tvare

$$z = |z| (\cos(\phi) + i \sin(\phi)), \quad x = |z| \cos(\phi), \quad y = |z| \sin(\phi) \quad (5.41)$$



Obr. 63: Komplexné číslo dokážeme reprezentovať bodom v rovine. Na x -ovú os vyznačujeme jeho reálnu časť, na y -ovú os jeho imaginárnu časť. V analógii s vektormi ho následne dokážeme zapísať pomocou jeho veľkosti a uhla, ktorý zvierá spojnicu bodu s počiatkom s osou x .

kde $\phi \in (0, 2\pi)$ je *fáza* komplexného čísla (Obr. 63).

Uvedenú kombináciu funkcií \cos a \sin tiež označujeme ako exponenciálnu funkciu s imaginárnym argumentom,

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi). \quad (5.42)$$

Rovnica (5.42) sa nazýva Eulerova identita, a treba ju chápať ako rozšírenie exponenciálnej funkcie reálnej premennej e^x . Uvážením pravidiel derivovania goniometrických funkcií a derivovaním rovnice (5.42) sa ľahko presvedčíme, že podobne ako reálna funkcia e^x , aj jej komplexné rozšírenie spĺňa základnú vlastnosť exponenciálnej funkcie (že je deriváciou samej seba),

$$\frac{d}{d\phi} e^{i\phi} = i e^{i\phi}. \quad (5.43)$$

Komplexné číslo môžeme pomocou Eulerovej identity zapísať v tvare

$$z = |z| e^{i\phi}, \quad (5.44)$$

čo budeme využívať pri riešení kmitov. Podobne sa tento tvar používa aj pri riešení elektrických obvodov so zdrojmi striedavého napätia a prúdu.

Príklad: Presvedčíme sa, že Eulerova identita (5.42) je v súhlase so súčtovými vzorcami pre goniometrické funkcie. Priamo z vlastnosti exponenciálnej funkcie nachádzame,

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{i\alpha} e^{i\beta} = (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) (\cos(\beta) + i \sin(\beta)) & (5.45) \\ &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) + i (\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)) \end{aligned}$$

Na druhej strane, z definície exponenciálnej funkcie a použitím súčtových vzorcov,

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) & (5.47) \\ &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) + i (\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)) & (5.48) \end{aligned}$$

a teda oba postupy vedú k identickému výsledku.

5.4 Harmonický oscilátor s komplexnou aritmetikou

Riešenie harmonického oscilátora (5.2) predstavuje reálnu časť funkcie

$$z(t) = \mathcal{A}e^{i\omega t}, \quad \mathcal{A} = Ae^{i\phi_0}. \quad (5.49)$$

Kde \mathcal{A} predstavuje komplexnú amplitúdu. Imaginárna časť $z(t)$,

$$y(t) = \Im\{z(t)\} = A \sin(\omega t + \phi_0) = A \cos(\omega t + \phi_0 + \pi/2) \quad (5.50)$$

predstavuje tiež riešenie rovnice (5.1), len s posunutou fázou o $\pi/2$. Ľahko sa možno presvedčiť, že aj $z(t)$ je tým pádom riešením pohybovej rovnice harmonického oscilátora, aj keď toto riešenie je formálne, lebo predstavuje komplexnú výchylku. Vo všeobecnosti, rovnica harmonického oscilátora patrí medzi tzv. *lineárne* rovnice, pre ktoré platí, že ak x aj y sú jej riešeniami, potom aj $z = a_1x + a_2y$ je jej riešením pre ľubovoľné čísla a_1 a a_2 . Okrem toho je to rovnica s reálnymi koeficientami, a preto ak je jej riešením komplexná funkcia $z(t)$, potom je jej riešením aj k nej komplexne združená funkcia $z^*(t)$, a preto aj len jej reálna časť,

$$x(t) = \Re\{z(t)\} = \frac{z(t) + z^*(t)}{2}, \quad (5.51)$$

čo je to, čo nás v konečnom dôsledku zaujíma.

Výhodou hľadania riešenia v tvare (5.49) je veľmi ľahké derivovania tejto funkcie,

$$\dot{z}(t) = i\omega z(t), \quad (5.52)$$

$$\ddot{z}(t) = (i\omega)^2 z(t), \quad (5.53)$$

t.j. derivovanie je obyčajné násobenie faktorom $i\omega$.

Postup pri používaní komplexnej aritmetiky bude nasledovný:

1. Prepíšeme rovnicu do komplexnej súradnice

$$m\ddot{z} = -kz \quad (5.54)$$

2. Hľadáme jej riešenie v tvare

$$z(t) = \mathcal{A}e^{i\omega t}, \quad (5.55)$$

kde \mathcal{A} a ω sú komplexné parametre, ich dosadením nájdeme podmienky na ne kladené rovnicou (5.54).

3. Nájdeme reálne riešenie ako reálnu časť komplexného,

$$x(t) = \Re\{z(t)\} \quad (5.56)$$

4. Ostávajúce parametre nastavíme podľa počiatočných podmienok.

Tento postup použitý na harmonický oscilátor je

$$m\ddot{z} = -kz \quad (5.57)$$

$$-\omega^2 m \mathcal{A} e^{i\omega t} = -k \mathcal{A} e^{i\omega t} \quad (5.58)$$

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (5.59)$$

$$x(t) = \Re\{\mathcal{A}e^{i\phi_0} e^{i\omega t}\} = A \cos(\omega t + \phi_0) \quad (5.60)$$

kde ϕ_0 je fáza komplexného čísla \mathcal{A} a A jeho veľkosť.

5.5 Tlmený harmonický oscilátor

Tlmený harmonický oscilátor predstavuje model oscilátora, ktorého pohyb je tlmený trením úmerným jeho rýchlosti. Ide teda o typ Stokesovho trenia, ako sme sa s ním stretli v kapitole 2.3.4. Pohybová rovnica teda nadobudne tvar

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \quad (5.61)$$

Opäť ide o lineárnu diferenciálnu rovnicu s reálnymi koeficientami, a preto použijeme komplexnú aritmetiku. Riešenie hľadáme v tvare (5.55), dosadením nájdeme

$$-m\omega^2 \mathcal{A} e^{i\omega t} = -k \mathcal{A} e^{i\omega t} - i\gamma\omega \mathcal{A} e^{i\omega t} \quad (5.62)$$

Samotné $z(t) = Ae^{i\omega t}$ možno vykrátiť, a pre parameter ω nájdeme kvadratickú rovnicu

$$0 = m\omega^2 - i\gamma\omega - k \quad (5.63)$$

$$\omega_{1,2} = i\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}} = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (5.64)$$

kde sme zaviedli označenia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2m} \quad (5.65)$$

Uhlovú frekvenciu ω_0 budeme nazývať *vlastnou frekvenciou* harmonického oscilátora, a predstavuje uhlovú frekvenciu, ktorou by oscilátor kmital, ak by nebol tlmený.

Reálne riešenie dostaneme po dosadení,

$$x(t) = \Re\{Ae^{i\phi_0}e^{-\beta t \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t}\} = Ae^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \phi_0) \quad (5.66)$$

Tento priebeh pre $\beta < \omega_0$ a $\phi_0 = 0$ je pre názornosť ukázaný na obr. 64. Z výsledku vidíme, že výchylka bude postupne klesať k nule kvôli exponenciálnemu klesajúcemu faktoru

$$e^{-\beta t}. \quad (5.67)$$

Pre odhad časovej škály poklesu výchylky, jej tlmenia, sa zavádza *relaxačný čas* τ ako čas, za ktorý amplitúda klesne na $1/e$ -násobok jej počiatočnej hodnoty,

$$x(\tau) = \frac{1}{e}x(0) \quad (5.68)$$

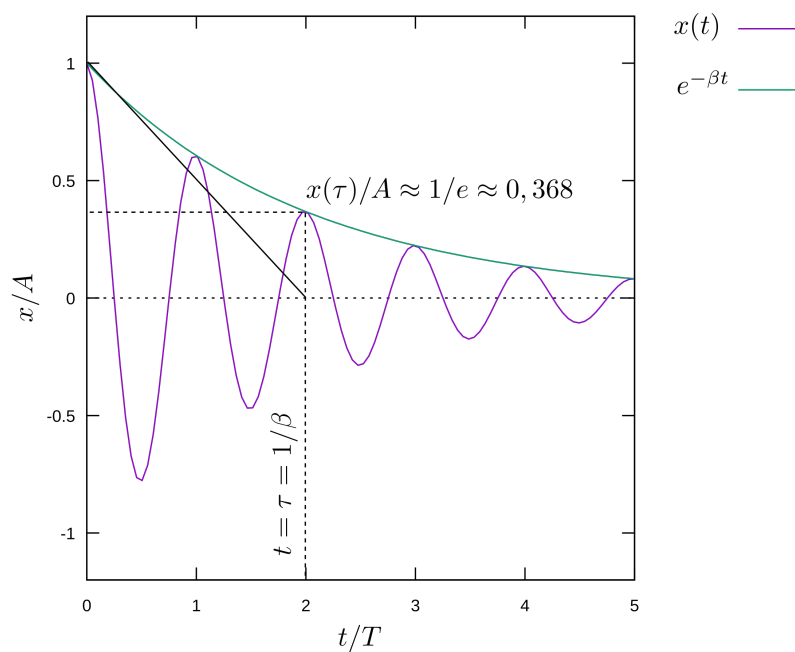
$$Ae^{-\beta\tau} \approx A/e \rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}. \quad (5.69)$$

Čas medzi dvoma nasledujúcimi prechodmi rovnovážnou polohou z rovnakej strany má pôvod v nulových bodoch kosínusu, a nazývame ho podobne ako pri netlmených kmitoch periódou T ,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad (5.70)$$

aj keď v tomto prípade o periodický dej nejde. Kým je splnená podmienka

$$\omega_0 > \beta, \quad (5.71)$$



Obr. 64: Časový priebeh výchylky tlmeného harmonického oscilátora s konkrétnou voľnou $\phi_0 = 0$ a $\beta = 1/(2T)$. Relaxačný čas možno okrem poklesu relatívnej výchylky x/A na $1/e$ aj pomocou prieniku dotýčnice k exponenciálnej obálke v $t = 0$ s časovou osou.

dochádza k nárastu periódy s narastajúcim tlmením. Tento režim sa nazýva *podkritické* tlmenie. Pri vyššom tlmení, t.j. keď

$$\omega_0 < \beta, \quad (5.72)$$

diskriminant v rovnici (5.64) sa stane záporným a riešenie bude mať čisto exponenciálne klesajúci charakter,

$$x(t) = Ae^{-(\beta \mp \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} \cos(\phi_0), \quad (5.73)$$

V takomto režime hovoríme o *nadkritickom* tlmení. Pre kritickú hodnotu tlmenia $\beta = \omega_0$ dochádza k tzv. singulárnemu prípadu, keď vo forme riešenia (5.73) sa zredukujú dve možné riešenia len na jedno, čo nie je postačujúce pre splnenie dvoch počiatočných podmienok. Dá sa ukázať, že v kritickom režime je riešením

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} \quad (5.74)$$

kde A a B sú dva ľubovoľné parametre, ktoré možno nastaviť podľa požadovaných dvoch počiatočných podmienok.

V technickej praxi sa často stretávame s nežiadúcimi spontánnymi osciláciami kvôli náhodným externým vzruchom. Ak chceme, aby tieto oscilácie zanikli čo najrýchlejšie, je potrebné ich nastaviť do režimu kritického tlmenia. Toto sa využíva napríklad pri analógových ručičkových meracích prístrojoch, aby sa ručička ustálila na meranej hodnote čo najrýchlejšie.

Príklad: Výchylka tlmených kmitov má všeobecný tvar $x(t) = A \exp\{-\beta t\} \cos(\omega t + \phi)$, $\beta < \omega$. Nájdite fázu ϕ a amplitúdu A tak, aby počiatočná výchylka bola x_0 a počiatočná rýchlosť $v_0 = 0$.

Riešenie:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi) \quad (5.75)$$

$$\dot{x}(t) = -\beta Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi) - Ae^{-\beta t} \omega \sin(\omega t + \phi) \quad (5.76)$$

$$x(0) = A \cos(\phi) \quad (5.77)$$

$$v_0 = 0 = \dot{x}(0) = -\beta A \cos(\phi) - \omega A \sin(\phi) \quad (5.78)$$

$$\rightarrow \tan(\phi) = -\beta/\omega \quad (5.79)$$

$$\rightarrow \cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan(\phi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\beta^2/\omega^2)}} \quad (5.80)$$

$$\rightarrow A = x_0/\cos(\phi) = x_0\sqrt{1 + \beta^2/\omega^2} \quad (5.81)$$

Príklad: Aké je dolné ohraničenie koeficientu útlmu β , ak pred druhým prechodom rovnovážnej polohy bola veľkosť výchylky maximálne $x_0/2$? Uvažujte počiatkové podmienky $x_0 \neq 0, v_0 = 0$.

Riešenie: Koeficient útlmu bude minimálny, keď bude výchylka presne rovná $x_0/2$:

$$\begin{aligned}
 x(T/2) &= x_0 \sqrt{1 + \beta^2/\omega^2} e^{-\beta T/2} \cos(\omega T/2 - \text{atan}(\beta/\omega)) \\
 &= x_0 \sqrt{1 + \beta^2/\omega^2} e^{-\beta T/2} \cos((2\pi/T)T/2 - \text{atan}(\beta/\omega)) \\
 &= x_0 \sqrt{1 + \beta^2/\omega^2} e^{-\beta T/2} (-1) \cos(-\text{atan}(\beta/\omega)) \\
 &= x_0 \sqrt{1 + \beta^2/\omega^2} e^{-\beta T/2} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2/\omega^2}} \\
 &= x_0 e^{-\beta T/2} \\
 \rightarrow \ln(x(T/2)/x_0) &= -\beta T/2 \\
 \ln(1/2) &= -\beta T/2 \rightarrow \beta = \frac{2 \ln 2}{T}
 \end{aligned}$$

a teda výsledok je $\beta \geq \frac{2 \ln 2}{T} = 2 \ln 2 \frac{2\pi}{\omega}$.

Príklad: Nech kriticky tlmený oscilátor má počiatkovú výchylku x_0 a počiatkovú rýchlosť nulovú. V akom čase prejde výchylka prvýkrát nulovou polohou?

Riešenie: Použijeme tvar riešenia (5.74) s predpísanými počiatkovými podmienkami

$$x_0 = (A + B \cdot 0)e^{-\beta \cdot 0} = A, \quad (5.82)$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -\beta(A + Bt)e^{-\beta t} + Be^{-\beta t} \quad (5.83)$$

$$0 = v(0) = -\beta A + B = -\beta x_0 + B \rightarrow B = \beta x_0 \quad (5.84)$$

$$x(t) = x_0(1 - \beta t)e^{-\beta t} \quad (5.85)$$

$$0 = x_0(1 - \beta t_0)e^{-\beta t_0} \quad (5.86)$$

$$t_0 = \frac{1}{\beta}, \quad (5.87)$$

t.j. nulovou hodnotou prejde presne v polčase útlmu.

5.6 Budený harmonický oscilátor

5.6.1 Pohybová rovnica

Pod budeným harmonickým oscilátorom rozumieme model tlmeného harmonického oscilátora, na ktorý pôsobí periodická vonkajšia sila. Táto koná prácu, dodáva mu energiu, a preto sú výsledkom ustálené oscilácie. Amplitúda týchto oscilácii silne závisí na tom nakoľko je frekvencia budiacej sily blízka frekvencii *vlastných* kmitov oscilátora. Pri ich priblížení dochádza k *rezonancii*. Tento jav hrá kľúčovú úlohu pri návrhu mechanických systémov, ale aj na prvý pohľad značne vzdialených problémoch ako je absorpcia svetla.

Ak na tlmený harmonický oscilátor pôsobí vonkajšia sila, pohybová rovnica dostane ďalší člen,

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F(t). \quad (5.88)$$

Predpokladáme, že sila $F(t)$ má periodický charakter. Je možno analyzovať aj všeobecný periodický signál pomocou tzv. Fourierových radov, alebo dokonca aj konečný (a teda neperiodický) impulz sily pomocou Fourierovho integrálu alebo Laplaceovej transformácie. Ich základom je zloženie signálu z viacerých harmonických, a jeden taký harmonický priebeh sily budeme analyzovať tu,

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t), \quad (5.89)$$

kde F_0 je amplitúda sily, ω jej frekvencia, a funkciu \sin sme zvolili preto, aby sila v čase $t = 0$ bola nulová a spojitá sa od tohto okamžiku menila.

5.6.2 Riešenie pohybovej rovnice

Pretože použijeme opäť komplexnú algebru, prepíšeme budiacu silu do tvar

$$F(t) = F_0 \Re\{e^{i(\omega t - \pi/2)}\}, \quad (5.90)$$

a samotná pohybová rovnica pre komplexnú výchylku bude

$$m\ddot{z} = -kz - \gamma\dot{z} + F_0 e^{i(\omega t - \pi/2)}. \quad (5.91)$$

Reálne riešenie, ktoré nás zaujíma, získame hľadaním reálnej časti tejto rovnice.

Komplexné riešenie hľadáme v tvare

$$z(t) = \mathcal{A}e^{i\omega t}, \quad (5.92)$$

s rovnakou uhlovou frekvenciou ako má budiaca sila. Toto umožní vykrátiť exponenciálny faktor z celej rovnice (5.91) a teda nájsť riešenie rovnice. Derivovanie dá násobenie faktorom $i\omega$, čím po úpravách dostaneme rovnicu pre komplexnú amplitúdu

$$\mathcal{A} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta} e^{-i\pi/2}, \quad (5.93)$$

kde sme znovu zaviedli označenie $\beta = \gamma/(2m)$ a $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Menovateľ je komplexné číslo, ktoré prepíšeme pomocou jeho amplitúdy a fázy,

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} e^{i\theta}, \quad (5.94)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) + m\pi \quad (5.95)$$

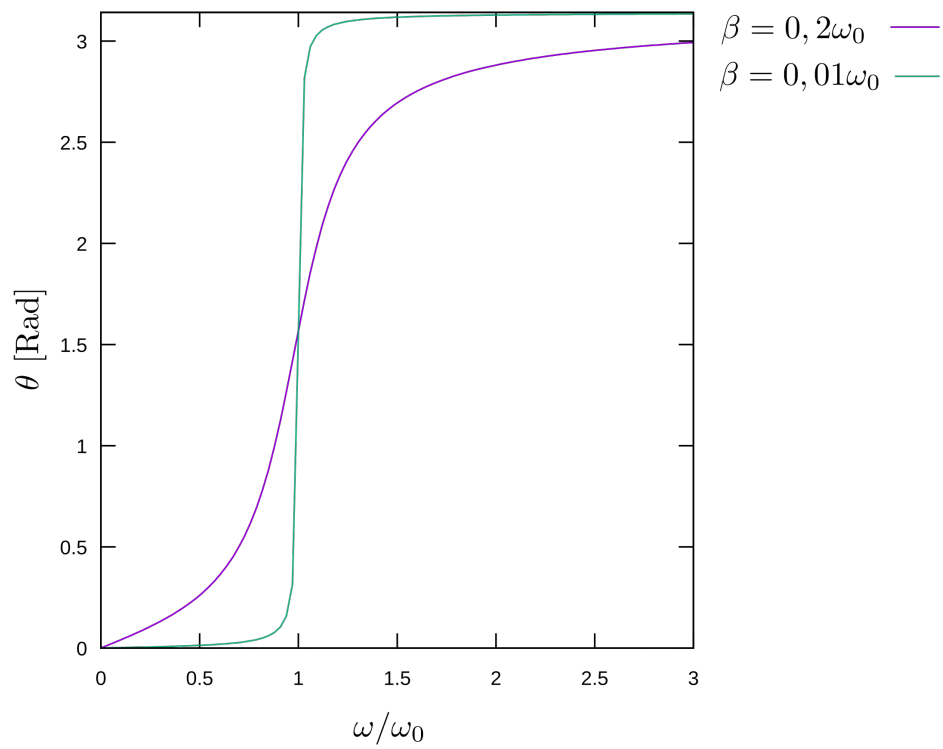
Pretože imaginárna časť tohto čísla je vždy kladná, $2\beta\omega > 0$, musí byť uhol $\theta \in (0, \pi)$, a teda ak pre $m = 0$ vychádza $\theta < 0$, musíme vziať výpočet uhlu s $m = 1$

5.6.3 Charakter riešenia

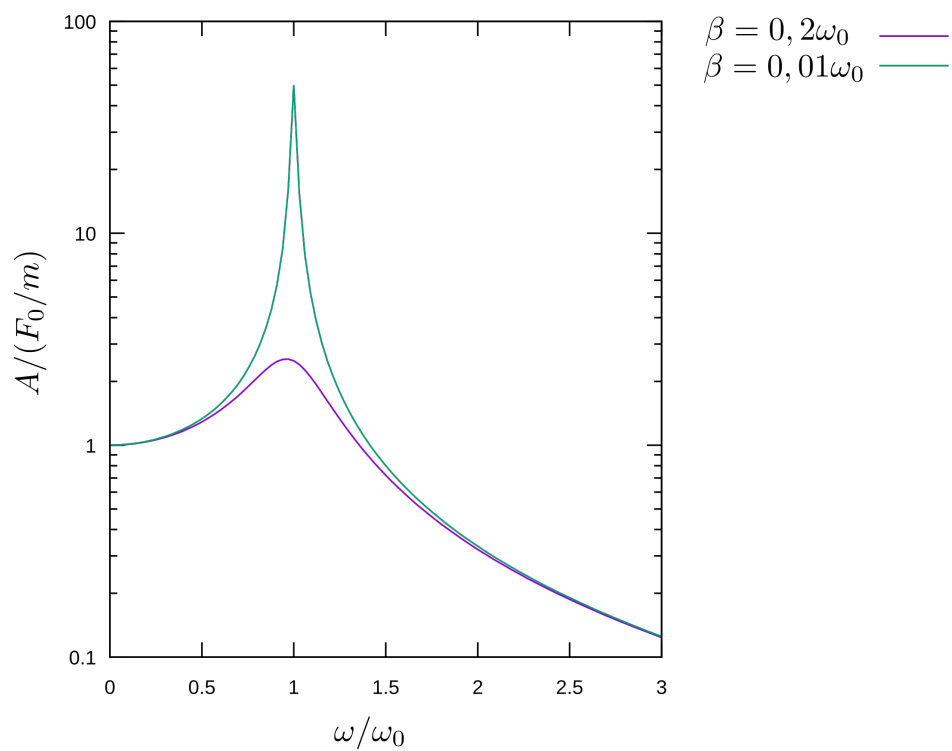
Reálne riešenie dostaneme ako reálnu časť komplexného, čo možno pomocou predchádzajúcich úprav spraviť celkom jednoducho,

$$x(t) = \Re\{ \mathcal{A}e^{-i(\theta+\pi/2)} e^{i\omega t} \} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \sin(\omega t - \theta(\omega)). \quad (5.96)$$

Výsledok predstavuje harmonické kmity výchylky, s frekvenciou rovnou frekvencii budiacej sily, no výchylka zaostáva sa silou o fázový posun $\theta(\omega) > 0$, daný rovnicou (5.95). Ako vidieť z grafu fázového posunu $\theta(\omega)$ (Obr.65), výchylka kmitov oscilátora zaostáva za výchylkou budiacej sily, pričom táto závislosť je monotónna, pre malú frekvenciu budenia je toto zaostávanie malé, výchylka kmitá takmer vo fáze zo silou. Pre veľké frekvencie mechanický oscilátor “nestíha” za silou a zaostáva takmer o π , t.j. keď je sila maximálna a kladná, výchylka je maximálna a záporná, t.j. ide takmer v protifáze voči sile. Pri rezonancii fázový posun prechádza cez hodnotu $\pi/2$, t.j. keď je sila maximálna, výchylka prechádza nulou. Tento prechod, medzi 0 a π predstavuje takmer okamžitý skok, ak je tlmenie oscilátora β veľmi malé.



Obr. 65: Fáza komplexnej amplitúdy budeného harmonického oscilátora sa mení v závislosti od frekvencie budenia od 0 po π , pričom najmä pre nízke hodnoty tlmenia β ide prakticky o “prepnutie” medzi týmito dvoma hodnotami pri frekvencii rovnej vlastnej frekvencii oscilátora.



Obr. 66: Závislosť amplitúdy budeného harmonického oscilátora od frekvencie budenia. Ak sa frekvencia blíži k vlastnej frekvencii oscilátora, ω_0 , potom amplitúda nadobúda veľké hodnoty. Hovoríme, že pri $\omega = \omega_0$ dochádza k rezonancii. Rezonancia je výraznejšia pre malé hodnoty koeficientu útlmu β .

Závislosť amplitúdy od frekvencie budenia má nemonotónny charakter (Obr. 66), ktorý vykazuje výrazné maximum pri frekvencii rovnej vlastnej frekvencii oscilátora. Tomuto javu hovoríme rezonancia. Takýto extrémny nárast amplitúdy znamená, že aj malá amplitúda budiacej sily, pokiaľ je jej frekvencia rovná vlastnej frekvencii, dokáže vyvolať veľmi veľké výchylky.

Príklad: Príklady rezonancie vo svete okolo nás sú mnohé:

- Pri hojdaní dieťaťa na hojdačke stačí, ak do nej jemne šfucháme, no presne v periódach, ako sa hojdačka sama chce kývať, a po čase dosiahneme veľmi veľké kmity.
- Mosty budené pravidelným pohybom, ak v sebe obsahuje aj vlastnú frekvenciu kmitov mosta, sa môžu natoľko rozkývať, že príde až k ich deštrukcii.
- V aute, pri určitých otáčkach motora zrazu počujeme veľmi výrazné vibrácie niektorej mechanickej časti - frekvencia otáčok motora sa rovná vlastnej frekvencii tej časti, a hoci prepojenie motor-mechanický diel je nepriame a slabé, kvôli rezonancii dochádza k veľkým kmitom.
- Pri prijímaní rádiového signálu nastavujeme rezonančnú frekvenciu LC-obvodu (obvod s kondenzátorom a cievkou) na frekvenciu, na ktorej je vysielané. Pri vyladení aj chabé pôsobenie rádiových vln vynúti kmity prúdu v obvode, ktoré úpravou a následným zosilnením dajú počuteľný signál.
- Ak prechádza biele svetlo, ktoré obsahuje široké spektrum frekvencií elektromagnetických vln, cez látku, niektoré frekvencie v ňom po prechode celkom vymiznú z priamo prechádzajúceho svetla a bočné rozptýlené svetlo tieto frekvencie naopak obsahuje v zvýšenom množstve. Ide o rezonančnú absorpciu a emisiu svetla. Látka, napr. molekuly, majú v sebe elektróny a kladné jadrá. Elektrické pole elektromagnetickej vlny, ktoré osciluje s frekvenciami aké sa vo svetle nachádzajú pôsobí na elektróny aj jadrá budiacou silou a vynucuje ich osciláciu. Úlohu pružiny tu hrajú sily elektrostatického priťahovania elektrónov a jadier spolu s kvantovomechanickým popisom ich pohybu, no podstata je rovnaká ako pri tu analyzovanom mechanickom harmonickom oscilátore.

5.6.4 Priemerný výkon dodávaný oscilátoru

Ešte častejšie ako so závislosťou amplitúdy kmitov od frekvencie pre oscilátor sa pracuje s energiou absorbovanou oscilátorom za jednu periódu (frekvencie budenia), t.j. priemerným výkonom

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T F(t)\dot{x}(t)dt \quad (5.97)$$

Výpočet tohto integrálu je ľahký, ide len o goniometrické funkcie času, no samotná algebra je trochu náročnejšia a preto si tu uvedieme kompletný postup,

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \theta(\omega))\omega \quad (5.98)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{F_0^2}{m} \frac{\sin(\omega t) \cos(\omega t - \theta)\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (5.99)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{F_0^2}{m} \frac{\sin(\omega t) (\cos(\omega t) \cos(\theta) + \sin(\theta) \sin(\omega t)) \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad (5.100)$$

kde sme použili súčtový vzorec pre kosínus. Integrál cez periódu zo súčiny

$$\sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \quad (5.101)$$

dá nulu (plocha pod funkciou sin cez dve periódny). Integrál cez periódu zo súčiny,

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \quad (5.102)$$

dá nenulový príspevok len kvôli konštantnému členu 1/2, druhý oscilujúci člen dá opäť nulu,

$$\int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{T}{2} \quad (5.103)$$

Ku koncovej úprave ešte vyjadríme $\sin(\theta)$ pomocou vzťahu (5.95)

$$\sin(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2(\theta)}} \quad (5.104)$$

$$= \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (5.105)$$

čím nájdeme výsledný vzťah pre priemerný absorbovaný výkon

$$P = \frac{F_0^2}{m} \frac{\beta \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} \quad (5.106)$$

V praktických prípadoch rezonancie býva tlmenie β veľmi malé, t.j. $\beta \ll \omega_0$, kedy odvodená závislosť má nezanedbateľné hodnoty voči svojmu maximu len pre $\omega \approx \omega_0$, t.j. k absorpcii energie od budiacej sily dochádza len pri frekvencii budenia blízkej vlastnej frekvencii oscilátora. V tomto prípade približne platí

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx (\omega_0 - \omega)2\omega \quad (5.107)$$

čo zjednoduší výraz pre priemerný výkon,

$$P \approx \frac{F_0^2}{4m} \frac{\beta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2} \quad (5.108)$$

Táto závislosť od frekvencie sa nazýva aj Lorentzián a popisuje charakteristický tvar pre akúkoľvek rezonanciu. Maximum nadobúda pre $\omega = \omega_0$ a jej hodnota v maxime je

$$P(\omega_0) = \frac{F_0^2}{4m} \frac{1}{\beta}, \quad (5.109)$$

t.j. pre zmenšujúci sa koeficient tlmenia rastie cez všetky medze. Šírka čiary sa určuje pomocou parametra FWHM (z anglického Full Width at Half Maximum). Polovicu maxima, $\frac{1}{2}P(\omega_0)$, nadobúda keď

$$\omega_0 - \omega_{\text{FWHM}} = \pm\beta, \rightarrow \omega_{\text{FWHM},1,2} = \omega_0 \pm \beta, \quad (5.110)$$

a teda

$$\text{FWHM} = 2\beta. \quad (5.111)$$

Šírka Lorentziánu teda s klesajúcim tlmením klesá.

Pri technickom využívaní rezonancie, napr. v rezonančných elektrických obvodoch na príjem signálu s požadovanou frekvenciou, je snahou doceliť čo najostrejšiu rezonanciu. Kvalita rezonančného systému sa potom charakterizuje pomocou *kvality* rezonančného obvodu, danej pomerom

$$Q = \frac{\omega_0}{\text{FWHM}} \quad (5.112)$$

V prípade harmonického oscilátora nájdeme

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\sqrt{km}}{\gamma}. \quad (5.113)$$

Zaujímavou vlastnosťou Lorentziánu je, že plocha pod Lorentziánom nezávisí od samotného tlmenia,

$$\int d\omega \frac{\beta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2} = \pi \quad (5.114)$$

čo súvisí s pozorovaním, že maximum rastie a šírka klesá s klesajúcim β .

5.6.5 Počiatočné podmienky a prechodný dej

V tejto poslednej podčasti sa vrátíme k jednoznačnosti riešenia pohybovej rovnice buďeného oscilátora. Riešenie uvedené v rovnici (5.96) nemá žiadne neurčité konštanty, a preto spĺňa len určité konkrétne počiatočné podmienky na výchylku a rýchlosť v čase $t_0 = 0$. Toto riešenie nazývame *partikulárnym* riešením, ktorá spĺňa rovnicu (5.88) s budiacou silou. Zo všeobecných úvah ale vieme, že aj pri pôsobení vonkajšej sily môžeme počiatočné podmienky nastaviť ľubovoľne na nejaké $x(0)$ a $v(0)$.

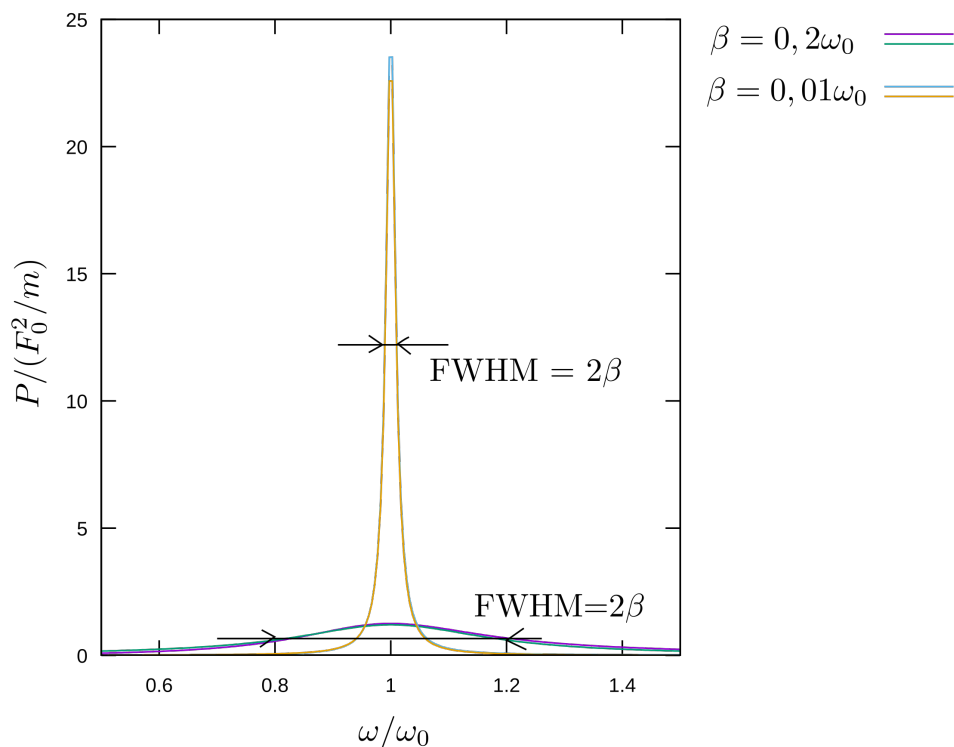
Ľahko sa možno presvedčiť, že *všeobecné* riešenie rovnice (5.88) možno nájsť ako súčet jedného partikulárneho riešenia, napr. (5.96) a riešenia tejto rovnice bez budiacej sily, t.j. tlmeného harmonického oscilátora (5.66). V matematike sa konvenčne diferenciálna rovnica zapisuje tak, že člen zodpovedajúci tlmeniu jediný ostáva na pravej strane rovnice, a riešeniu diferenciálnej rovnice tlmeného oscilátora bez budiacej sily sa hovorí riešenie bez pravej strany alebo riešenie *homogénnej* rovnice.

Všeobecné riešenie buďeného harmonického oscilátora nakoniec teda nadobúda tvar

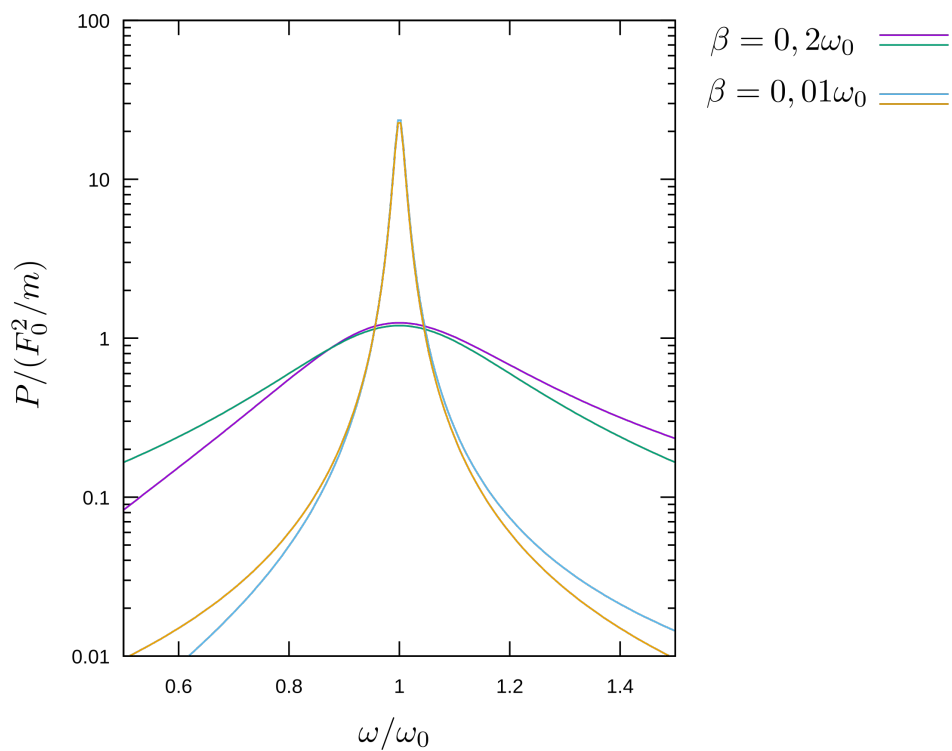
$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \phi_0\right) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \sin(\omega t - \theta) \quad (5.115)$$

Konštanty A a ϕ_0 možno určiť podľa konkrétnych počiatočných podmienok.

Pre dostatočne dlhý čas prvá časť, popísaná tlmenými kmitami, postupne klesne na exponenciálne malý príspevok a kmity budú mať presne charakter partikulárneho riešenia. Dej, počas ktorého je charakter kmitania ovplyvňovaný počiatočnými podmienkami nazývame *prechodný dej*. Jeho trvanie je v tomto prípade dané koeficientom útlmu $\tau = 1/\beta$, ako sme videli pri analýze tlmených kmitov. Príklad prechodného deju a jeho ustálenia do vynútených kmitov je na Obr. 69.



Obr. 67: Závislosť priemerného výkonu dodaného budnému harmonického oscilátora od frekvencie budenia. Rezonancia je sprevádzaná výrazným zvýšením priemerného výkonu. Pre uvedené hodnoty frekvencií budenia je rozdiel medzi presnou závislosťou a závislosťou danou Lorentziánom (dáta s dolným farebným kódom) nemožno odlíšiť. Šírka krivky klesá, kým jej hodnota v maxime narastá s klesajúcim tlmením tak, že plocha pod uvedenými krivkami je zhruba rovnaká.



Obr. 68: Závislosť priemerného výkonu dodaného budnému harmonického oscilátora od frekvencie budenia v logaritmickej škále, inak ide o rovnaké krivky ako na obr. 67. Pomocou logaritmickej škály dokážeme vidieť rozdiely medzi Lorentziánom a presnou závislosťou, no ich veľkosť nie je veľká, a klesá s klesajúcim tlmením.

Príklad: (Tento príklad nie je určený na prednášku, ale na numerické cvičenie s PC) Nájdite hodnoty parametrov A a ϕ_0 pre počiatočné podmienky $x(0) = x_0$ a $v(0) = v_0$ pre budený harmonický oscilátor, a nájdite a znázornite prechodný dej do grafu, pričom čas nech je uvádzaný v násobkoch periódy budiacej sily a výchylka v násobkoch počiatočnej výchylky.

Riešenie: Z všeobecného riešenia (5.115) nájdeme vyjadrenie pre počiatočnú výchylku a rýchlosť,

$$\begin{aligned} x(0) &= A \cos(\phi_0) - \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \sin(\theta(\omega)) \\ &= A \cos(\phi_0) - \frac{F_0}{m} \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \end{aligned} \quad (5.116)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= -\beta A \cos(\phi_0) - A\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \sin(\phi_0) + \frac{F_0}{m} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\theta) \\ &= -\beta A \cos(\phi_0) - A\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \sin(\phi_0) + \frac{F_0}{m} \frac{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \end{aligned} \quad (5.117)$$

Označíme si menovateľ

$$M = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2. \quad (5.118)$$

Vyjadríme $A \cos(\phi_0)$,

$$\begin{aligned} A \cos(\phi_0) &= x_0 + \frac{F_0}{m} \frac{2\beta\omega}{M} = A_x \\ v_0 &= -\beta x_0 - \frac{F_0}{m} \frac{2\beta^2\omega}{M} - A\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \sin(\phi_0) + \frac{F_0}{m} \frac{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{M} \\ A \sin(\phi_0) &= \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \left(-v_0 - \beta x_0 + \frac{F_0\omega}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\beta^2}{M} \right) = A_y \end{aligned}$$

Zo známych A_x a A_y , ktoré sú vyjadrené len pomocou známych parametrov, už nájdeme amplitúdu a fázu,

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \quad \phi_0 = \tan^{-1}(A_y/A_x) + m\pi \quad (5.119)$$

Keď chceme zobrazovať toto riešenie, je užitočné zvoliť si časovú škálu. Výhodné bude merať čas v násobkoch periódy budenia T . Potom $t = sT$, kde s je bezrozmerný čas v násobkoch periódy. Vo výrazoch pre všeobecné

riešenie sa potom stretne s výrazmi typu

$$\omega t = \omega T s = 2\pi s, \quad (5.120)$$

$$\beta t = \beta T s = 2\pi \frac{\beta}{\omega} s = 2\pi \beta' s, \quad (5.121)$$

$$\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t = 2\pi \sqrt{(\omega_0/\omega)^2 - (\beta/\omega)^2} s = 2\pi \sqrt{(\omega'_0)^2 - (\beta')^2} s, \quad (5.122)$$

kde sme si rovno zaviedli bezrozmernú vlastnú frekvenciu $\omega'_0 = \omega_0/\omega$ a koeficient útlmu $\beta' = \beta/\omega$.

Tieto vnesieme aj do vzťahov pre A_x a A_y ,

$$A_x = x_0 + \frac{F_0}{m\omega^2} \frac{2\beta'}{((\omega'_0)^2 - 1)^2 + 4(\beta')^2} \quad (5.123)$$

$$A_y = \frac{1}{\sqrt{(\omega'_0)^2 - (\beta')^2}} \left(-\frac{v_0}{\omega} - \beta' x_0 + \frac{F_0}{m\omega^2} \frac{((\omega'_0)^2 - 1^2) - 2(\beta')^2}{((\omega'_0)^2 - 1)^2 + 4(\beta')^2} \right) \quad (5.124)$$

Podobne ako sme si zaviedli meranie času v násobkoch periódy budenia, môžeme si zaviesť aj jednotku merania výchylky. Máme dve dĺžkové škály: (1) v násobkoch počiatocnej výchylky x_0 , (2) v násobkoch amplitúdy kmitov na ktorej sa ustália buденé kmity. Druhá možnosť nie je veľmi šikovná, nakoľko táto amplitúda závisí aj od voľby tlmenia a frekvencie vlastných kmitov, ktoré vedieme ako premenné. Na druhej strane, Výraz

$$\frac{F_0}{m\omega^2} \quad (5.125)$$

vystupujúci vo vzťahoch pre A_x a A_y tiež predstavuje dĺžku, a charakterizuje silu budenia, a teda je možné ho brať za jednotku merania vzdialenosti. Tu si ale vyberieme počiatocnú výchylku, nakoľko táto má jasný geometrický význam. Vo vzťahoch nám teda vzniknú označenia

$$x(t) = x'(t)x_0 \quad (5.126)$$

$$A_x = A'_x x_0, A_y = A'_y x_0 \quad (5.127)$$

a navyše sa oplatí zaviesť nasledovné označenie,

$$v_0 = u_0 \frac{x_0}{T} \quad (5.128)$$

$$\frac{F_0}{m\omega^2 x_0} = f_0 \quad (5.129)$$

V prvom, u_0 má zmysel počiatocnej rýchlosti v násobkoch počiatocnej výchylky za jednu periódu, druhý výraz je pomer dĺžkovej škály danej silou budenia a počiatocnej výchylky.

Pomocou týchto označení máme riešenie v nasledovnom tvare

$$x'(s) = A'e^{-2\pi\beta's} \cos(2\pi\sqrt{(\omega'_0)^2 - (\beta')^2}s + \phi_0) \quad (5.130)$$

$$+ \frac{f_0}{\sqrt{((\omega'_0)^2 - 1)^2 + 4(\beta')^2}} \sin(2\pi s - \theta) \quad (5.131)$$

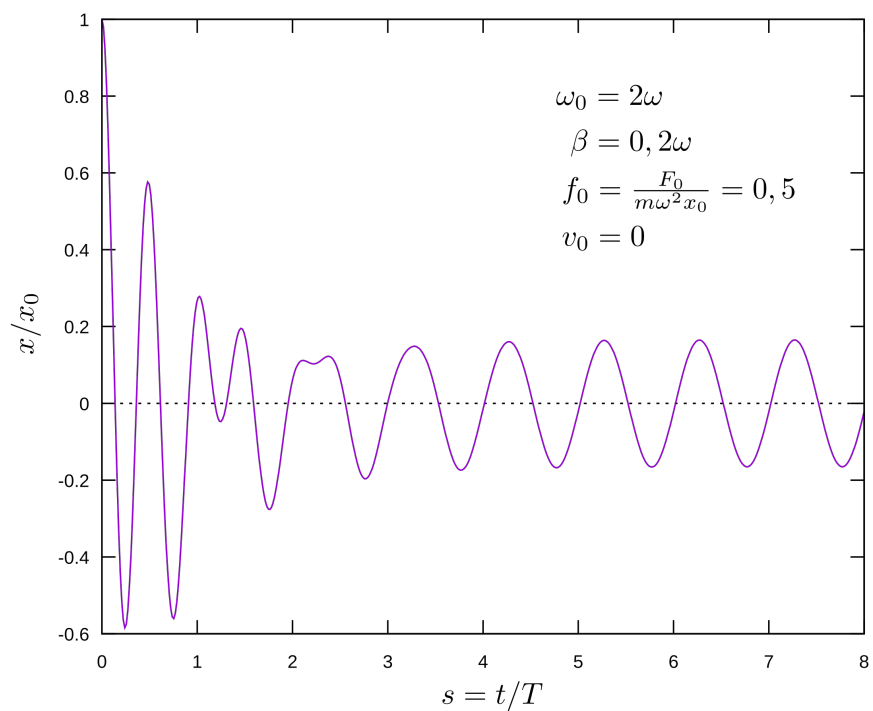
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2\beta'}{(\omega'_0)^2 - 1} \right) + m\pi \quad (5.132)$$

$$A' = \sqrt{(A'_x)^2 + (A'_y)^2}, \phi_0 = \tan^{-1}(A'_y/A'_x) + n\pi \quad (5.133)$$

$$A'_x = 1 + f_0 \frac{2\beta'}{((\omega'_0)^2 - 1)^2 + 4(\beta')^2} \quad (5.134)$$

$$A'_y = \frac{1}{\sqrt{(\omega'_0)^2 - (\beta')^2}} \left(-\frac{u_0}{2\pi} - \beta' + f_0 \frac{((\omega'_0)^2 - 1) - 2(\beta')^2}{((\omega'_0)^2 - 1)^2 + 4(\beta')^2} \right) \quad (5.135)$$

Uvedené vzťahy možno naprogramovať v programovacom jazyku podľa preferencií študenta, jednoduchá možnosť je aj pomocou skriptu pre program gnuplot. (môže byť linka na môj skript) Výsledný priebeh pre $\omega_0 = 2\omega$, $\beta = 0,2\omega$, $f_0 = 0,5$ a $u_0 = 0$ je na obrázku 69.



Obr. 69: Časový priebeh výchylky budeného oscilátora s prechodným javom. Na škále času $\tau \sim 1/\beta = 0,8T$ je priebeh výsledkom interferencie tlmených kmitov s frekvenciou vlastných kmitov a partikulárnymi kmitami s frekvenciou $\omega = 2\pi/T$. Po ustálení prechodového javu vidíme už len čistý harmonický signál vynúteného kmitania.

6 Hydromechanika

6.1 Kvapaliny

Kvapaliny vykazujú nestálosť tvaru, čo priamo určuje to, ako s nimi pracujeme v bežnom živote i v rámci fyzikálneho popisu. Nestálosť tvaru vylučuje, aby sme stav kvapaliny popísali pomocou jedného polohového vektora (napr. ťažiska) a pár uhlov natočenia. Ich popis je založený na sledovaní malých hmotných elementov kvapaliny, ako sa každý z nich pohybuje, aké sily na neho pôsobia. Jednotlivé elementy vieme popísať pomocou Newtonových zákonov. Matematický aparát, ktorý umožňuje kompaktné sledovanie všetkých hmotných elementov kvapaliny využíva vektorové parciálne diferenciálne rovnice na hľadanie vektorového poľa rýchlosti, sa detailne preberá v rámci hydrodynamiky. V rámci tohto kurzu sa oboznámime so základnými pojmami hydrodynamiky a naučíme sa riešiť technicky dôležité problémy hydrostatiky a ustáleného prúdenia.

6.2 Tlak

Tlak je veličina, označovaná ako p , pomocou ktorej dokážeme spočítať silu pôsobiacu na plochu S pomocou súčinu

$$F = pS. \quad (6.1)$$

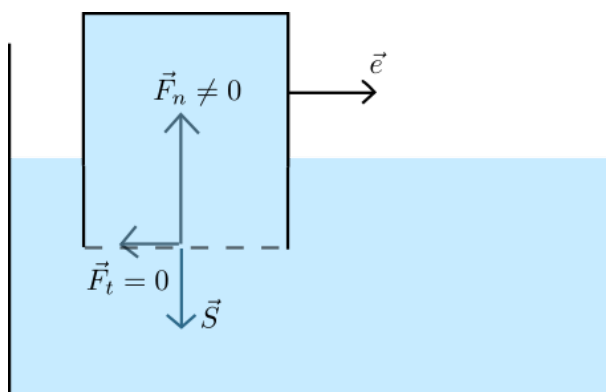
Fyzikálna jednotka tlaku vychádza z tejto rovnice, a nazýva sa Pascal

$$[p] = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{Pa} \quad (6.2)$$

Toto zavedenie v nasledujúcom upresníme, vzhľadom na naše poznatky o sile, t.j. ako veličiny ktorá má smer a pôsobisko. Zároveň uvážime, že tlak má v rôznych miestach kvapaliny rôznu hodnotu, t.j. je funkciou polohového vektora, $p(\vec{r})$.

Kdekoľvek v kvapaline si vyberieme rovinnú plôšku \vec{S} . Vektor plochy má veľkosť rovnú veľkosti plochy a jeho smer je orientovaný kolmo na túto plochu. Z dvoch možných orientácií si vyberieme jednu. Orientácia plôšky bude indikovať, že táto plocha tvorí časť hranice kvapaliny nachádzajúcej sa na opačnej strane ako je orientovaný vektor plochy. V matematike sa tejto konvencii hovorí, že vektor plochy je orientovaný v smere *vonkajšej normály*.

Silu, pôsobiacu na kvapalinu za plôškou \vec{S} si označíme \vec{F} . Pôvodcom tejto sily je kvapalina nachádzajúca sa pred touto plôškou. Každú takúto silu možno rozložiť na *normálovú zložku*, v smere plochy na ktorej pôsobí, a na *tangenciálnu zložku*, rovnobežnou s rovinou plôšky. Ako je demonštrované na



Obr. 70: Na myslenú plochu S , uzatvárajúcu vodu v pohári, pôsobí normálová sila \vec{F}_n , ktorá je spôsobená tlakom v kvapaline, a prejavuje sa vztlakovou silou pôsobiacou na plný obrátený pohár. Ak dostatočne pomaly hýbeme pohár v smere paralelnom s rovinou plochy S , v smere \vec{e} , t.j. tangenciálnom k ploche S , kvapalina nebude vykazovať odpor voči tomuto pohybu, t.j. naznačená tangenciálna sila \vec{F}_t je nulová. Toto hovorí o nestálosti tvaru kvapaliny.

obr. 70, pre kvapalinu v pokoji sú tangenciálne sily nulové, čo priamo súvisí s nestálosťou tvaru kvapalín. Normálová časť sily pôsobí v smere opačnom ako je vzatá vonkajšia normála plôšok, preto môžeme písať

$$\vec{F} = -p\vec{S}, \quad (6.3)$$

kde p je tlak v mieste vybranej plôšky S .

Pri hydromechanických úvahách budeme často pracovať s predstavou, že sa zameriame na určité malé množstvo kvapaliny, ktorú budeme nazývať *element*, nachádzajúci sa v mieste \vec{r} , s objemom V , a ohraničeným plochou S . Túto plochu dokážeme vyskladať z malých rovinných plôšok \vec{S}_i a celková sila pôsobiaca na tento element prostredníctvom tlaku bude

$$\vec{F} = - \sum_i p(\vec{r}_i) \vec{S}_i, \quad (6.4)$$

kde $p(\vec{r}_i)$ je tlak v mieste, kde sa nachádza plôška \vec{S}_i .

V prípade, že je element kvapaliny veľký, jeho uzatvárajúcu plochu S vyskladáme s plošných elementov $d\vec{S}$. Sila pôsobiaca na element cez plôšku $d\vec{S}$ bude

$$d\vec{F} = -p(\vec{r})d\vec{S} \quad (6.5)$$

a celková sila naň pôsobiaca bude

$$\vec{F} = - \int_S p(\vec{r}) d\vec{S}. \quad (6.6)$$

Integrál v poslednej rovnici nazývame plošný integrál 2. druhu a predstavuje limitný prechod na súčet veľa malých delení v rovnici (6.4).

6.3 Hustota

Hustotu zavádzame ako veličinu, pomocou ktorej vieme spočítať hmotnosť, ak poznáme jej objem,

$$m = \rho V. \quad (6.7)$$

Hoci celková hmotnosť daného množstva látky je nemenná ²⁰, hustota sa meniť môže, ak sa látka rozpína či stláča, a zaberá tak rôzny objem.

Z experimentov sa zistilo, že objem daného množstva kvapaliny sa mení pri zmene tlaku a teploty (θ pre Celziovu stupnicu), t.j. objem je funkciou tlaku aj teploty $V(p, \theta)$. Táto závislosť je vo všeobecnosti nelineárna, no pre približný výpočet je možno uvažovať jej lineárny rozvoj v okolí vybraného referenčného tlaku a teploty. Prakticky sa často používa pre štandardný referenčný tlak

$$p_a = 101,325 \text{ Pa}, \quad (6.8)$$

ktorý zodpovedá typickému atmosférickému tlaku na úrovni mora. Pri štandardnej teplote sú zaužívané viaceré hodnoty, napr. v chémii je to často teplota prostredia

$$\theta^o = 25^\circ \text{C}. \quad (6.9)$$

Lineárny rozvoj v okolí štandardných podmienok potom bude mať tvar

$$V(p, \theta) = V(p_a, \theta^o) (1 - \kappa(p - p_a) + \beta(\theta - \theta^o)), \quad (6.10)$$

alebo zjednodušene,

$$\Delta V = -V\kappa\Delta p + V\beta\Delta\theta \quad (6.11)$$

kde

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left. \frac{\Delta V}{\Delta p} \right|_{\Delta\theta=0} \rightarrow -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \quad (6.12)$$

²⁰Zmeny hmotnosti v dôsledku premeny energie napr. pri jadrových reakciách sú v mechanických problémoch úplne zanedbateľné.

je koeficient objemovej stlačiteľnosti a

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta \theta} \Big|_{\Delta p=0} \rightarrow \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (6.13)$$

je koeficient objemovej rozťažnosti. Znak *parciálnej derivácie*, $\frac{\partial}{\partial}$, sa používa na zdôraznenie, že funkcia $V()$ má viac premenných, pričom ostatné premenné, podľa ktorých nederivujeme, považujeme za konštanty.

Dosadením vzťahov (6.12) a (6.13) do (6.11) nájdeme matematický zápis pre *úplný diferenciál* objemu v referenčnom stave, t.j. vyjadrenie pre celkovú zmenu objemu, ak sa málo zmenia tlak a teplota od referenčných hodnôt,

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial V}{\partial \theta} \Delta \theta. \quad (6.14)$$

Pre infinitezimálne malé zmeny zapisujeme toto tiež v tvare

$$dV = \frac{\partial V}{\partial p} dp + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta. \quad (6.15)$$

“ V ” v uvedených vzťahoch (6.11-6.13) má význam objemu v referenčnom stave, $V = V(p_a, \theta^o)$. Tento objem bol vydedený z rozvojových koeficientov v rovnici (6.10), pretože objem je extenzívna veličina, rastúca s množstvom, kým koeficienty charakterizujúce materiál, uvádzané v špecializovaných tabuľkách, často prístupných na internete, sú nezávislé od jeho množstva. Koeficienty závisia aj od voľby referenčných hodnôt tlaku a teploty, a preto vo výpočtoch je užitočné uvádzať aj ich hodnoty.

Zo závislosti objemu vybraného množstva kvapaliny od tlaku a teploty dokážeme nájsť aj závislosť hustoty od týchto veličín, vychádzajúc z hmotnosti, ktorá sa pri zmene tlaku a teploty nemení,

$$m = \rho(p, \theta) V(p, \theta) \quad (6.16)$$

$$m = (\rho + B \Delta p + C \Delta \theta) (V - V \kappa \Delta p + V \beta \Delta \theta) \quad (6.17)$$

$$0 = \Delta p (B V - \rho V \kappa) + \Delta \theta (C V + \rho V \beta) + \dots \quad (6.18)$$

kde zanedbávame členy úmerné súčinu dvoch malých čísiel, Δp a $\Delta \theta$. Aby posledná rovnica platila pre rôzne, ale malé zmeny tlaku a teploty, musí platiť $B = \rho \kappa$ a $C = -\rho \beta$, t.j.

$$\Delta \rho = \rho \kappa \Delta p - \rho \beta \Delta \theta. \quad (6.19)$$

K rovnakému výsledku by sme prišli pomocou formálnych pravidiel o derivovaní, napr.

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{m}{V(p, \theta)} = -\frac{m}{V^2} \frac{\partial V}{\partial p} = \rho \kappa. \quad (6.20)$$

Pri riešení statiky a dynamiky kvapalín sa stretávame s problémami, keď sú teplota a/alebo tlak v rôznych miestach kvapaliny rôzne. Preto zavádzame hustotu ako funkciu polohového vektora,

$$\rho(\vec{r}) = \rho(p(\vec{r}), \theta(\vec{r})) \quad (6.21)$$

ako veličinu, ktorej integrál cez objem V dá hmotnosť látky, ktorá sa v ňom nachádza,

$$m_V = \int_V \rho(\vec{r}) d^3r \quad (6.22)$$

Príklad: Koeficient objemovej rozťažnosti vody pri atmosférickom tlaku a teplote 20°C je $\kappa = 4,7 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$. Ak sa zvýši tlak pôsobiaci na vodu o 10-násobok atmosférického tlaku, $\Delta p = 10p_a = 10 \cdot 101 \text{ kPa} = 10^6 \text{ Pa}$, bude relatívna zmena objemu

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p \approx -4,7 \cdot 10^{-4} \approx -0,05\% \quad (6.23)$$

Vodu teda môžeme pri bežných kolísaniach tlaku považovať za nestlačiteľnú.

Koeficient teplotnej rozpínavosti vody pri 20°C a atmosférickom tlaku je $\beta = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Relatívna zmena objemu vody pri zohriatí o $\Delta\theta = 30^\circ\text{C}$ bude

$$\frac{\Delta V}{V} = \beta \Delta\theta \approx 2,0 \cdot 10^{-4} \cdot 30 \approx 0,6\% \quad (6.24)$$

S teplotou sa teda voda rozpína veľmi málo, no tento efekt bude výraznejší pri bežných procesoch ako vplyv tlaku na hustotu. Zmena hustoty kvapaliny s teplotou je kľúčovo dôležitá pri vzniku prirodzeného prúdenia ako napríklad prúdenie vody v ohrievajúcom sa hrnci.

V skutočnosti je závislosť hustoty od teploty pri atmosférickom tlaku nelineárna, s minimom pri $\theta = 4^\circ\text{C}$ ²¹.

²¹http://www.engineeringtoolbox.com/water-density-specific-weight-d_595.html

$\theta[^\circ\text{C}]$	$\rho[\text{kg}/\text{m}^3]$
0	999,8
4	1000
10	999,7
20	998,2
30	995,7
40	992,2
50	988,1
60	983,2
70	977,8
80	971,8
90	965,3
100	958,4

Tabuľka 2: Tabuľka hodnôt hustoty vody pre viacero hodnôt teploty pri atmosférickom tlaku. Hustota vody pri 4°C je vyššia ako pri bode mrazu, hoci tento rozdiel je len 0,02%!

Príklad: Teplota, objem a tlak plynov spĺňajú s dobrou presnosťou stavovú rovnicu ideálneho plynu

$$pV = nRT, \quad (6.25)$$

kde n je látkové množstvo plynu, T je termodynamická teplota meraná v Kelvinoch ($[T] = \text{K}$), súvisiaca s Celziovou stupnicou pomocou vzťahu

$$T = T_0 + k\theta, \quad T_0 = 273.15\text{K} \text{ a } k = 1\text{K}\cdot^\circ\text{C}^{-1} \quad (6.26)$$

a $R = 8,314\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ je univerzálna molová plynová konštanta. Nájdite koeficienty objemovej stlačiteľnosti a rozpínavosti vzduchu v štandardnom stave, t.j. pri $p = p_a = 101\text{kPa}$ a $\theta^o = 25^\circ\text{C}$.

Riešenie: Podľa (6.12),

$$\kappa = -\frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{p_a}{nRT^o} \frac{\partial}{\partial p} \frac{nRT^o}{p} \Big|_{p=p_a} = \frac{1}{p_a} \approx 10^{-5}\text{Pa} \quad (6.27)$$

a podľa (6.13),

$$\beta = \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p_a}{nRT^o} \frac{\partial}{\partial T} \frac{nRT}{p_a} \Big|_{T=T^o} = \frac{1}{T^o} \approx 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \quad (6.28)$$

Vidíme, že v porovnaní s vodou je vzduch asi 10-krát teplotne rozpínavejší a 100000-krát stlačiteľnejší.

6.4 Hydrostatika

6.4.1 Pascalov zákon

Pascalov zákon hovorí, že tlak v kvapaline pôsobí v každom smere rovnako. Toto experimentálne pozorovanie je vlastne už pretavené do zavedenia tlaku v časti 6.2, kde jediné číslo p nám umožňuje vypočítať veľkosť sily na plochu $d\vec{S}$, ľubovoľne orientovanú,

$$d\vec{F} = -pd\vec{S}, \quad (6.29)$$

pričom jej *veľkosť* od orientácie plôšky nezávisí.

Možno ukázať, že Pascalov zákon je pre kvapalinu v pokoji dôsledkom nulovosti tangenciálnych síl. Uvažujme malý elementárny objem kvapaliny V ohraničený rovinnými plôškami S_i (Obr. 71). Predpokladajme, že sila na jednotkovú plochu by závisela od toho, ako je orientovaná plôška. Silu, pôsobiacu na plôšku \vec{S}_i si označíme ako \vec{F}_i . Každú takúto silu možno rozložiť na *normálovú zložku*, v smere plochy na ktorej pôsobí, a na *tangenciálnu zložku*, rovnobežnou s rovinou plôšky, ktorá je ale podľa predpokladu nulová. Normálové sily v kvapalinách pôsobia v smere opačnom ako je vzatá vonkajšia normála plôšok, preto môžeme písať

$$\vec{F}_i = -p_i\vec{S}_i, \quad (6.30)$$

kde p_i je kladné číslo s fyzikálnym rozmerom $\text{N}\cdot\text{m}^{-2} = \text{Pa}$.

Okrem síl pôsobiacich prostredníctvom plôch, pôsobí na kvapalinu aj tiažová sila,

$$\vec{F}_g = \rho V\vec{g}. \quad (6.31)$$

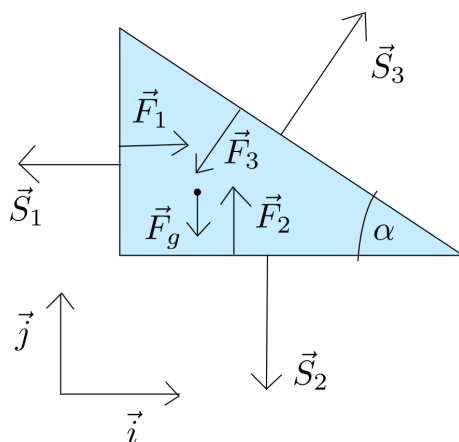
Ak je kvapalina v pokoji, potom súčet síl, pôsobiacich na tento element musí byť nulový. V smere \vec{i} je

$$(-p_1\vec{S}_1 - p_2\vec{S}_2 - p_3\vec{S}_3) \cdot \vec{i} = -p_1S_1 + p_3S_3 \sin(\alpha) = (-p_1 + p_3)S_1 \quad (6.32)$$

pretože $S_1 = S_3 \sin(\alpha)$ a $\vec{S}_2 \cdot \vec{i} = 0$. Pre kvapalinu v pokoji musí byť tento súčet nulový a preto musí platiť $p_1 = p_3$. Pre súčet všetkých síl pôsobiacich na uvažovaný element v smere \vec{j} musíme uvážiť aj tiažovú silu,

$$p_2S_2 - p_3S_3 \cos(\alpha) - V\rho g = (p_2 - p_3)S_2 - V\rho g = 0. \quad (6.33)$$

Ak má element konečnú veľkosť, tlaky p_2 a p_3 sa môžu líšiť o príspevok od tiaže kvapaliny. Ak nás ale zaujíma len fakt, či v prakticky tom istom mieste,



Obr. 71: Na element kvapaliny pôsobia cez plošky \vec{S}_i normálové sily od okolitej kvapaliny.

ale v rôznom smere môže pôsobiť rôzna sila, potom možno uvažovať nasledovnú limitu veľmi malého objemu - nech pri zmenšovaní, sa dĺžka každej stany tohto objemu prenášobí číslom $\epsilon < 1$, čím sa docieli ich zmenšenie a teda $\epsilon \rightarrow 0$ predstavuje limitu nekonečne malého elementu. Potom veľkosti plôšok budú úmerné $\sim \epsilon^2$ a samotný objem $V \sim \epsilon^3$. Pre $\epsilon = 10^{-3}$ bude teda tiažová sila v rovnici (6.33) asi 1000-krát menšia ako príspevok od plošných síl, a teda podobne ako v smere \vec{i} , musí byť splnené $p_2 = p_3$. Vo všeobecnosti môžeme skonštatovať, že *plošná hustota* silového pôsobenia v kvapaline v pokoji je v každom smere rovnaká, t.j. je to skalárna veličina, a ako sme už videli skôr, nazývame ju tlak.

6.4.2 Hydrostatický tlak

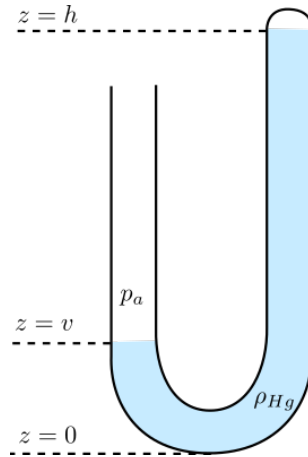
V predchádzajúcej časti sme videli, že tiažová sila pôsobiaca na konečný objem elementu kvapaliny spôsobuje rozdiel tlaku medzi dvoma miestami (Obr. 71),

$$\Delta p = p_2 - p_3 = \rho g V / S_2. \quad (6.34)$$

Pre určitosť, ak budeme uvažovať element kvapaliny v tvare kvádra s objemom $V = S \Delta z$, pre ktorý tlak pri dolnej podstave je $p(z)$ a tlak pri jeho hornej podstave je $p(z + \Delta z)$, potom pre rozdiel týchto tlakov nájdeme

$$p(z) - p(z + \Delta z) = \rho g \Delta z \quad (6.35)$$

V prípade stlačiteľnej kvapaliny nebude hustota v celom objeme kvapaliny rovnaká, a preto musíme uvažovať len malý element objemu, $\Delta z \rightarrow 0$, čím



Obr. 72: Ortuťový manometer má pravý koniec zatavený, a preto v jeho vnútri, po ustúpení ortuťe, ostáva prakticky vákuum.

nájdem rovnicu pre výpočet hydrostatického tlaku v kvapaline vo všeobecnosti,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g. \quad (6.36)$$

pričom z je os orientovaná proti smeru pôsobenia gravitačného zrýchlenia.

Príklad:

Uvažujme jednoduchý pokus mydlovej bubliny na rámičku obdĺžnikového tvaru s rozmermi $l \times d$, Aj vo vzduchu okolo nás je nenulový hydrostatický tlak, spôsobený tiažou vzduchu v atmosfére. Jeho priemerná hodnota je $p_a = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Hustota vzduchu s výškou klesá a preto jeho výpočet nie je priamočiary. Merať ho možno napríklad pomocou ortuťového manometra (Obr. 72). Keďže v obrátenom dne zatavenej ortuti sa nenachádza žiaden vzduch, nie je tam látka ktorá by mohla na hladinu ortuti pôsobiť tlakom, t.j. tlak na hladine ortuti v skúmavke je nulový. Výšku $z = 0$ si zvolíme na dne manometra. Tlak v ortuti na dne nájdeme dvoma spôsobmi, no vždy použitím vzťahu (6.35).

1. Uvážením výšky ortuti v pravom ramene skúmavky a nulového tlaku na hladine ortuti v skúmavke, $p(h) = 0$,

$$p(0) = p(h) + \rho_{\text{Hg}}gh = \rho_{\text{Hg}}gh \quad (6.37)$$

2. Uvážení výšky hladiny ortuti v ľavom ramene a atmosférického tlaku na hladine ortuti

$$p(0) = p_a + \rho_{\text{Hg}}gv \quad (6.38)$$

Z rovnosti posledných dvoch tlakov nájdeme

$$p_a + \rho_{\text{Hg}}gv = \rho_{\text{Hg}}gh \rightarrow p_a = \rho_{\text{Hg}}g(h - v) \quad (6.39)$$

Ak dosadíme hustotu ortute, tiažové zrýchlenie, a rozdiel hladín ortuti meraný v takomto experimente, $\Delta h = h - v = 760\text{mm}$, nájdeme výsledok pre atmosférický tlak.

$$p_a = 13,6\text{kg}\cdot\text{m}^3 \cdot 9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 0,76\text{m} = 1,01 \cdot 10^5\text{Pa}. \quad (6.40)$$

Tlak možno merať teda aj priamo v milimetroch ortuťového stĺpca v zmysle takejto úlohy. Ak je rozdiel hladín ortuti 1mm, hovoríme o rozdieli tlakov medzi hladinami 1torr.

Príklad: Odhadneme výšku atmosféry na Zemi za predpokladu, že by hustota vzduchu bola konštantná a rovná $\rho = 1\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Podľa vzťahu pre rozdiel tlakov na Zemi a nad atmosférou (t.j. nad fiktívnou hladinou vzduchu),

$$p_a = \rho gh \rightarrow h = \frac{p_a}{\rho g} \approx \frac{10^5}{1 \cdot 10} = 10\text{km} \quad (6.41)$$

Troposféra, najnižšia časť atmosféry, ktorá obsahuje asi 80% hmotnosti atmosféry má zhruba takúto výšku.

Príklad: Nech v hĺbke $h = 3\text{m}$ sa na vertikálnej stene nachádza horná hrana štvorcového otvoru s dĺžkou hrany $d = 0,1\text{m}$. Ak je otvor privretý príklopom, akou silou naň pôsobí hydrostatický tlak vody v nádrži?

Riešenie: Ak si označíme ako $z = 0$ výšku, kde sa nachádza spodná hrana otvoru, potom tlak sa mení s narastajúcou výškou z podľa vzťahu

$$p(z) = p(0) - z\rho g, \quad p(0) = (h + d)\rho g \quad (6.42)$$

Celkovú silu pôsobiacu na plochu otvoru nájdeme spočítaním príspevkov k tejto sile z rôznej hĺbky,

$$F = \int dSp(z) = \int_0^d dzdp(z) = (h+d)\rho g d^2 - \frac{1}{2}d^3\rho g \quad (6.43)$$

$$= (h+d/2)d^2\rho g = (3+0,05)\cdot 0,1^2\cdot 1000\cdot 9,81\text{N} = 300\text{N}. \quad (6.44)$$

6.4.3 Povrchové napätie

Pri tvare kvapiek kvapalín, v blízkosti rozhrania kvapaliny s nádobou, či v kapilárach, sa prejavuje vplyv interakcií jej molekúl na povrchu s molekulami okolia - plynu nad voľnou hladinou alebo pevnej steny nádoby. Tieto interakcie sa prejavujú zakrivením povrchu rozhrania. Podobné povrchové interakcie sú prítomné aj pri pevných látkach, ale tangenciálne sily objavujúce sa pri ich malých deformáciách (zabezpečujúce stálosť tvaru) sú mnoho rádov väčšie ako povrchové sily a preto sa tieto posledné neprejavajú.

V kvapalinách pôsobia medzi jednotlivými molekulami príťažlivé sily elektromagnetickej povahy (van der Waalsove, dipólové alebo väzby vodíkovým mostíkom). Čím viac sú molekuly týmito väzbami previazané, tým nižšia je energia kvapaliny, pretože tým väčšiu prácu treba konať aby sme ich dostali od seba. Molekuly na povrchu kvapaliny môžu vytvoriť väzby len smerom do objemu, a preto čím väčší je povrch kvapaliny pri nezmenenom celkovom počte molekúl (t.j. objemu), tým väčšia bude energia kvapaliny,

$$E(S,V) = \sigma S + eV, \quad (6.45)$$

kde σ je energia na jednotku povrchu, alebo aj *povrchové napätie* a e je energia na jednotku objemu uvažovanej kvapaliny.

Príklad: Predpokladajme, že energia dvoch molekúl, ktoré sú "pri sebe", je $-\epsilon$, $\epsilon > 0$ a že v objemovom materiály má každá molekula n_V najbližších susedov. Nech kvapalina má N molekúl, z ktorých N_S je na povrchu. Nech nad povrchom je plyn, a interakčnú energiu medzi molekulami kvapaliny a plynu úplne zanedbáme, nakoľko plyn má v rovnakom objeme zhruba 1000 krát menej častíc.

Jeden pár objemových molekúl kvapaliny prispieva k celkovej energii energii $-\epsilon$ a počet párov molekúl so vzdialenosťou l_0 v objeme kvapaliny bude

$$\frac{1}{2}n_V(N - N_S) \quad (6.46)$$

Faktor $\frac{1}{2}$ je tam preto, lebo obyčajné násobenie $n_V(N - N_S)$ započíta každý pár dva krát - raz keď je molekula A jednou z $(N - N_S)$ centrálnych molekúl páru, a molekula B jednou z n_V okolo nej, a druhý krát, keď molekula A je jednou z n_V molekúl okolo centrálnej molekuly B. Celkovo teda molekuly v objeme kvapaliny prispievajú k jej celkovej energii s energiou

$$E_V = -\epsilon \frac{1}{2}n_V(N - N_S). \quad (6.47)$$

Na druhej strane, nech povrchové molekuly majú okolo seba n_S susedných molekúl, potom ich príspevok k celkovej energii bude

$$E_S = -\epsilon \frac{1}{2}n_S N_S \quad (6.48)$$

Celková energia kvapaliny potom bude

$$E = E_V + E_S = -\frac{\epsilon n_V}{2 V_1} V + \frac{\epsilon n_V - n_S}{2 S_1} S \quad (6.49)$$

kde $V_1 = V/N$ je objem na jednu molekulu a $S_1 = N_S/S$ je plocha na jedno molekulu na povrchu.

Pomer týchto príspevkov k energii je

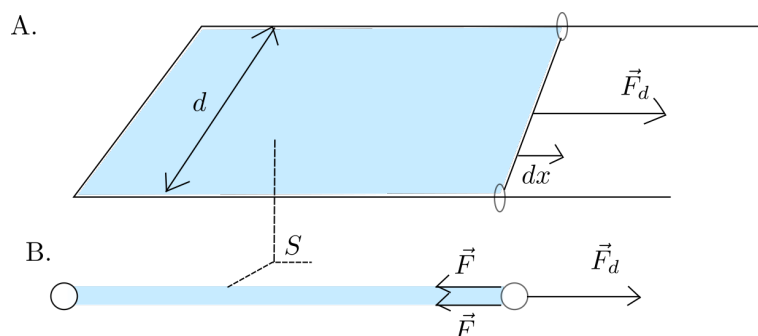
$$\frac{E_S}{E_V} = \frac{n_V - n_S}{n_V} \frac{V_1}{V} \frac{S}{S_1} \quad (6.50)$$

Ak si typickú vzdialenosť dvoch susedných molekúl v kvapaline označíme ako ℓ potom $S_1 \sim \ell^2$ a $V_1 \sim \ell^3$. Pomer počtu najbližších susedov na povrchu k v objeme je asi $n_S \sim \frac{1}{2}n_V$ a teda pre tento pomer nájdeme

$$\frac{E_S}{E_V} \sim \frac{1}{2} \frac{\ell S}{V} \quad (6.51)$$

Vidíme teda, že povrchové napätie možno odhadnúť z molekulárnych parametrov vzťahom,

$$\sigma = \frac{\epsilon n_V - n_S}{2 S_1} \quad (6.52)$$



Obr. 73: A. Ak chceme posúvať hranu mydlovej blany v rámku o dx , musíme pôsobiť silou F , a teda konáme prácu. Mydlová blana predstavuje vrstvičku vody, a teda povrch rozhrania so vzduchom predstavuje aj vrchná aj spodná plocha, t.j. $S = 2dl$ B. Sila F_d , ktorou pôsobíme na pohyblivú hranu predstavuje súčet dvoch síl F pôsobiacich na hranici horného a dolného povrchu mydlovej blany.

Povrchové napätie je vždy závislé od charakteru oboch látok, ktoré sa na povrchu stretávajú. Najčastejšie uvádzané sú pre rozhranie so vzduchom, napr. pre vodu-vzduch je $\sigma = 73\text{mN/m}$, pre ortuť $\sigma = 485\text{N/m}$ ²². Znalosť týchto hodnôt postačuje pre kvantifikáciu kapilárnych javov.

Uvažujme jednoduchý pokus mydlovej bubliny na rámku obdĺžnikového tvaru s rozmermi $l \times d$, ktorého jednu kratšiu stranu (d) možno po dlhších stranách rámika voľne posúvať (Obr. 73). Ak budeme na pohyblivú stranu pôsobiť silou F_d a pri tom ho posunieme o vzdialenosť Δx , vykonáme tým prácu

$$W = F_d \Delta x \quad (6.53)$$

Týmto potiahnutím zväčšíme povrch mydlovej vody tvoriacu bubliny o $2d\Delta x$, t.j. jej energia sa zväčší o

$$\Delta E = \sigma \Delta S = \sigma 2d\Delta x, \quad (6.54)$$

pričom objem mydlovej vody ostal nezmenený a preto e v tejto rovnici nevystupuje. Z porovnania posledných dvoch rovníc nájdeme vyjadrenie pre silu,

²²https://en.wikipedia.org/wiki/Surface-tension_values

ktorou musíme držať posuvnú stranu, aby sa bublina spontánne nestiahla na stav s menšou plochou,

$$F_d = \sigma 2d \rightarrow \sigma = \frac{F_d}{2d} \quad (6.55)$$

Pretože pri ťahaní zväčšujeme hornú aj spodnú plochu, je F_d výsledné silové pôsobenie na kraj hornej aj spodnej plochy, t.j. sila ktorá napína čiarovú hranicu jednej plochy bude $F = F_d/2$. Z posledného nachádzame druhú interpretáciu povrchového napätia ako sily na jednotku dĺžky čiary, ktorej posunom meníme veľkosť povrchu

$$\sigma = \frac{F}{d}. \quad (6.56)$$

Tomuto zodpovedajú aj používané jednotky, $[\sigma] = \text{N.m}^{-1}$.

Ak je povrch kvapaliny zakrivený a kvapalina je v pokoji, potom tlak na konkávnej strane plochy je vyšší o hodnotu

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right), \quad (6.57)$$

kde R a R' sú polomery zakrivenia plochy v danom mieste v dvoch kolmých smeroch. Vzťah (6.57) sa nazýva Laplaceova-Youngova rovnica.

Tento výsledok dokážeme pre špeciálny prípad, keď je plocha zakrivená len v jednom smere, t.j. ako valcová plocha, s polomerom R , ktorá je v druhom smere rovná, Obr. 74. Toto zodpovedá $R' \rightarrow \infty$ vo všeobecnom výsledku (6.57).

Na plôšku zakrivenú s polomerom R , ktorú vytína uhol $d\phi$ a v nezakrivenom smere má dĺžku l , pôsobí zľava sila $\vec{F}(\phi) = l\vec{\sigma}(\phi)$, z prava reakcia na obdobnú silu pôsobiacu na nasledujúcu plôšku, $-l\vec{\sigma}(\phi + d\phi)$. Ich vektorový súčet je orientovaný proti smeru polomeru R , a jeho veľkosť je

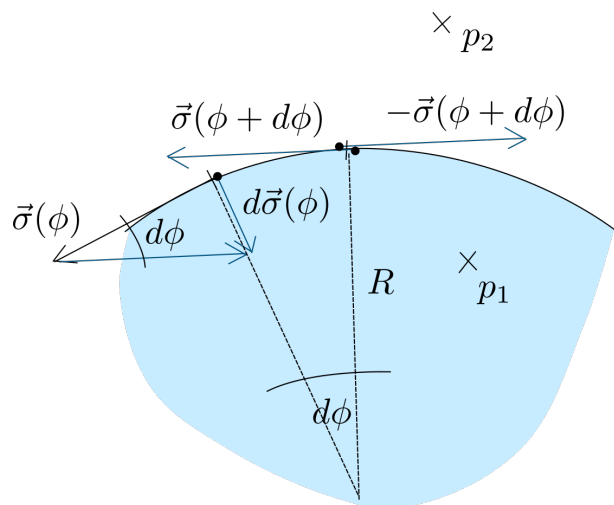
$$|ld\vec{\sigma}(\phi)| = l\sigma d\phi, \quad (6.58)$$

ako vidno z podobnosti trojuholníkov na Obr. 74.

Mechanická rovnováha vyžaduje, aby súčet všetkých síl pôsobiacich na uvažovanú plôšku $dS = lRd\phi$ v jej normálovom smere bol nulový, t.j.

$$p_1 dS - p_2 dS - l\sigma d\phi = 0 \rightarrow \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\sigma}{R} \quad (6.59)$$

Ak by sme uvažovali zakrivenie aj v druhom kolmom smere, pridal by sa analogický príspevok k rozdielu tlakov kvôli zakriveniu aj v tomto smere s



Obr. 74: Pri zakrivenom povrchu pôsobí na jednotkovú plochu (plôšku s $Rd\phi \times l$, kde l je dĺžka plochy v smere kolmom na rovinu papiera) v dôsledku konštantného povrchového napätia sila orientovaná smerom na konvexnú stranu, $d\vec{\sigma}$. Aby bol povrch v mechanickej rovnováhe, musí byť tlak p_1 o presne túto hodnotu vyšší.

polomerom R' , čo dá Laplace-Youngov vzťah (6.57). Tlak kvapaliny v kvapkách je teda vyšší ako je tlak okolitého vzduchu. Tento výsledok využijeme aj pri výpočte kapilárnej elevácie či depresie neskôr.

V prípade že by bol povrch konvexný zo strany kvapaliny, bude stred myšlenej kružnice s polomerom R na druhej strane, mimo kvapaliny, výslednica síl pôsobiaca na element povrchu bude mať obrátený smer a rozdiel tlakov zmení znamienko. V tomto zmysle, polomer krivosti pre konvexný povrch (zo strany kvapaliny) sa berie so záporným znamienkom, $R < 0$, a Laplaceov-Youngov vzťah má identický tvar rovnice (6.57).

6.4.4 Kapilárny tlak

V časti o povrchovom napätí sme uviedli, že pod zakriveným povrchom kvapaliny vzniká dodatočný príspevok ku tlaku v dôsledku povrchového napätia, ktorý je daný Laplace-Youngovou rovnicou

$$\Delta p = \sigma_{lg} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right). \quad (6.60)$$

pričom σ_{lg} zodpovedá povrchovému napätiu rozhrania kvapalina-plyn. V tenkých kapilárach kruhového prierezu bude polomer krivosti v oboch kolmých

smeroch rovnaký, a preto dostaneme jednoduchší vzťah

$$\Delta p = \sigma \frac{2}{R}. \quad (6.61)$$

Fakt, že kvapalina vystúpi alebo poklesne v kapiláre oproti hodnote danej hydrostatickým tlakom súvisí s rozdielom povrchovej energie rozhrania kvapalina-stena kapiláry (σ_{sl}) a vzduch-stena kapiláry (σ_{sg}). Ak je prvá výrazne nižšia, kvapalina bude zmáčať steny čo najviac a v kapiláre uvidíme zdvihnutie hladiny, hovoríme o kapilárnej elevácii, ako to možno pozorovať pri vode v sklenenej kapiláre. Naopak, ak je povrchová energia rozhrania kvapalina-stena kapiláry vyššia, postúpi hladina kvapaliny v kapiláre pod úroveň danej hydrostatickým tlakom, kvapalina steny nezmáča, hovoríme o kapilárnej depresii, ako je to v prípade ortuti v sklenenej kapiláre.

Ak sa hladina v kapiláre zvýši z z na $z + dz$, zmení sa energia systému o

$$dE = 2\pi r dz (\sigma_{sl} - \sigma_{sg}) + z dz \rho g \pi r^2 \quad (6.62)$$

kde prvý príspevok predstavuje zmenu energie kvôli zmene veľkosti rozhraní a druhý prácu potrebnú vykonať na zvýšenie potenciálnej energie kvapaliny v homogénnom gravitačnom poli. Ak $z = 0$ na hladine vo vaničke mimo kapiláry, a $\sigma_{sg} > \sigma_{sl}$, t.j. kvapalina zmáča povrch, potom pri zdvihnutí z $z = 0$ o $dz > 0$ energia poklesne a preto sa reálne bude hladina v kapiláre zdvíhať. Zdvíhanie hladiny zastane, keď pri určitom $z = h$ (Obr. 75) s ďalším nárastom dz už energia prestane klesať, t.j. $dE = 0$ pre $dz \neq 0$, t.j.

$$0 = 2\pi r (\sigma_{sl} - \sigma_{sg}) + h \rho g \pi r^2 \quad (6.63)$$

$$\rightarrow h \rho g = \frac{2(\sigma_{sg} - \sigma_{sl})}{r} \quad (6.64)$$

Nakoľko $h \rho g$ predstavuje nárast hydrostatického tlaku pri výške stĺpca kvapaliny h , musí sa tento kompenzovať pokles tlaku v dôsledku zakrivenia hladiny, daného Laplaceovým-Youngovým vzťahom (6.57), t.j.

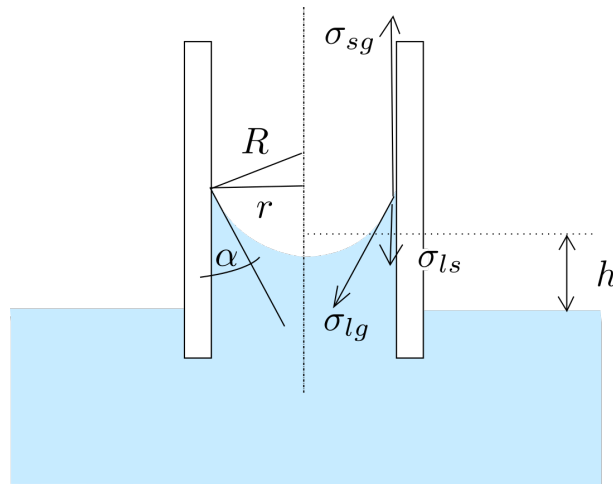
$$\sigma_{lg} \frac{2}{R} + \frac{2(\sigma_{sg} - \sigma_{sl})}{r} = 0 \quad (6.65)$$

Ak si uhol medzi povrchom kvapaliny pri stene a stenou označíme ako α , potom pre medzi polomerom krivosti a polomerom kapiláry platí

$$\cos(\alpha) = \frac{r}{|R|} \quad (6.66)$$

potom nájdeme z poslednej rovnice

$$\sigma_{lg} \cos(\alpha) = \sigma_{sg} - \sigma_{sl} \quad (6.67)$$



Obr. 75: Aby bola kvapalina v mechanickej rovnováhe, musí byť príspevok k hydrostatickému tlaku, $h\rho g$ sprevádzaný záporným kapilárnym tlakom spôsobeným zakrivením povrchu s polomerom zakrivenia R . Hoci príčinou kapilárnej elevácie/depresie je rozdiel medzi povrchovým napätím rozhrania kvapalina-stena (σ_{ls}) a plyn-stena (σ_{sg}), pretože tieto napätia (v zmysle sily na jednotku dĺžky rozhrania) musia byť v rovnováhe s vertikálnou zložkou povrchového napätia kvapalina-plyn σ_{lg} , možno v konečnom dôsledku vyjadriť kapilárny tlak len pomocou σ_{lg} .

Uhol α sa nazýva aj kontaktný uhol, a podobne ako povrchové napätie je experimentálne meranou charakteristikou. Z poslednej rovnice vidíme, že kontaktný uhol závisí od povrchových napätí všetkých troch látok stretávajúcich sa v úlohe - kvapaliny, plynu a pevnej látky steny kapiláry.

Kombináciou vzťahu (6.64) a (6.67) nájdeme výsledný vzťah pre výšku vystúpenia v dôsledku kapilarity,

$$\Delta h = \frac{2\sigma_{lg} \cos(\alpha)}{\rho g r} \quad (6.68)$$

Príklad: Kontaktný uhol pre vodu-sklo-vzduch je $\alpha \approx 0$, povrchové napätie $\sigma_{lg} = 73\text{mN/m}$. Ak používame sklenenú trubičku s polomerom $r = 2,5\text{mm}$, vplyvom kapilarity v nej vystúpi hladina o

$$h = \frac{2.73 \cdot 10^{-3}}{10^3 \cdot 10 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}} \approx 5,84\text{mm} \quad (6.69)$$

Naopak, pre ortuť-sklo-vzduch je $\alpha \approx 140^\circ$, $\sigma_{lg} \approx 500\text{mN/m}$, teda v tej istej trubičke bude

$$h = \frac{2.500 \cdot 10^{-3} \cos(140^\circ)}{13,6 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}} \approx -2,3\text{mm}. \quad (6.70)$$

Zhruba o takého hodnoty je potrebné upraviť odčítavanie výšky v manometroch.

6.4.5 Vztlaková sila

Na teleso ponorené do kvapaliny pôsobí okrem tiažovej sily, spôsobenej jeho hmotnosťou, aj sila vztlaková, spôsobená rozdielnym tlakom kvapaliny pôsobiacim na teleso na rôznych častiach jeho povrchu. Pretože vo väčšej hĺbke je tlak väčší, výslednica vztlakovej sily pôsobí smerom nahor, a kompenzuje aspoň časť tiažovej sily - teleso je nadľahčované.

Uvažujme ľubovoľné teleso s hmotnosťou m a polohovým vektorom jeho ťažiska \vec{r}^* čiastočne ponorené v kvapaline. Tlak v kvapaline závisí od vzdialenosti od vodnej hladiny podľa vzťahu

$$p(z) = \rho_l g z, \quad (6.71)$$

kde ρ_l je hustota kvapaliny, g tiažové zrýchlenie a z kolmá vzdialenosť miesta kde počítame tlak od hladiny. Sila pôsobiaca na element $d\vec{S}$ povrchu telesa bude $d\vec{F} = -pd\vec{S}$ a teda celková vztlaková sila bude

$$\vec{F}_{vz} = - \int_S p(z) d\vec{S}, \quad (6.72)$$

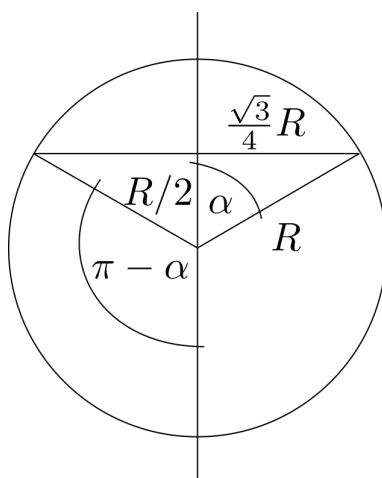
kde integrujeme cez celý *ponorený* povrch telesa. Výsledok integrálu možno získať nasledovnou úvahou: Ak by sme teleso nahradili kvapalinou, siahajúcou len po výšku hladiny, bola by táto kvapalina v pokoji, a teda celkový súčet síl a aj momentov síl na ňu by bol nulový.

Na túto kvapalinu pôsobí tiažová sila

$$\vec{F}_{g,l} = V_l \rho_l \vec{g} \quad (6.73)$$

a vztlaková sila rovnaká ako na pôvodne uvažované teleso (6.72), takže podmienka rovnováhy dá

$$\vec{F}_{vz} + \vec{F}_{g,l} = 0 \rightarrow \vec{F}_{vz} = -V_l \rho_l \vec{g}. \quad (6.74)$$



Obr. 76: Ponorenú plochu kmeňa získame ako súčet plochy dvoch kruhových výsekov s uhlom $\pi - \alpha$ a plochy dvoch trojuholníkov.

V súvislosti s telesom sa objem V_l nazýva aj objemom vytlačenej kvapaliny. Posledný vzťah predstavuje praktický výpočet vztlakovej sily pôsobiacej na ponorené teleso.

Príklad:

Guľatina (priamy kmeň stromu s kruhovým priemerom) pláva po hladine tak, že je do $4/3$ svojho priemeru ponorená pod vodnou hladinou. Ak hustota suchého dreva je $\rho_0 = 450 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (smrek²³), koľko percent jeho hmotnosti tvorí nasiaknutá voda?

Riešenie: Najprv z ponoru nájdeme hustotu nasiaknutého dreva. Ak prierez stromu je $S = \pi R^2$, potom prierez ponorenej plochy nájdeme z geometrie (Obr. 76),

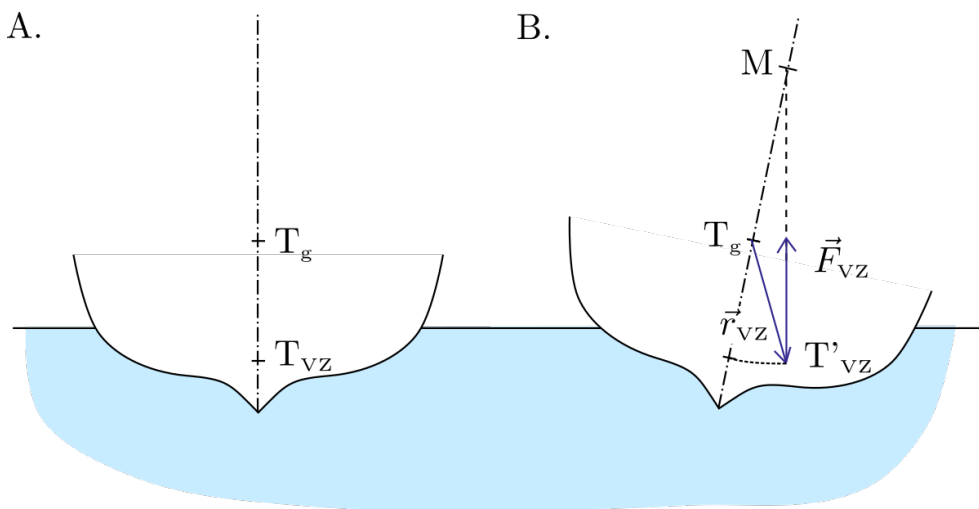
$$\alpha = \arccos(1/2) = \pi/3 \quad (6.75)$$

$$S_V = 2 \left(\frac{(2/3)\pi}{2\pi} \pi R^2 + \frac{\sqrt{3}}{8} R^2 \right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2. \quad (6.76)$$

Pri plávaní sú tiažová a vztlaková sila vyrovnané, preto

$$\rho_V S_V l = \rho S l \rightarrow \rho = \rho_V \frac{S_V}{S} = \rho_V \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) = \nu \rho_V, \quad \nu \approx 0,8 \quad (6.77)$$

²³http://www.engineeringtoolbox.com/wood-density-d_40.html



Obr. 77: A. Loď pri rovnovážnej polohe má ťažisko vytlačenej kvapaliny, T_{vz} , aj ťažisko lode, T_{vz} na svojej osi symetrie. B. Pri vychýlení je dôležité, aby moment vztlakovej sily vzhľadom na ťažisko, $\vec{D}_{vz} = \vec{r}_{vz}^* \times \vec{F}_{vz}$, otáčal loď späť do rovnovážnej polohy.

Nakoniec, percento vlhkosti dreva určíme z pomeru nárastu hmotnosti mokrého dreva voči suchému ku hmotnosti dreva,

$$p = \frac{m - m_0}{m} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = 1 - \frac{\rho_0}{\nu \rho_V} = 44\%. \quad (6.78)$$

Okrem súčtu síl, je podmienkou rovnováhy aj nulovosť celkového momentu síl. Moment vztlakovej sily vzhľadom na ťažisko ponoreného telesa je daný vzťahom

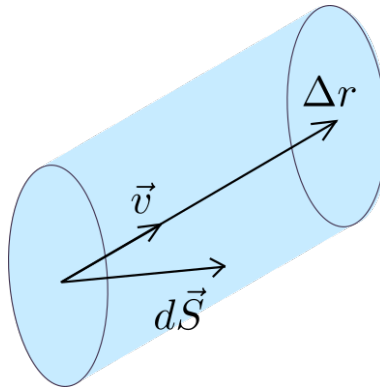
$$\vec{D} = - \int_S p(\vec{r}) \vec{r} \times d\vec{S} = - \int_S p(\vec{r}) (\vec{r}_{V_i}^* + \vec{r}') \times d\vec{S} \quad (6.79)$$

$$= \vec{r}_{vz}^* \times \vec{F}_{vz} \quad (6.80)$$

kde \vec{r} je polohový vektor plošného elementu $d\vec{S}$ vzhľadom na ťažisko telesa, \vec{r}_{vz}^* je ťažisko vytlačenej kvapaliny vzhľadom na ťažisko telesa, a \vec{r}' sú teda polohové vektory elementov $d\vec{S}$ vzhľadom na ťažisko vytlačenej kvapaliny. Nakoniec sme uvážili, že moment vztlakovej sily pôsobiacej na vytlačенú kvapalinu vzhľadom na jej ťažisko je nulový. V rovnovážnej polohe plávajúceho telesa, napr. lode, je aj moment vztlakovej sily, nakoľko $\vec{r}_{vz}^* \parallel \vec{g}$ (Obr. 77

A.). Akonáhle sa ale loď vplyvom sily vetra alebo vln trochu nakloní, zmení sa poloha ťažiska vytlačenej kvapaliny, a pre stabilitu je nevyhnutné, aby moment vztlakovej sily pôsobil proti tejto výchylke. Toto sa pri konštrukcii lodí zabezpečí tým, že tzv. metacentrum, označené bodom M na obr. 77B., sa musí nachádzať nad ťažiskom lode, označenom bodom T_g . Metacentrum je pritom bod, smerom do ktorého je orientovaná vztlaková sila pri vychýlení lode.

Príklad: Guľatina by teoreticky mohla plávať aj vo vertikálnej orientácii, no toto by bolo nestabilné. Akokoľvek malé vychýlenie by spôsobilo moment vztlakových síl, ktoré by kmeň pretočili do horizontálnej polohy.



Obr. 78: Ak kvapalina prechádzajúca ploškou $d\vec{S}$ má rýchlosť \vec{v} , potom za čas Δt sa všetka kvapalina v tejto ploche posunie o $\Delta\vec{r}$. Objem kvapaliny ktorý za tento čas prešiel ploškou $d\vec{S}$ bude teda objem zvýrazneného nakloneného valca, $\Delta dV = d\vec{S} \cdot \Delta\vec{r}$.

6.5 Ustálené prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny

6.5.1 Rýchlostné pole, tok

Pre prúdiacu kvapalinu zavádzame *rýchlostné pole* $\vec{v}(\vec{r})$, ktoré udáva rýchlosť malého elementu kvapaliny nachádzajúceho sa aktuálne na mieste \vec{r} . Pokiaľ je rýchlostné pole v čase nemenné, hovoríme o ustálenom prúdení. Neznamená to, že rýchlosť elementov kvapaliny sa nemení, pretože tieto sa presúvajú a v rôznom mieste priestoru môže mať rýchlostné pole rôznu rýchlosť, a teda elementy kvapaliny sú urýchľované alebo spomaľované, podľa charakteru prúdenia.

Myslená krivka, pozdĺž ktorej sa pohybuje hmotný element kvapaliny sa nazýva *prúdnicu*. Prúdnicu možno experimentálne zviditeľniť, ak sa do prúdiacej kvapaliny v jednom mieste kontinuálne pridáva farbivo. Ak je rýchlosť kvapaliny väčšia ako vplyv difúzie farbiva, je farbivo unášané hmotným elementom kvapaliny, čo vizualizuje prúdnicu prechádzajúcu miestom, kde sa vnáša farbivo.

Ak poznáme rýchlostné pole, dokážeme spočítať koľko kvapaliny preteká miestami, ktoré nás zaujímajú. Podľa toho, či nás zaujíma množstvo hmotnosti alebo množstvo objemu, používame pojem objemového alebo hmotnostného toku.

Objemový tok J_V predstavuje objem kvapaliny, ktorá pretečie vybranou plochou S za jednotku času. Jej rozmer teda bude

$$[J_V] = \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}. \quad (6.81)$$

Uvažujme malý plošný element $d\vec{S}$ z plochy S , nachádzajúci sa na mieste \vec{r} (Obr. 78). Rýchlosť kvapaliny v tomto mieste je $\vec{v}(\vec{r})$. Za krátky okamžik času Δt sa všetka kvapalina nachádzajúca sa na ploche $d\vec{S}$ posunie o $\Delta\vec{r} = \vec{v}(\vec{r})\Delta t$, a teda plôškou prejde objem kvapaliny ²⁴

$$\Delta dV = d\vec{S} \cdot \Delta\vec{r} = d\vec{S} \cdot \vec{v}(\vec{r})\Delta t. \quad (6.82)$$

Za jednotku času prejde plôškou $d\vec{S}$

$$\frac{\Delta dV}{\Delta t} = d\vec{S} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \quad (6.83)$$

objemu kvapaliny, a teda celou plochou

$$J_V = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{v}(\vec{r}). \quad (6.84)$$

Pomocou toku kvapaliny sa zavádza aj *priemerná rýchlosť* kvapaliny prechádzajúcej prierezom S ,

$$v_{av} = \frac{1}{S} J_V = \frac{1}{S} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \quad (6.85)$$

Príklad: Ak z kohútika, s vnútorným priemerom $d = 1\text{cm}$, a teda vnútorným prierezom $S = \pi(0,5)^2 = 0,79\text{cm}^2$, napustíme vedro s objemom $V = 5\text{l}$ za $\Delta t = 60\text{s}$, potom priemerná rýchlosť kvapaliny v potrubí bude

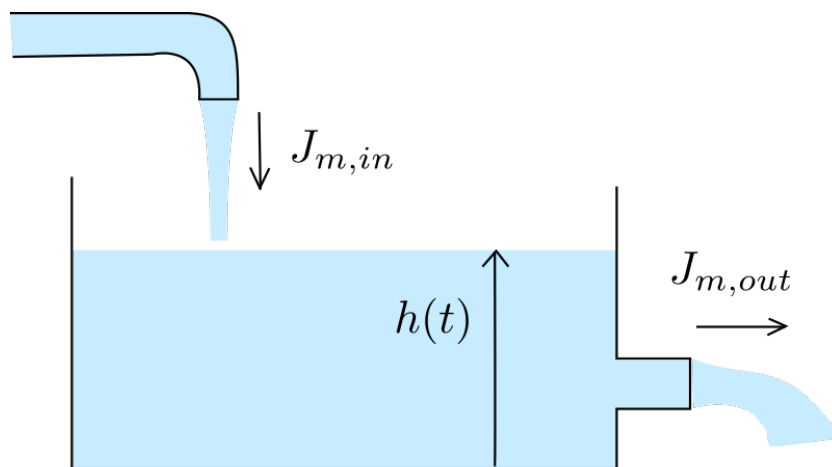
$$J_V = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = S v_{av} \rightarrow v_{av} = \frac{J_V}{S} = \frac{V/\Delta t}{\pi(d/2)^2} \approx 1\text{m.s}^{-1} \quad (6.86)$$

Hmotnostný tok J_m predstavuje hmotnosť kvapaliny, ktorá pretečie vybranou plochou S za jednotku času. Jej rozmer je

$$[J_m] = \text{kg.s}^{-1}. \quad (6.87)$$

Pre nájdenie vzťahu medzi hmotnostným tokom a rýchlostným poľom postupujeme takmer identicky ako v prípade objemového toku, len objem, ktorý

²⁴Pri vyjadrení tohto objemu máme dve malé veličiny - plôšku $d\vec{S}$ a časový interval Δt . Preto výsledný objem bude v tomto zmysle mať dva symboly malého príspevku, d aj Δ . V odbornej literatúre sa používa zápis d^2V .



Obr. 79: Typický problém bilancie množstva látky obsahuje prítok, výtok a zásobník.

pretečie ploškou $d\vec{S}$ za krátky čas dt , je potrebné prenásobiť hustotou v mieste \vec{r} , čím nájdeme

$$J_m = \int d\vec{S} \cdot \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}). \quad (6.88)$$

Veličina

$$\vec{j}_m(r) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \quad (6.89)$$

sa zvykne nazývať *hustota hmotnostného toku*, nakoľko predstavuje hmotnosť kvapaliny prechádzajúca jednotkovou plochou za jednotku času.

6.5.2 Rovnica kontinuity, bilančné rovnice hmotnosti

Pri prúde kvapaliny sa zachováva jej hmotnosť. Ak z jednej oblasti priestoru istá hmotnosť odtečie, musí pritecť do inej oblasti.

Uvažujme úlohu pri ktorej do zásobníka priteká kvapalina prítokom s prierezom S_{in} s priemernou rýchlosťou v tomto priereze v_{in} a zároveň z neho vyteká kvapalina otvorom s prierezom S_{out} s priemernou rýchlosťou v_{out} (79). Ak hustota kvapaliny je ρ , potom do zásobníka za jednotku času pritečie

$$J_{m,in} = S_{in}v_{in}\rho \quad (6.90)$$

kilogramov kvapaliny, a vytečie

$$J_{m,out} = S_{out}v_{out}\rho \quad (6.91)$$

kilogramov kvapaliny. *Bilancia* týchto množstiev hovorí, že v rezervoári sa musí za jednotku času nahromadiť hmotnosť kvapaliny rovnej rozdielu týchto dvoch tokov,

$$\frac{dm}{dt} = J_{m,in} - J_{m,out}. \quad (6.92)$$

V prípade nestlačiteľnej kvapaliny je jej hustota všade rovnaká, objem hmotnosť kvapaliny v zásobníku možno vyjadriť pomocou jej objemu, hmotnostné toky pomocou objemových a vydelením s hustotou nájdeme bilanciú objemu kvapaliny,

$$\frac{dV}{dt} = J_{V,in} - J_{V,out}. \quad (6.93)$$

Nakoniec, v prípade ustáleného prúdenia sa objem či hmotnosť v zásobníku nebude meniť, a výsledná rovnosť toku do a von zo zásobníka vedie na vzťah

$$J_{V,in} = J_{V,out} \rightarrow S_{in}v_{in} = S_{out}v_{out} \quad (6.94)$$

Posledný vzťah medzi priemernými rýchlosťami sa niekedy nazýva aj rovnica kontinuity pre nestlačiteľné ustálené prúdenie a umožňuje vyjadriť priemernú rýchlosť v potrubí s rôznym prierezom.

6.5.3 Bernoulliho rovnica

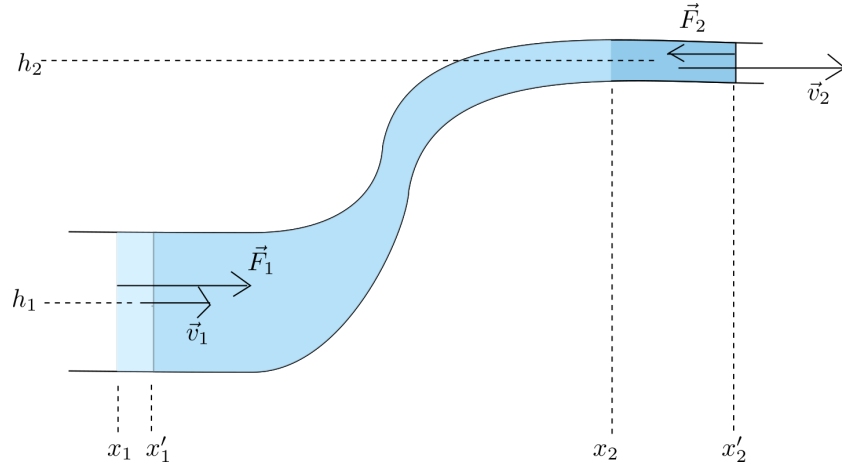
V prípade ustáleného prúdenia možno podobne ako pri hmotnosti, uvažovať aj o bilancií mechanickej energii prúdiacej kvapaliny. Predstavme si segment potrubia, v ktorom si myslene vydelíme dané množstvo kvapaliny, nachádzajúce sa na začiatku medzi súradnicami x_1 a x_2 (Obr. 80).

Z mechaniky vo všeobecnosti vieme že platí,

$$W = \Delta E_m - W_{tr}, \quad (6.95)$$

kde W je práca konaná vonkajšími silami, ΔE_m zmena mechanickej energie a W_{tr} práca konaná trecími silami. Trecie sily v tejto kapitole zanedbáme, budeme ich považovať za nulové. K ich uváženiu sa vrátíme po zavedení viskozity v nasledujúcej kapitole.

Pre vyčíslenie zmeny mechanickej energie je potrebné si uvedomiť, že popisujeme ustálené prúdenie, a preto rýchlosť kvapaliny v pevnom mieste je v každom čase rovnaká, aj keď samotná kvapalina sa presúva. Pri posunutí vybraného množstva kvapaliny z pozície medzi x_1 a x_2 na pozíciu medzi



Obr. 80: Myslene vydelené množstvo kvapaliny nachádzajúce sa medzi x_1 a x_2 je silovým pôsobením okolitej kvapaliny (sily F_1 a F_2) posunuté pozdĺž zužujúceho sa a stúpajúceho potrubia. Práca konaná silami sa rovná zmene mechanickej energie uvažovanej kvapaliny.

x'_1 a x'_2 , za čas Δt , kinetická energia narastie o hodnotu kinetickej energie kvapaliny medzi x_2 a x'_2 ,

$$\frac{1}{2}\rho_2 S_2(x'_2 - x_2)v_2^2, \quad (6.96)$$

a poklesne o hodnotu kinetickej energie kvapaliny medzi x_1 a x'_1 ,

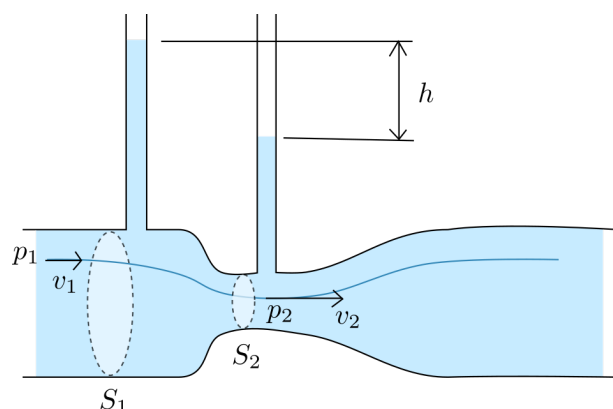
$$\frac{1}{2}\rho_1 S_1(x'_1 - x_1)v_1^2, \quad (6.97)$$

kde S_1 a S_2 sú prierezy potrubia v miestach "1" a "2". Keďže celková hmotnosť vydelenej kvapaliny sa v čase nemení, vydelená časť sa hýbe s prúdiacou kvapalinou, potom výraz $\rho_2 S_2(x'_2 - x_2)$ musí dať tú istú hmotnosť ako $\rho_1 S_1(x'_1 - x_1)$, a pre naše účely si ho označíme ako Δm . Podobne kinetickej energii, potenciálna energia získa príspevok Δmgh_2 a stratí príspevok Δmgh_1 , takže celková zmena mechanickej energie bude

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \Delta mgh_2 - \left(\frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta mgh_1 \right) \quad (6.98)$$

Na vydelenú časť kvapaliny pôsobia vonkajšie sily - na jej hranici "1" je to tlak kvapaliny pre ňou, p_1 , a na jej hranici "2" je to tlak kvapaliny za ňou, p_2 . Tieto dve vonkajšie sily konajú pri posune prácu

$$W = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 = p_1 S_1(x'_1 - x_1) - p_2 S_2(x'_2 - x_2). \quad (6.99)$$



Obr. 81: Pomocou Venturiho trubice dokážeme vypočítať celkový prietok potrubím z rozdielu výšok hladiny v bočných meracích trubičkách. Bernoulliho rovnicu použijeme pre veličiny pozdĺž prúdnic vyznačenej modrou krivkou. O prúdení predpokladáme, že žiadna z prúdnic nesmeruje do bočných trubíc.

Dosadením rovnice (6.98) a (6.99) do základnej energetickej bilancie (6.95) a nájdeme,

$$\left(p_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 \right) S_1 v_1 \Delta t - \left(p_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \rho_2 g h_2 \right) S_2 v_2 \Delta t = 0 \quad (6.100)$$

kde sme uvážili, že $x'_1 - x_1 = v_1 \Delta t$ a podobne $x'_2 - x_2 = v_2 \Delta t$. Ak budeme uvažovať *nestlačiteľnú* kvapalinu ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), bude podľa rovnice kontinuity $S_1 v_1 = S_2 v_2$, a vykrátením tohto faktora nájdeme najznámejší tvar Bernoulliho rovnice,

$$\left(p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 \right) - \left(p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \right) = 0, \quad (6.101)$$

platný ale len pre *nestlačiteľné* kvapaliny. Interpretácia tohto tvaru Bernoulliho rovnice je, že súčet tlaku, kinetickej energie na jednotku objemu a potenciálnej energie na jednotku objemu je pozdĺž prúdnic nemenný.

Príklad: Venturiho trubica sa používa na meranie veľkosti toku J_V . Porovnaním energie kvapaliny na jednotku objemu v normálnej a zúženej časti nájdeme

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (6.102)$$

Rýchlosti sú previazané rovnicou kontinuity,

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (6.103)$$

V bočných trubiciach musí byť v mieste ich pripojenia k potrubiu tlak rovnaký, a na hladine zase tlak atmosférický (inak by tieto rozhrania neboli v pokoji, ale posúvali by sa vplyvom nenulovej výslednej sily). preto

$$p_1 = p_A + h_1 \rho g \text{ a } p_2 = p_A + h_2 \rho g \quad (6.104)$$

a teda

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2) = \rho g h \quad (6.105)$$

Dosadením (6.105) a (6.103) do (6.102) nájdeme rýchlosť v potrubí,

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{(S_1/S_2)^2 - 1}} \sqrt{2gh} \quad (6.106)$$

a teda objemový tok v potrubí bude

$$J_V = S_1 v_1 = \frac{1}{\sqrt{1/S_2^2 - 1/S_1^2}} \sqrt{2gh} \quad (6.107)$$

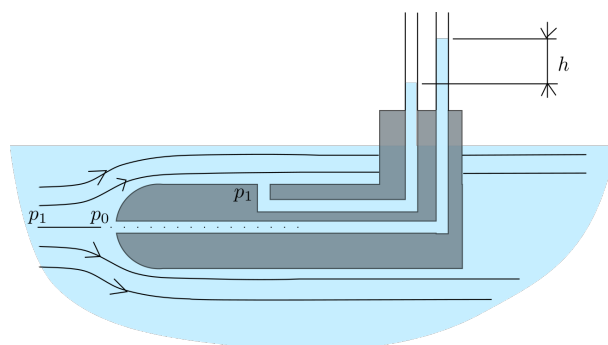
Ak pre potrubie s vodou, s $r_1 = 2,5\text{cm}$ a $r_2 = 2\text{cm}$, t.j. $S_1 = \pi 2,5^2 = 20\text{cm}^2$, $S_2 = 13\text{cm}^2$ bude namerané $h = 1\text{cm}$, potom $v_1 = 0,38\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ a celkový tok $J_V = v_1 S_1 = 0,75\text{l}\cdot\text{s}^{-1}$.

V praxi je tento vzťah násobený experimentálnym koeficientom $C \sim 1$, ktorý koriguje nájdený výsledok na konečnú viskozitu a rýchlostný profil prúdenia.

Príklad: Pitotova trubica (Obr. 82) sa používa na meranie rýchlosti prúdenia kvapaliny alebo plynu, napr. rýchlosť vzduchu okolo lietadla (a teda vlastne rýchlosť lietadla vzhľadom na vzduch). Použitie Bernoulliho rovnice pre prúdnicu vedúcu priamo na čelo Pitotovej trubice dá

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 \rightarrow v = \sqrt{2h/g}. \quad (6.108)$$

Podobne ako pri Venturiho trubici, v dôsledku viskozity, je tento výsledok pre praktické merania korigovaný číselným koeficientom, $v = C \sqrt{2h/g}$, $C \sim 1$.



Obr. 82: Rýchlosť na prúdnici priamo oproti čelu Pitotovej trubice postupne klesá až celkom pred trubicou zastane, tzv. stagnačný bod. Tlak v tomto mieste p_0 je vyšší ako tlak inde v kvapaline, p_1 , pričom z ich rozdielu možno nájsť rýchlosť prúdenia kvapaliny.

Príklad: V hĺbke $h = 0,5\text{m}$ pod hladinou vody v zásobníku je stred výtokového otvoru v tvare kruhu s priemerom $d = 5\text{cm}$. Podstava zásobníka má tvar štvorca so stranou $l = 1\text{m}$. Aký je prítok vody J_V , ak sa výška hladiny nemení? Predpokladajte, že výtoková rýchlosť je v celom priereze otvoru je rovnaká, t.j. že $d \ll h$.

Riešenie:

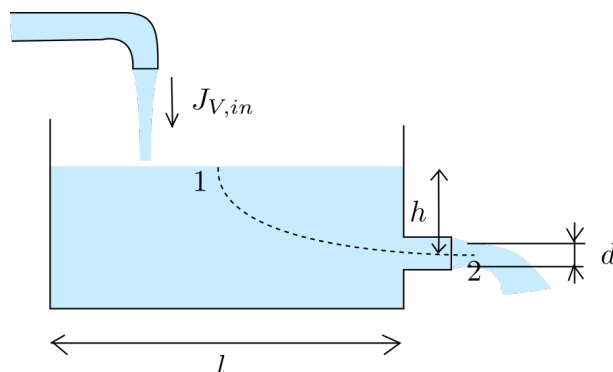
Predpokladáme, že tvar jednej z prúdnic, pozdĺž ktorej bude prúdiť voda má tvar vyznačený čiarkovanou čiarou na obr. 83. Pozdĺž tejto prúdnice je nemenná hodnota súčtu daného Bernoulliho rovnicou (6.101). Vyhodnotíme ho v dvoch miestach, o ktorých niečo dokážeme zo zadania zistiť - v blízkosti hladiny (1) a v prúde vytekajúcej vody (2):

$$1: p_A + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + h\rho g \quad (6.109)$$

$$2: p_A + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \quad (6.110)$$

kde p_A je atmosférický tlak, v_1 rýchlosť hladiny a v_2 rýchlosť vody vo výtoku. Hustotu považujeme za rovnakú všade nakoľko voda je veľmi málo stlačiteľná. Ak dáme tieto dve vyjadrenia do rovnosti, dostaneme jednu rovnicu s dvoma neznámymi - v_1 a v_2 .

Keďže výška hladiny je ustálená, voda sa v zásobníku nehromadí, a preto



Obr. 83: Pri používaní Bernoulliho rovnice na riešenie prúdenia si vyznačíme predpokladanú prúdnicu - čiarkovaná čiara - a na nej si vyberieme miesta, v ktorých pre potreby príkladu má význam vyčíslieť energiu kvapaliny na jednotku objemu.

môžeme použiť rovnicu kontinuity v tvare

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (6.111)$$

čo nám pomôže zbaviť sa jednej neznámej rýchlosti. Plochy vypočítame zo zadanej geometrie,

$$S_1 = l^2, \quad S_2 = \pi d^2/4 \quad (6.112)$$

Dosadením týchto plôch do rovnice kontinuity, a tej do Bernoulliho rovnice nájdeme

$$\frac{1}{2}\rho \left(\frac{\pi d^2}{4l^2} v_2 \right)^2 + h\rho g = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (6.113)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2hg}{1 - \frac{\pi^2 d^4}{16l^4}}} \quad (6.114)$$

$$= 3,13 \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \quad (6.115)$$

Aby bola hladina ustálená, musí byť prítok rovnako veľký ako výtok, preto

$$J_V = S_2 v_2 = \pi \frac{d^2}{4} \sqrt{\frac{2hg}{1 - \frac{\pi^2 d^4}{16l^4}}} = 0,006 \text{m}^3/\text{s} = 6 \text{l/s}. \quad (6.116)$$

V tomto prípade, je plocha výtoku oveľa menšia ako plocha hladiny, $l \ll d$ a preto možno člen

$$\frac{\pi^2 d^4}{16l^4} = 6 \cdot 10^{-5} \quad (6.117)$$

voči jednotke zanedbať. Pre výtokovú rýchlosť potom dostávame Toricceliho vzťah

$$v_2 = \sqrt{2gh}. \quad (6.118)$$

Ako vidno na obrázku, prúd vody sa zvyčajne po opustení výtokovej trubky mierne zúži. Pri riešení podobných úloh sa preto zvyčajne udáva redukovaný prierez, ktorý je (aj o polovicu) menší ako fyzický prierez otvoru.

6.5.4 Bernoulliho rovnica pre stlačiteľnú kvapalinu

Rozšírenie na stlačiteľnú kvapalinu je na prvý pohľad veľmi jednoduché - ak uvažíme, že celková hmotnosť vybranej kvapaliny sa nesmie meniť,

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2, \quad (6.119)$$

potom vykrátením s týmto faktorom nájdeme,

$$\left(\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}v_1^2 + gh_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}v_2^2 + gh_2 \right) = 0. \quad (6.120)$$

Pri zmene hustoty kvapaliny, a zvlášť plynov, dochádza ale k procesom na mikroskopickej úrovni, ktoré sa prejavujú zmenou *vnútornej energie* látky. V rámci termodynamiky sa oboznamujeme s 1. zákonom termodynamickým, ktorý hovorí, že zmena vnútornej energie ΔU je daná mechanickou prácou *konanou na telese* W a teplom ΔQ , *prijatým telesom od okolia*,

$$\Delta U = W + \Delta Q, \quad (6.121)$$

alebo

$$W = \Delta U - \Delta Q. \quad (6.122)$$

Teleso ako celok nie je pri bežných termodynamických úvahách v pohybe, nemení svoje ťažisko a preto jeho translačná a rotačná kinetická energia je nulová a potenciálna energia nemenná.

Tento zákon možno spojiť s rovnicou pre mechanickú prácu (6.95),

$$W = \Delta E_m - W_{tr}, \quad (6.123)$$

ktorá uvažuje len mechanické deje súvisiace so zmenou ťažiska či otáčania, do spoločnej rovnice,

$$W = \Delta E_m + \Delta U - \Delta Q. \quad (6.124)$$

kde si označíme ako zmenu *celkovej energie* veličinu

$$\Delta E = \Delta E_m + \Delta U. \quad (6.125)$$

V prípade, že sa mechanická energia nemení, $\Delta E_m = 0$, dáva všeobecná rovnica (6.124) prvý zákon termodynamický. Na druhej strane, ak budeme uvažovať situáciu danú rovnicou (6.123), bude práca trecích síl (pripomeňme si, že práca trecích síl je vždy záporná, $W_{tr} \leq 0$) viesť na nárast vnútornej energie a/alebo záporné teplo dodaného telesu,

$$-W_{tr} = \Delta U - \Delta Q, \quad (6.126)$$

t.j. buď sa teleso samo trením ohreje alebo odvedie toto vzniknuté teplo do okolia.

Pri bilancovaní energie stlačiteľnej kvapaliny musíme teda uvažovať s celkovou energiou, a nie len mechanickou energiou. Pridáme teda k energetickej bilancii kvapaliny v potrubí v rovnici (6.100) aj vnútornú energiu v segmente (x_1, x'_1) , U_1 , a v segmente (x_2, x'_2) , U_2 , čím dostaneme,

$$\left(u_1 + p_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 \right) S_1 v_1 \Delta t - \left(u_2 + p_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \rho_2 g h_2 \right) S_2 v_2 \Delta t = 0, \quad (6.127)$$

kde $U_1 = \rho_1 u_1 S_1 v_1 \Delta t$, t.j. u_1 je vnútorná energia jednotkovej hmotnosti kvapaliny pri tlaku p_1 a hustote ρ_1 , a podobne pre u_2 v mieste 2. Predelením hmotnosťou segmentov, ako bolo avízované vyššie pri rovnici (6.120), nájdeme Bernoulliho rovnicu platnú pre stlačiteľné kvapaliny, pri zanedbaní trenia a prestupu tepla z okolia,

$$u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gh = \text{konst.} \quad (6.128)$$

Veličina $h = u + p/\rho$ sa nazýva *entalpia* látky na jednotku hmotnosti. Po jej prenasobení s hmotnosťou kvapaliny, $m = \rho V$, nájdeme entalpiu danej hmotnosti látky,

$$\mathcal{H} = U + pV. \quad (6.129)$$

Entalpia patrí medzi základné termodynamické stavové veličiny a pre konkrétne látky ju možno nájsť v tabuľkách pre meniace sa hodnoty tlaku a teploty.

6.5.5 Hustota toku energie

Bernoulliho rovnicu (6.100) možno ešte upraviť do všeobecnejšieho tvaru, a získať jej zaujímavú interpretáciu z pohľadu *toku energie*.

Ak v rovnici (6.100) budeme uvažovať priestor medzi x_1 a x_2 , kadiaľ prúdi kvapalina ako vybranú časť priestoru (v angl. “control volume”), potom orientácia plôch, ako elementov plochy ohraničujúcej tento priestor bude pri mieste 2 paralelná s rýchlosťou, a preto $S_2 v_2 = \vec{S}_2 \cdot \vec{v}_2$, a pri mieste 1 anti-paralelná, $S_1 v_1 = -\vec{S}_1 \cdot \vec{v}_1$. S týmto označením môžeme písať

$$\sum_{i=1}^2 \vec{S}_i \cdot \vec{v}_i \left(p_i + \frac{1}{2} \rho_i v_i^2 + \rho_i h_i g \right) = 0. \quad (6.130)$$

Veličina

$$\vec{j}_{em} = \vec{v}_i \left(p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho h g \right) = \vec{v} e_m \quad (6.131)$$

má podobne ako \vec{j}_m v rovnici (6.89), význam *hustoty toku mechanickej energie* cez jednotkovú plochu za jednotku času z vybraného objemu kvapaliny, a rovnica (6.131) hovorí že súčet celkového toku mechanickej energie z vybraného objemu cez plochy S_1 a S_2 je nulový. Samotný výraz

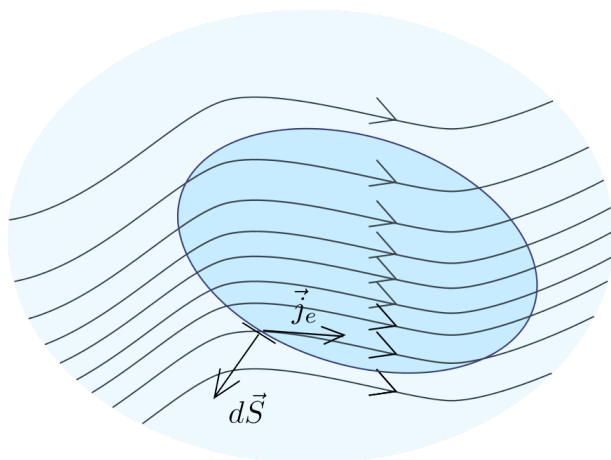
$$e_m(\vec{r}) = p(\vec{r}) + \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) v(\vec{r})^2 + \rho(\vec{r}) \vec{r} \cdot \vec{g} \quad (6.132)$$

má aj v tomto zmysle význam objemovej hustoty mechanickej energie prúdiacej kvapaliny (Obr. 84).

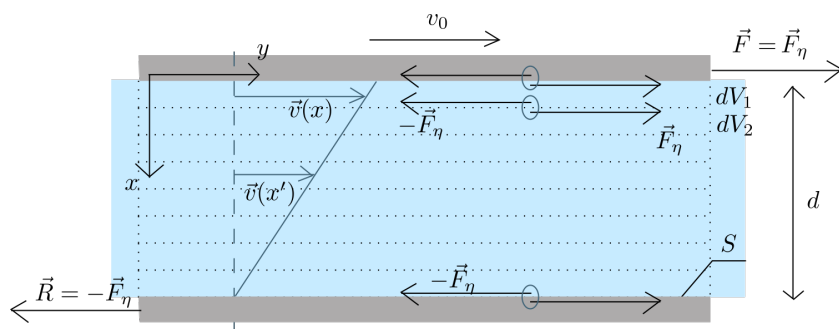
Analogicky, vo všeobecnejšom prípade stlačiteľnej kvapaliny či plynu, použijeme celkovú energiu na jednotku objemu a nájdeme *hustotu toku celkovej energie*

$$\vec{j}_e = \vec{v} \left(h \rho + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho h g \right) = \vec{v} e. \quad (6.133)$$

Hustota toku energie a hustota toku hmotnosti sa využívajú v technickej praxi pri návrhoch prúdenia z pohľadu zásobníkov, reaktorov, chladičov a pod (“control volume”), ktoré predstavujú vydelený objem priestoru, cez ktorý prúdi kvapalina. Tento objem nie je spojený s hmotnými elementami kvapaliny tak ako vydelený objem kvapaliny, ktorý sme uvažovali v našom výklade na začiatku tejto časti.



Obr. 84: Podobne ako tok hmotnosti, \vec{j}_m , zavádzame v hydromechanike aj tok mechanickej energie, \vec{j}_e , ktorého integrál cez uzavretú plochu, $\int d\vec{S} \cdot \vec{j}_e$, dá celkový pokles mechanickej energie vo vydelenom objeme priestoru (tmavá modrá). Ten, pokiaľ v ňom nie je konaná práca (napr. turbínou) alebo viskóznymi silami, musí byť nulový.



Obr. 85: Ak chceme hornú dosku posúvať rýchlosťou v_0 pri voči spodnej doske, pričom medzi nimi je kvapalina, musíme na vrchnú dosku pôsobiť silou \vec{F} rovnou viskóznou sile \vec{F}_η . V kvapaline sa rozpo pohybujú jej vrstvy tak, že ich rýchlosť rastie lineárne od nuly po v_0 . Jednotlivé vrstvy, objemové elementy dV_i vyznačené bodkovanou čiarou, na seba vzájomne pôsobia viskóznou silou. Sily spojené zákonom akcie-reakcie majú pôsobiská spolu zakrúžkované. Celková sila pôsobiaca na každý jeden objemový element je nulová, a preto sa každá vrstva pohybuje v čase nemennou, aj keď medzi vrstvami rôznou rýchlosťou. Ťahová sila \vec{F} je prostredníctvom viskóznou silou prenášaná na spodnú dosku, kde je jej pôsobenie kompenzované reakčnou silou \vec{R} .

6.5.6 Viskozita

Viskozita charakterizuje veľkosť vnútorného trenia v tečúcej kvapaline. Pri zavedení tlaku sme na obr. 70 demonštrovali, že kvapalina v pokoji nevykazuje tangenciálne sily. Akonáhle je ale rýchlosť kvapaliny v nádobe v smere \vec{e} nenulová, elementy kvapaliny nadchádzajúce sa pod plochou S sú strhávané elementami kvapaliny nad touto plochou. Prichádza k silovému pôsobeniu v tangenciálnom smere vzhľadom na plochu S .

Uvažujme dve paralelné dosky dlhé l , široké h a vzdialené od seba o d , medzi ktorými je kvapalina (Obr. 85). Ak spodná doska bude nepohyblivá a vrchnú budeme posúvať rýchlosťou v_0 , budeme ju musieť pri tom ťahať silou F_η . Experimenty ukázali, že táto sila je úmerná ploche ťahanej dosky lh , rozdielu rýchlostí dosiek v_0 , a nepriamo úmerná ich kolmej vzdialenosti d , t.j.

$$F_\eta = \eta \frac{lh}{d} v_0. \quad (6.134)$$

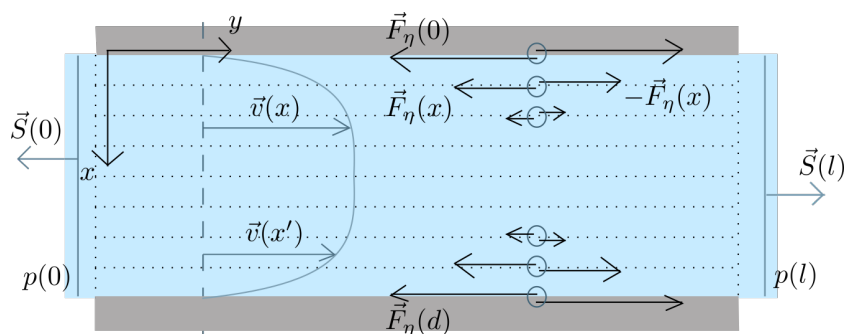
Konštanta úmernosti η charakterizuje kvapalinu, a nazýva sa *dynamická viskozita*.

Ak by sme do kvapaliny dali malé viditeľné čiastočky, tak by sme pozorovali, že kvapalina pri pohybujúcej sa doske sa hýbe s rýchlosťou blízkou v_0 , kvapalina pri doske v pokoji len s malou rýchlosťou, a tento nárast rýchlosti od jednej rýchlosti k druhej je približne lineárny (Graf $\vec{v}(x)$ na Obr. 85).

Rozoberieme si túto situáciu z hľadiska pôsobenia síl. Uvažujme element vody dV_1 , hraničiaci s pohybujúcou sa doskou (Obr. 85). Ten pôsobí na dosku silou $-\vec{F}_\eta$ a v zmysle 3. Newtonovho zákona teda aj doska pôsobí naň silou \vec{F}_η . No pretože jeho rýchlosť je nemenná, musí naň pôsobiť od nasledovného elementu dV_2 druhá sila, ktorá túto silu vykompenzuje, $-\vec{F}_\eta$. Takto môžeme prechádzať cez elementy kvapaliny až k spodnej doske, ktorá je v pokoji. Nájdenú silu (6.134) pôsobiacu na povrch každého elementu kvapaliny možno vzhľadom na lineárny priebeh rýchlosti v kvapaline v smere y vyjadriť aj pomocou *lokálnej* zmeny rýchlosti s nárastom vzdialenosti v tvare

$$\frac{F_\eta(x)}{lh} = \eta \frac{\Delta v_y}{\Delta x} = \eta \frac{dv_y}{dx}. \quad (6.135)$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že ak by bola rýchlosť prúdenia kvapaliny všade rovnaká, viskózne sily v nej budú nulové. Predstavme si kvapalinu prúdiacu v potrubí. Ak by v celkom priereze mala rovnakú rýchlosť, viskózne sily v nej budú nulové. Znamená to, že by viskózna kvapalina prúdila bez trenia? Nie, rýchlosti nemôžu byť v celom priereze rovnaké, lebo, ako sme videli v popise experimentu s paralelnými doskami, pri stene je rýchlosť kvapaliny rovnaká



Obr. 86: Pri prúdení kvapaliny v potrubí klesá v dôsledku viskozity rýchlosť prúdenia pri (nepohyblivej) stene na nulu. Viskózne sily pôsobiace na plochy objemových elementov nie sú rovnako veľké, a preto na každý z elementov pôsobí nenulová výsledná viskózna sila, ktorá je maximálna pri vnútornej stene potrubia. Celkový súčet viskózných síl pôsobiacich na kvapalinu nachádzajúcu sa v potrubí s dĺžkou l určuje len viskózna sila na okraji, ostatné sily sa vzájomne zrušia. Táto výsledná sila musí byť kompenzovaná nenulovým rozdielom tlaku na konci a začiatku potrubia.

ako je rýchlosť steny. Preto pri vnútornej stene potrubia bude rýchlosť kvapaliny nulová a jej nárast smerom do stredu potrubia bude spojený s nenulovými viskóznymi silami, a teda aj s nenulovým vnútorným trením (Obr. 86). Aby takéto prúdenie neustalo je potrebné, aby tlak v potrubí narastal proti smeru prúdenia. Celková sila pôsobiaca na kvapalinu nachádzajúcu sa v potrubí s dĺžkou l , vnútorným obvodom $2h$ a prierezom S potom bude

$$0 = (p(0) - p(l))S - l2h\eta \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} \rightarrow \Delta p = \frac{2lh}{S}\eta \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} \quad (6.136)$$

Silové pôsobenia vzájomne medzi jednotlivými elementami kvapaliny na navzájom vyrušia v dôsledku 3. Newtonovho zákona. Rozdiel tlaku teda kompenzuje pôsobenie trecích síl na vnútornej stene potrubia.

Príklad: Odhadneme, na akej vzdialenosti od okraju narastie rýchlosť prúdenia v potrubí na svoju priemernú hodnotu. Potrubie nech má priemer $d = 1\text{cm}$ a priemerná rýchlosť prúdenia v ňom nech je $v_{av} = 1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Predpokladajme, že meraním sme našli, že pokles tlaku na 1m dĺžky je $\Delta p = 1,7\text{kPa}$ a viskozita vody pri $\theta = 10^\circ\text{C}$ je $\eta = 1,3\cdot 10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}$.

Celkovú viskóznou silu odhadneme zo vzťahu (6.134), len pre vnútorný

obvod použijeme πd ,

$$F_\eta = S\eta \frac{\Delta v}{\Delta r} = l\pi d\eta \frac{v_{av}}{\Delta r} \quad (6.137)$$

kde Δr je radiálna vzdialenosť od okraja potrubia na ktorej rýchlosť narástla z nuly (na stene) na priemernú rýchlosť. Spočítaním sily pretlaku a viskózne sily podobne ako v (6.136) nájdeme

$$l\pi d\eta \frac{v_{av}}{\Delta r} = \pi(d/2)^2 \Delta p \quad (6.138)$$

$$\Delta r = \frac{4l\eta v_{av}}{d\Delta p} = 0,3\text{mm} \quad (6.139)$$

Odhadujeme teda, že pokles rýchlosti pri stene bude značne rýchly. Prípadná drsnosť povrchu môže preto viskóznou silu výrazne navyšovať.

Viskozita pre väčšinu kvapalín výrazne klesá s rastúcou teplotou, pre plyny viskozita s teplotou rastie (Obr. 87). Jej hodnoty pre technické aplikácie sa určujú experimentálne, aj keď pre plyny jej hodnoty dostatočne dobre vysvetľuje kinetická teória plynov a pre kvapalinu je možné jej hodnotu určiť pomocou simulácií molekulárnej dynamiky.

Okrem dynamickej viskozity sa používa aj *kinematická viskozita*,

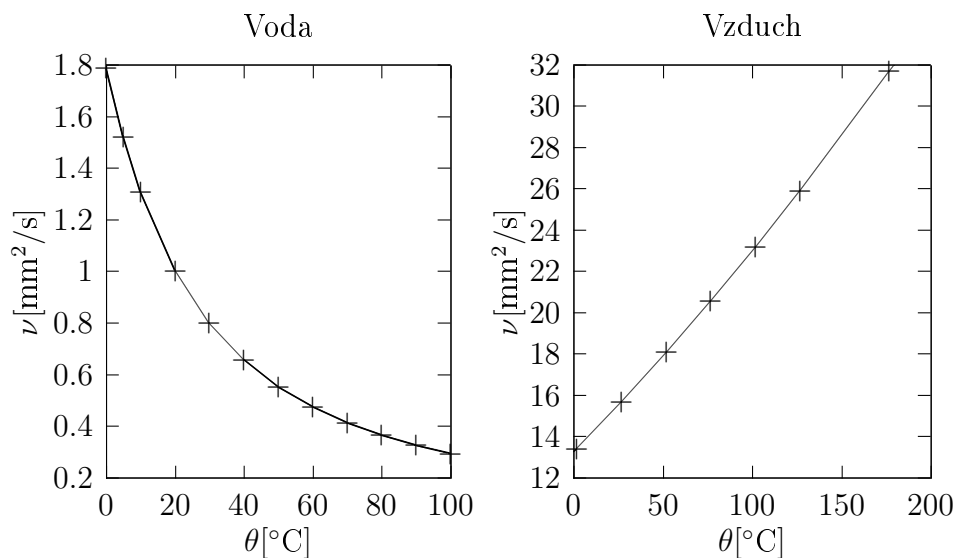
$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (6.140)$$

Kinematická viskozita je relevantná pre úlohy turbulentného a laminárneho vynúteného prúdenia. Navyše, keďže v rámci kinetickej teórie plynov sa ukazuje, že dynamická viskozita je úmerná hustote, jej predelením získavame pre plyny univerzálnejšiu charakteristiku.

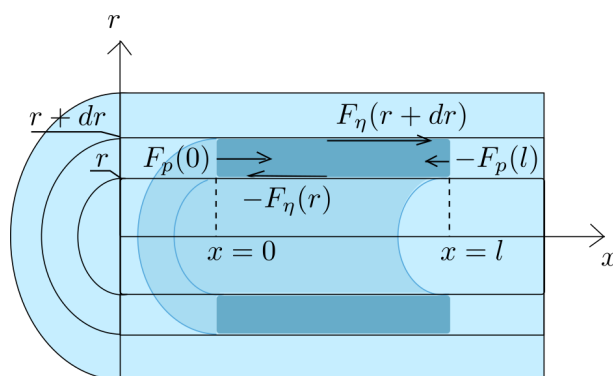
6.5.7 Laminárne prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny v potrubí

Pri odvodení Bernoulliho rovnice sme neuvažovali trecie sily, predpokladali sme, že energia objemovej jednotky kvapaliny sa zachováva. V súvislosti s výpočtom toku sme zase predpokladali, že rýchlosť kvapaliny v celom priereze potrubia je rovnaká. Výklad viskózneho trenia v predchádzajúcej kapitole ukázal, že ani jeden z týchto predpokladov nie je celkom správny.

Pri malých rýchlostiach je prúdenie *laminárne*, t.j. prúdnice tvoria krivky (priamky pre priamočiare potrubie), idúce paralelne so stenami potrubia. V prípade priamočiareho potrubia za element kvapaliny s jednoznačnou rýchlosťou, rovnobežnou so stenami potrubia, vezmeme valcovú stenu s dĺžkou l



Obr. 87: Graf kinematickej viskozity pre vodu a vzduch pri atmosférickom tlaku. Pri $\theta = 100^{\circ}\text{C}$ dochádza k varu, voda mení skupenstvo na paru, ktorej hodnoty kinematickej viskozity sú podobné vzduchu, a teda asi 100 krát väčšie).



Obr. 88: Sily pôsobiace na cylindrický element kvapaliny, vyznačený tmavšou farbou, v potrubí. Nenulový rozdiel tlakových síl je potrebný na kompenzáciu nenulového rozdielu viskózných síl od susediacich cylindrických elementov.

a polomeri r a $r + dr$ (Obr. 88). Nakoľko tento element sa musí pohybovať s konštantnou rýchlosťou (kvôli rovnici kontinuity a nestlačiteľnosti tejto kvapaliny), bude súčet všetkých naň pôsobiacich síl nulový. Na jeho prednej a zadnej podstave pôsobia tlakové sily od susednej kvapaliny,

$$F_p(0) = p(0)2\pi r dr, \quad F_p(l) = p(l)2\pi r dr \quad (6.141)$$

a na plášťoch viskózne sily od okolitej kvapaliny,

$$F_\eta(r) = \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr}, \quad F_\eta(r + dr) = F_\eta(r) + \frac{d}{dr} F_\eta(r) dr \quad (6.142)$$

Ich súčet, s patričnými znamienkami podľa Obr. 88, sa musí rovnať nule,

$$0 = 2\pi r(p(0) - p(l))dr + dr \frac{d}{dr} \eta 2\pi r l \frac{d}{dr} v(r) \quad (6.143)$$

$$0 = \frac{\Delta p}{l} + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} v(r). \quad (6.144)$$

Posledný vzťah predstavuje diferenciálnu rovnicu pre rýchlostné pole $v(r)$. Táto rovnica je špeciálny prípad *Navier-Stokesovej rovnice*, všeobecnejšej pohybovej rovnice pre rýchlostné pole kvapaliny, zjednodušenej pre stacionárne prúdenie, malé rýchlosti a cylindrickú geometriu.

Dvojnásobným integrovaním v (6.144) podľa r nájdeme

$$v(r) = v(0) - \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} r^2. \quad (6.145)$$

$v(0)$ predstavuje maximálnu rýchlosť prúdenia v strede potrubia, a od tejto hodnoty rýchlosť s polomerom kvadraticky klesá. Hodnotu maximálnej rýchlosti nájdeme z podmienky, že na stene potrubia musí byť rýchlosť prúdenia nulová,

$$v(R) = v(0) - \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} R^2 = 0 \rightarrow v(0) = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} R^2 \quad (6.146)$$

a teda rýchlostný profil má tvar

$$v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2). \quad (6.147)$$

Vidíme, že ustálený laminárny tok kvapaliny má *parabolický* rýchlostný profil. Prúdnice bližšie ku stene potrubia majú nižšiu rýchlosť ako prúdnice v strede potrubia.

Celkový tok kvapaliny môžeme vhodne vyjadriť pomocou priemernej rýchlosti kvapaliny (6.85),

$$v_{av} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r dr v(r) = \frac{2}{R^2} \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} \int_0^R dr r (R^2 - r^2), \quad (6.148)$$

t.j.

$$v_{av} = \frac{R^2}{8\eta} \frac{\Delta p}{l}. \quad (6.149)$$

Porovnaním s rovnicou (6.146) vidíme, že maximálna rýchlosť v strede je dvakrát väčšia ako je priemerná rýchlosť.

V prípade laminárneho prúdenia teda nachádzame, že pokles tlaku v potrubí je daný vzťahom

$$\Delta p = \frac{8\eta}{R^2} l v_{av} = \frac{8\eta}{\pi R^4} l J_V, \quad (6.150)$$

t.j. úmerný dĺžke potrubia l , toku alebo priemernej rýchlosti v_a a prudko narastajúci so zmenšujúcim sa priemerom potrubia R . Člen typu (6.150) je teda potrebné dodať na pravú stranu Bernoulliho rovnice, a predstavuje rozdiel v objemovej hustote energie v kvapaline na vzdialenosti potrubia l .

Príklad: Nájdeme pokles tlaku na vzdialenosti $l = 1\text{m}$ v potrubí s vodou s priemerom $d = 1\text{cm}$, pri celkovom toku zodpovedajúcom priemernej rýchlosti $v_{av} = 1\text{m.s}^{-1}$, za predpokladu, že prúdenie má laminárny charakter.

$$\Delta p = \frac{8\eta}{R^2} l v_{av} = \frac{8 \cdot 1,3 \cdot 10^{-3}}{0,005^2} \cdot 1\text{m} \cdot 1\text{m.s}^{-1} = 416\text{Pa}, \quad (6.151)$$

čo je podstatne menej ako uvádzaný pokles tlaku v tomto prípade v príklade v časti 6.5.6, $\Delta p = 1700\text{Pa}$! Predpoklad o laminárnom prúdení v tomto prípade nebol správny, ako uvidíme v nasledujúcej kapitole.

Okrem uváženia viskózných strát, je potrebné modifikovať aj tvar hustoty kinetickej energie

$$\frac{1}{2} \rho v_{av}^2 \rightarrow \zeta \frac{1}{2} \rho v_{av}^2, \quad (6.152)$$

ak sa používa pre jej výpočet priemerná rýchlosť prúdenia v_{av} . ζ sa nazýva *koeficient kinetickej energie* a súvisí s nekonštantným rýchlostným profilom (6.149). Ukážeme si, že pre laminárne prúdenie je $\zeta = 2$.

Ak budeme uvažovať potrubie s prierezom S a dĺžkou l , tak na jeho vstupe doň vteká za jednotku času kinetická energia

$$\frac{dE_{k,1}}{dt} = \int dS v_1(r) \frac{1}{2} \rho v_1(r)^2 \quad (6.153)$$

$$= \frac{1}{2} \rho \int 2\pi r dr \left[\frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2) \right]^3 \quad (6.154)$$

$$= \frac{\pi \rho \Delta p^3}{128 \eta^3 l^3} \left[-\frac{1}{4} (R^2 - r^2)^4 \right]_0^R \quad (6.155)$$

$$= \frac{\pi \rho \Delta p^3 R^8}{64.8 \eta^3 l^3} = \rho \pi v_{av}^3 R^2 \quad (6.156)$$

Prepočítaním na jednotku plochy dostaneme priemerný tok kinetickej energie

$$j_{e,av} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{dE_{k,1}}{dt} = \rho v_{av}^3 \quad (6.157)$$

a teda priemernú hustotu kinetickej energie,

$$e_{av} = \frac{j_{e,av}}{v_{av}} = \zeta \frac{1}{2} \rho v_{av}^2, \quad \zeta = 2, \quad (6.158)$$

tak ako sme uviedli.

6.5.8 Turbulentné prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny v potrubí

V praxi sa s laminárnym prúdením stretávame len málokedy. Pri vyšších rýchlostiach prúdenia prúdnice prestávajú mať jednoduchú štruktúru krieviek rovnobežných so stenami nádoby-potrubia, ale vytvárajú víry na malých a/alebo veľkých priestorových škálach. Tieto víry nie sú stacionárne, môžu vznikať, zanikať a presúvať sa. Takýto režim nazývame prechodné a neskôr plne rozvinuté *turbulentné prúdenie*.

Pre výpočty používame v čase ustrednené rýchlostné pole, ktoré už má stacionárny, t.j. od času nezávislý charakter. Pri stenách potrubia sa vytvára *hraničná vrstva*, v ktorej ustrednené rýchlostné pole mení svoju hodnotu z hodnoty v objeme kvapaliny na nulu. Celkom v blízkosti steny je teda rýchlosť malá, a tu má prúdenie opäť laminárny charakter - hovoríme o *laminárnej podvrstve*. Nakoľko šírka hraničnej vrstvy nebýva veľká, hodnota ustrednenej rýchlosti prúdenia v čase má podstatne plochejší profil ako pri laminárnom prúdení. Preto koeficient kinetickej energii býva pri turbulentnom prúdení menší ako 2, napr. $\zeta \approx 1,4$ [Nakayama]

Vzhľadom na kvalitatívne zmeny v prúdení je potrebné zmeniť aj vzťah pre pokles tlaku viskóznym trením nájdený v predchádzajúcej časti. Pre tento

účel sa zavádza *koeficient trenia* v potrubí λ pomocou *Darcy-Weisbachovom* vzťahu,

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{D} \frac{1}{2} \rho v_{av}^2 \quad (6.159)$$

kde D je priemer potrubia. Porovnaním s (6.150) nájdeme, že pre laminárne prúdenie platí

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}, \quad \text{Re} = \frac{v_{av} D}{\nu}, \quad (6.160)$$

kde Re je *Reynoldsovo* číslo a $\nu = \eta/\rho$ je kinematická viskozita kvapaliny. Výhodnosť zápisu poklesu tlaku pomocou Darcy-Weisbachovho vzťahu spočíva práve v tom, že λ , respektíve Re sú bezrozmerné čísla a preto nemôžu závisieť ľubovoľne od rýchlosti, rozmeru a viskozity, ale len od ich kombinácie ako tieto veličiny vystupujú v Reynoldsovom čísle. Pre charakterizáciu prúdenia kvapaliny v potrubí, laminárneho, turbulentného alebo akéhokoľvek iného, potrebujeme poznať len závislosť koeficientu trenia od Reynoldsovho čísla,

$$\lambda(\text{Re}), \quad (6.161)$$

pričom táto závislosť je *univerzálna* pre akékoľvek kvapaliny prúdiace potrubím, a teda možno ju určiť experimentálne a tabulovať. Napríklad podľa Blasiusa je

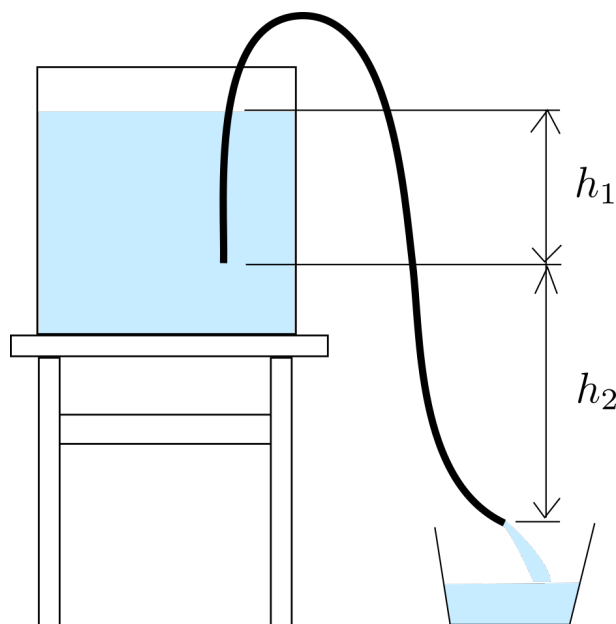
$$\lambda(\text{Re}) = \begin{cases} \frac{64}{\text{Re}} & \text{Re} \in (0 - 3 \cdot 10^3) \text{ (laminárne)} \\ 0,3164 \text{Re}^{-1/4} & \text{Re} \in (3 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^5) \text{ (turbulentné)} \end{cases} \quad (6.162)$$

Skoková zmena tejto závislosti pri $\text{Re} \sim 2300$ indikuje kvalitatívnu zmenu prúdenia z laminárneho na turbulentné pri tejto hodnote Reynoldsovho čísla.

Príklad: Nájdeme pokles tlaku na vzdialenosti $l = 1\text{m}$ v potrubí s vodou s priemerom $d = 1\text{cm}$, pri celkovom toku zodpovedajúcom priemernej rýchlosti $v_{av} = 1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Ide o tú istú situáciu, pri ktorej sme v časti 6.5.6 pri experimentálne danom poklesu tlaku $\Delta p = 1700\text{Pa}$ odhadli šírku hraničnej vrstvy na $0,3\text{mm}$, a v časti 6.5.7 za predpokladu laminárneho prúdenia našli pokles tlaku len $\Delta p \sim 400\text{Pa}$.

V prvom rade teda vyhodnotíme Reynoldsovo číslo, aby sme určili charakter prúdenia,

$$\text{Re} = \frac{d v_{av} \rho}{\eta} = 7700 \quad (6.163)$$



Obr. 89: Pri čistení kalu v akváriu preteká voda do kýbla samospádom. Viskózný odpor kvapaliny v hadici predstavuje dôležitý príspevok k znižovaniu rýchlosti, ktorou voda vyteká.

a teda ide o turbulentný režim. Predpoklad laminárneho prúdenia nebol správny, a preto aj pokles tlaku vyšiel oveľa nižší ako experimentálna hodnota.

Použitím koeficientu trenia pre túto hodnotu Reynoldsovho čísla námjeme

$$\lambda = 0,3164(7700)^{-1/4} = 0,0338 \quad (6.164)$$

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{1}{2} \rho v_{av}^2 = 0,0338 \cdot \frac{1}{0,01} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 1^2 = 1690 \text{ Pa}, \quad (6.165)$$

v súlade s príkladom v časti 6.5.6.

Príklad: Pri čistení kalu z dna akvária sa používa hadica s dĺžkou 2,15m a s prierezom 1cm. Výškový rozdiel medzi vstupom vody do hadice v akváriu (tesne nad dnom) a výstupom vody nad kýblom je 45cm, hladina vody v akváriu je 25cm nad vstupom do hadice (Obr. 89). Akou priemernou rýchlosťou bude voda vytekať hadicou ak (a) zanedbáme viskozitu, (b) predpokladáme

laminárne prúdenie v hadici a (c) budeme predpokladať turbulentné prúdenie v hadici? Rozhodnite, ku ktorému z týchto režimov dochádza na základe hodnoty Reynoldsovo čísla.

Riešenie: Použijeme modifikovanú Bernoulliho rovnicu, uvažujúcu aj koeficient kinetickej energie aj Darcy-Weisbachov vzťah pre pokles tlaku kvôli viskozite,

$$h_1\rho g - \left(\frac{1}{2}\xi\rho v^2 - h_2\rho g\right) = \Delta p_\eta = \lambda\frac{l}{D}\frac{1}{2}\rho v^2, \quad (6.166)$$

kde v je priemerná rýchlosť prúdenia v hadici, h_1 výška hladiny od vstupu do hadice, h_2 výška vstupu do hadice od výstupu hadice, l dĺžka hadice a D jej vnútorný priemer. Závislosť koeficientu trenia λ od rýchlosti cez Reynoldsovo číslo nie je veľmi silná, preto pre prvý odhad budeme považovať túto za danú výtokovou rýchlosťou ideálnej kvapaliny.

Úpravou dostaneme vzťah

$$v = \sqrt{\frac{2(h_1 + h_2)g}{\xi + \lambda l/D}} \quad (6.167)$$

Pre ideálnu kvapalinu ($\xi = 1$, $\eta = 0$) máme

$$v_{id} = \sqrt{2(h_1 + h_2)g} = 3,71\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \quad (6.168)$$

Ak z tejto hodnoty prepočítame Reynoldsovo číslo, nájdeme

$$\text{Re} = \frac{Dv_{id}}{\nu} \approx 28500 \gg 2300 \quad (6.169)$$

t.j. sme hlboko v turbulentnom režime. Preto použijeme $\xi = 1,4$ a vzťah pre koeficient trenia (6.162) pre turbulentný režim s rýchlosťou odhadnutou podľa ideálneho prúdenia, nájdeme

$$v_{turb}^0 = 1,44\text{m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (6.170)$$

Ak teraz znovu prepočítame Reynoldsovo číslo, a následne koeficient trenia, a opakovali tento proces v niekoľkých iteráciách (najjednoduchšie napísaním výpočtu v tabuľkovom procesore, napr. OpenOffice spreadsheet alebo MS Excel), nájdeme nakoniec riešenie

$$v_{turb} = 1,29\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \quad (6.171)$$

čomu zodpovedá Reynoldsovo číslo

$$\text{Re} = 9900 \quad (6.172)$$

Použitím vzťahu pre λ pri laminárnom prúde nájde

$$v_{lam} = 2,01 \text{m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (6.173)$$

Pre porovnanie, meranie dalo v tomto prípade priemernú výtokovú rýchlosť 1,14m/s. Vidíme, že použitie výpočtu pre ideálnu kvapalinu vedie na viac ako trojnásobne väčšiu rýchlosť, uvaženie laminárneho prúdenia dá menej ako dvoj násobok a nakoniec použitie vzťahu pre turbulentné prúdenie dá predpoveď len o cca 10% väčšiu ako je meranie. Treba uviesť, že tu uvedený výsledok merania nemá presnosť lepšiu ako 5%.

Pre veľmi tenké hraničné vrstvy, vstupuje do úvahy aj drsnosť steny potrubia. Pre tento účel je potrebné vziať koeficient trenia λ zodpovedajúci použitej drsnosti vnútorného povrchu, ktorý možno vyhľadať v špecializovanej literatúre a tabuľkách na internete.

V dynamike hmotných bodov, pri pojednávaní o trení v časti 2.3.4 sme sa stretli so silou Stokesovho trenia, ktorá bola úmerná rýchlosti telesa, a s aerodynamickým odporom, kde bola sila úmerná kvadrátu rýchlosti. Kritérium ktoré z týchto modelov trenia použiť bolo presne Reynoldsovo číslo. A dôvod lineárneho alebo (približne) kvadratického charakteru sily súvisí aj s tu uvádzanou lineárnou alebo kvadratickou závislosťou poklesu tlaku (t.j. sily na jednotku plochy). Evidentne, tieto dve veci úzko spolu súvisia, a čitateľa vyzývame, aby si túto súvislosť v duchu sám dobre premyslel.

V súčasnosti sa stále viac využívajú numerické metódy, špeciálne metód konečných prvkov a konečných elementov pre výpočet prúdenia v realističtých systémoch. Aj v týchto výpočtoch je ale potrebné modelovať hraničné vrstvy pomocou efektívnych modelov uvažujúcich rôzne režimy turbulentného charakteru prúdenia v nich, ktoré sú založené na dôsledných meraniach alebo špeciálnych výpočtoch vo veľmi zjednodušených geometriách.