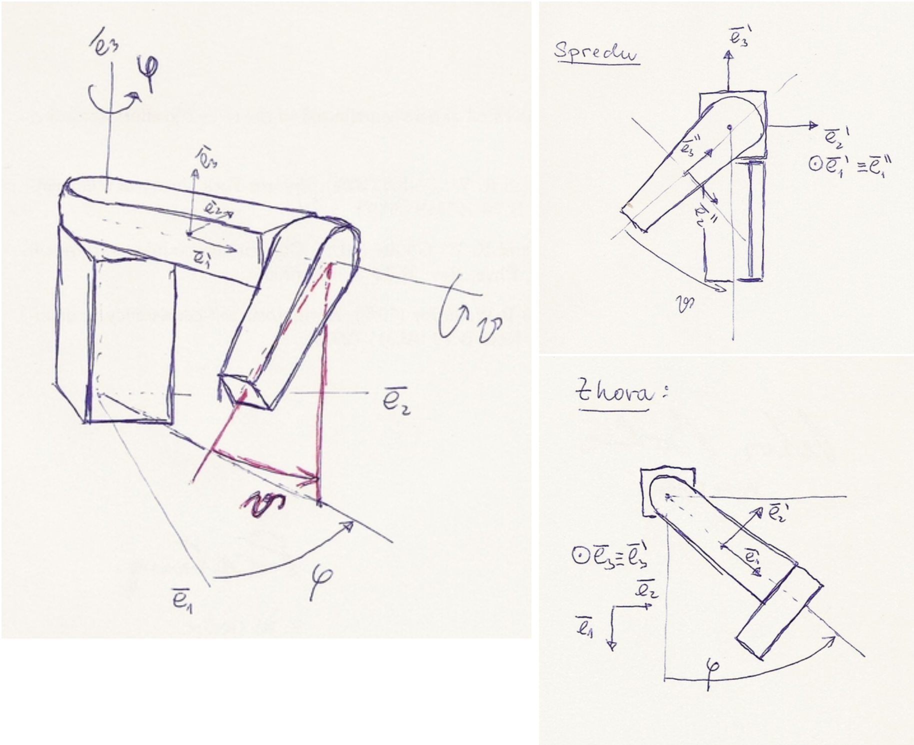


Obr. 9: Manipulátor s plecom.

3.5 Dvoj-ramenný manipulátor s plecom

(Je aj v skriptách ale iným postupom a s nie celkom korektným výsledkom)

Postup je analogický predchádzajúcemu a preto budeme dáme len jednotlivé vzťahy:

1. Dva geometrické stupne voľnosti - ϕ a θ.

2. Označenie polôh ťažiska a počiatkov súradnicových sústav pevne spojených s každým i.t.t., voľba ich orientácie.

3. Vyjadrenie vektorov vo vhodných súradnicových sústavách:

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\phi}\vec{e}'_3 = \dot{\phi}\mathscr{O}^{-\theta,1}[\vec{e}''_3] = \dot{\phi}(\sin(\theta)\vec{e}''_2 + \cos(\theta)\vec{e}''_3), \tag{195}$$

$$\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}\vec{e}'_1 = \dot{\theta}\vec{e}''_1, \tag{196}$$

$$\vec{l} = l\vec{e}'_1, \quad \vec{d} = -d\vec{e}''_3 = d(\sin(\theta)\vec{e}'_2 - \cos(\theta)\vec{e}'_3) \tag{197}$$

$$\vec{r}^*_1 = r^*_1\vec{e}'_1, \quad \vec{r}^*_2 = \vec{l} + \vec{d} \tag{198}$$

$$\vec{v}^*_1 = \frac{d\vec{r}^*_1}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}^*_1 = \dot{\phi} r^*_1 \vec{e}'_2 \tag{199}$$

$$\vec{v}^*_2 = \frac{d\vec{r}^*_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{l} + \vec{d}) = \vec{\omega}_1 \times \vec{l} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{d} \tag{200}$$

$$= -\dot{\phi} d\sin(\theta)\vec{e}'_1 + (\dot{\phi} l + \dot{\theta} d\cos(\theta))\vec{e}'_2 + \dot{\theta} d\sin(\theta)\vec{e}'_3 \tag{201}$$

$$|\vec{v}^*_2|^2 = \dot{\phi}^2(d^2\sin^2(\theta) + l^2) + \dot{\theta}^2 d^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta} l d\cos(\theta) \tag{202}$$

4. Kinetická energia oboch i.t.t.

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1(r^*_1)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\phi}^2, \quad I_1 = \vec{e}'_3 \cdot \vec{\vec{I}}_1 \cdot \vec{e}'_3 \tag{203}$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2^*|^2 + \frac{1}{2}(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\cdot\vec{\vec{I}}_2\cdot(\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2) && (204)\\
&= \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\phi}^2(d^2\sin^2(\theta)+l^2)+\dot{\theta}^2 d^2 - 2\dot{\phi}\dot{\theta}ld\cos(\theta)\right) && (205)\\
&\quad +\frac{1}{2}I''_{11}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I''_{22}\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I''_{33}\cos^2(\theta)\dot{\phi}^2, \quad I''_{ii} = \vec{e}''_i\cdot\vec{\vec{I}}_2\cdot\vec{e}''_i && (206)
\end{aligned}$$

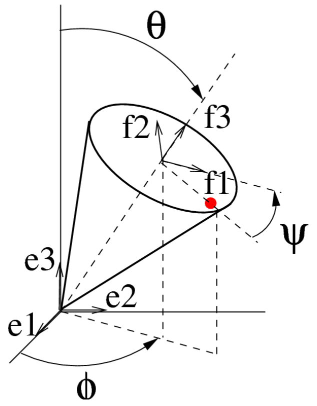
za predpokladu že tenzor zotrvačnosti ramena je diagonálny (rozumný predpoklad). Celková kinetická energia má potom tvar

$$\begin{aligned}
K &= K_1 + K_2 && (207)\\
&= \frac{1}{2}\left(\tilde{I}_1 + A\sin^2(\theta) + B\cos^2(\theta)\right)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_2\dot{\theta}^2 + M\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} && (208)\\
\tilde{I}_1 &= m_1(r_1^*)^2 + I_1 + m_2 l^2 && (209)\\
A &= m_2 d^2 + I''_{22}, \quad B = I''_{33} && (210)\\
\tilde{I}_2 &= m_2 d^2 + I''_{11} && (211)\\
M &= m_2 ld && (212)
\end{aligned}$$

5. Potenciálna energia oboch i.t.t.

$$U = -dm_2 g\cos(\theta)$$

6. Odvodiť Lagrangeove pohybové rovnice, t.j. parciálne derivácie...



Obr. 10: Zotrvačník a v ňom použité označenia a orientácie sústav.

3.6 Lagrangeova funkcia pre gyroskop (zotrvačník)

(Nie je v skriptách)
S gyroskopom sme sa stretli pri zavedení formalizmu rotácii a pri odvodení Eulerovej pohybovej rovnice z 2. Newtonovej pohybovej rovnice i.t.t. Tam sme si aj zaviedli Eulerove uhly ϕ, θ, ψ pre popis polohy gyroskopu. Teraz si skonštrujeme si Lagrangeovu funkciu $L(\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}) = E_K - U$ pomocou ktorej je odvodenie pohybových rovníc gyroskopu o niečo jednoduchšie. Kinetická energia je daná súčtom translačnej a rotačnej kinetickej energie. Rýchlosť ťažiska je

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2$$

Vektor uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$ má zložky (odvodili sme pri Eulerových rovniciach a zavedení rotácií a Eulerových uhloch na 3. prednáške.)

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega^i \vec{f}_i = (-c\psi s\theta\dot{\phi} + s\psi\dot{\theta})\vec{f}_1 + (s\psi s\theta\dot{\phi} + c\psi\dot{\theta})\vec{f}_2 + (c\theta\dot{\phi} + \dot{\psi})\vec{f}_3$$

kde $\vec{f}_i$ sú jednotkové vektory v sústave pevne spojenej s zotrvačníkom. Pre kinetickú energiu nakoniec dostávame

$$E_K = \frac{1}{2}\sum I_{ij}\omega^i\omega^j + mr^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right)$$

kde tenzor zotrvačnosti vzhľadom na osi prechádzajúce ťažiskom a orientované pozdĺž $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ je

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

Potenciálna energia je jednoduchá,

$$U(\theta) = mgr^*\cos(\theta)$$

a nakoniec dostávame

$$L = \frac{1}{2}J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta))^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}\left(\dot{\theta}^2 + (\sin(\theta)\dot{\phi})^2\right) - mgr^*\cos(\theta)$$

kde $\tilde{I} = I + mr^2$.