Tieto rovnice možno ľahko upraviť do na začiatku spomínanáho tvatu pohybových rovníc systému vhodných pre numerickú implementáciu,

$$\begin{aligned}
I\dot{\omega}_1 &= -\omega_2\omega_3(J-I)+mgr^* s\psi s\theta && (93)\\
I\dot{\omega}_2 &= -\omega_3\omega_1(I-J)+mgr^* c\psi s\theta && (94)\\
J\dot{\omega}_3 &= -\omega_2\omega_1(I-J) && (95)\\
\dot{\theta} &= \omega_1 s\psi+\omega_2 c\psi && (96)\\
\dot{\phi} &= \frac{1}{s\theta}\left(\omega_2 s\psi-\omega_1 c\psi\right) && (97)\\
\dot{\psi} &= \omega_3-\frac{c\theta}{s\theta}\left(\omega_2 s\psi-\omega_1 c\psi\right) && (98)
\end{aligned}$$

z ktorej je jasne vidieť, že pre $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\phi,\theta,\psi$ sú riešeniami systému šiestich obyčajných diferenciálnych rovníc 1. rádu.

Dosadením sa dá ľahko presvečiť, že tieto rovnice spĺňa riešenie

$$\phi=\Omega_\phi t,\quad \theta=\pi/2,\quad \psi=\Omega_\psi t, \tag{99}$$

kde

$$\Omega_\phi=\frac{mgr^*}{J\Omega_\psi}, \tag{100}$$

v priblížení $\Omega_\phi \ll \Omega_\psi$. Tento pohyb sa nazýva *precesia* gyroskopu.

Ak by sme vyšetrovali stabilitu v okolí riešenia (99),

$$\phi=\Omega_\phi t+\delta\phi(t),\quad \theta=\delta\theta(t),\quad \psi=\Omega_\psi t+\delta\psi(t), \tag{101}$$

našli by sme že výchylky $\delta\phi(t),\delta\theta(t)$ a $\delta\psi(t)$ oscilujú s frekvenciou

$$\Omega_\theta=\frac{J}{I}\Omega_\psi. \tag{102}$$

Tento pohyb sa nazýva *nutácia* gyroskopu.

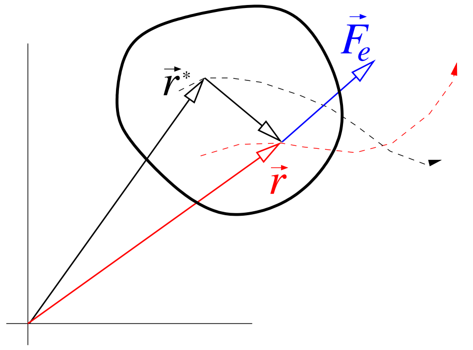
Príklad Akú pravú stranu musíme pridať do pohybovných rovníc gyroskopu ak sa tento nachádza na autíčku pohybujúcom sa so zrýchlením $\vec{a}=a\vec{e}_1$?

Moment sily z dôsledku zotrvačnej sily bude $\vec{D}_a=-\vec{r}^*\times m\vec{a}$. Tento potrebujeme vyjadriť v sústave pevne spojenej s gyroskopom, preto

$$\begin{aligned}
\vec{D}_a &= -mr^*\vec{f}_3\times\vec{e}_1 && (103)\\
\vec{e}_1 &= \mathscr{O}^{-\phi,3}(\vec{e}_1^{\,\prime})=\ldots && (104)\\
&= \sum_{kji} f_k R_{kj}^{-\psi,3}R_{ji}^{-\theta,2}R_{i,1}^{-\phi,3}=\ldots && (105)\\
&= \vec{f}_1(c\psi c\theta c\phi-s\psi s\phi)-\vec{f}_2(s\psi c\theta c\phi+c\psi s\phi)+\vec{f}_3 c\phi s\theta && (106)
\end{aligned}$$

a teda

$$\vec{D}_a=mr^*\left[\vec{f}_1(s\psi c\theta c\phi+c\psi s\phi)+\vec{f}_2(c\psi c\theta c\phi-s\psi s\phi)\right]. \tag{107}$$



Obr. 5: Pôsobenie 'externej' sily $\vec{F}_e$ v mieste $\vec{r}$ na itt môžeme nahradiť pôsobením sily $\vec{F}_e$ v ťažisku $\vec{r}^*$ a pôsobením momentu tejto sily vzhľadom na ťažisko $\vec{D}^* = (\vec{r} - \vec{r}^*) \times \vec{F}_e$.

2.9 Energia a práca v dynamike systému i.t.t

- Ak pôsobíme na teleso externou silou $\vec{F}_e$ v bode telesa daným polohovým vektorom $\vec{r}$, potom práca ktorú vykonáme bude identická práci vykonanej pôsobením tejto sily v ťažisku a momentom sily $\vec{D}^* = (\vec{r} - \vec{r}^*) \times \vec{F}_e$ (Obr. 5). Toto je dôsledok redukcie síl. Prácu môžeme potom získať pomocou vzťahu

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}_e \cdot \left(\frac{d\vec{r}^*}{dt} + \frac{d(\vec{r} - \vec{r}^*)}{dt} \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}_e \cdot (\vec{v}^* + \omega \times (\vec{r} - \vec{r}^*)) \quad (108)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\vec{F}_e \cdot \vec{v}^* + \vec{D}_e^* \cdot \vec{\omega} \right) \quad (109)$$

- Pôsobme silou $\vec{F}_e$ a momentom síl $\vec{D}_e$ na tuhé teleso, pohybové rovnice budú

$$M \frac{d}{dt} \vec{v}^* - \vec{F} = \vec{F}_e \quad (110)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{\vec{I}}^* \cdot \vec{\omega} \right) - \vec{D}^* = \vec{D}_e^*, \quad (111)$$

  pričom $\vec{D}^*$ a $\vec{F}$ predstavujú iné sily ako tie, ktorými pôsobíme my, t.j. gravitačné, trecie....

  Uvedomme si, že hviezdičkovanie momentu síl, t.j. $\vec{D}^*$, zodpovedá výpočtu výsledného momentu síl vzhľadom na ťažisko.

- Gravitačná, ale aj iné (elektrostatické, elastické sily a niekedy aj momenty síl) sú tzv. potenciálové, t.j. dajú sa zapísať v tvare

$$\vec{F}_{pot}(\vec{r}) = -\nabla_{\vec{r}} U(\vec{r}) \quad (112)$$

$$\vec{D}_{pot}(\phi) = -\vec{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} U'(\phi) \quad (113)$$

  Príklad: gravitačná potenciálna energia $U_g(\vec{r}) = Mgz$, kde M je hmotnosť telesa, g veľkosť gravitačného zrýchlenia a z zvislá súradnica ťažiska telesa narastajúca v protismere pôsobenia gravitačnej sily, alebo elastická energia v natočenej pružine (ako v hodinkách) $U_p(\vec{\phi}) = \frac{1}{2} k \phi^2$ pre malé otočenia. Ak konáme prácu prenášaním i.t.t. proti takýmto silám, veľkosť tejto práce závisí len od rozdielu potenciálnej energie medzi koncovou a začiatočnou polohou.

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \nabla U(\vec{r}) = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$$

alebo

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \frac{\partial}{\partial \phi} U'(\phi) = U'(\phi_2) - U(\phi_1)$$

pre nejakú vhodne zavedenú uhlovú premennú.

Prípomienka: smer gradientu dá smer najväčšieho nárastu potenciálnej energie, jeho veľkosť dá veľkosť tohto nárastu. Derivácia v smere jednotkového vektora $\vec{n}$ je daná ako $\vec{n} \cdot \nabla U(\vec{r})$.

Všetky takéto potenciály potenciálové sily dajú spoločnú *potenciálnu energiu telesa*

$$U(\vec{r}, \phi) \tag{114}$$

pričom potom sila aj moment sily budú jednoducho

$$\vec{F}_{pot}(\vec{r}, \phi) = -\nabla_{\vec{r}} U(\vec{r}, \phi), \quad \vec{D}_{pot}(\vec{r}, \phi) = -\vec{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} U(\vec{r}, \phi) \tag{115}$$

Zavedením rozdelenia síl na potenciálové a nepotenciálové $\vec{F} = \vec{F}_{pot} + \vec{F}_n$, a podobne pre momenty, dostaneme pre celkovú prácu

$$W = [K + U]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_n \cdot d\vec{r}^* - \int_{t_1}^{t_2} \vec{D}_n^* \cdot d\vec{\omega} \tag{116}$$

kde $K + U$ je súčet *kinetickej a potenciálnej energie* i.t.t.

$$K + U = \frac{1}{2} M |\vec{v}^*|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\vec{I}}^* \cdot \vec{\omega} + U(\vec{r}, \phi) \tag{117}$$

- Odvodenie vzťahu (109) s vyjadredním (117) Dosadíme vyjadrenia pre potenciálové sily a momenty do pohybových rovníc (110) a (111), a následným prenásobením prvej s $\vec{v}^*(t)$ a druhej s $\vec{\omega}(t)$ a preintegrivaním cez čas od $t = t_1$ po $t = t_2$ máme

$$\int dt \vec{v}^* \cdot m \frac{d}{dt} \vec{v}^* + \int d\vec{r}^* \cdot \nabla U - \int d\vec{r}^* \cdot \vec{F}_n \quad = \quad \int d\vec{r}^* \cdot \vec{F}_e \tag{118}$$

$$\int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^* \cdot \vec{v}^* \right) + [U(\vec{r})]_{\vec{r}^*(t_1)}^{\vec{r}^*(t_2)} - W_n^* = W^* \tag{119}$$

a podobne pre 2. pohybovú rovnicu,

$$\int dt \vec{\omega} \cdot \frac{d}{dt} \vec{\vec{I}}^* \cdot \vec{\omega} + \int d\phi \frac{d}{d\phi} U(\phi) - \int dt \vec{\omega} \cdot \vec{D}_n \quad = \quad \int dt \vec{\omega} \cdot \vec{D}_e^* \tag{120}$$

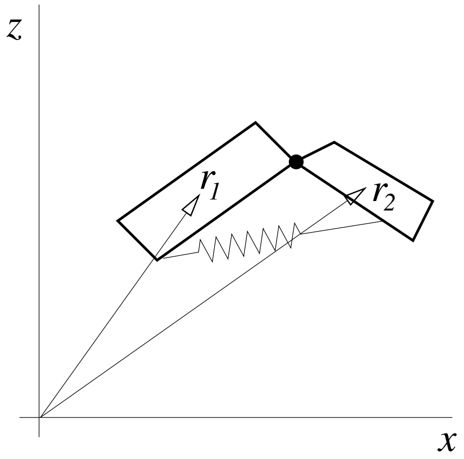
$$\int dt \sum_{ij} \omega_i(t) \frac{d}{dt} (I_{ij}^* \omega_j(t)) + [U(\phi)]_{\phi(t_1)}^{\phi(t_2)} - W_n^\phi = W^\phi \tag{121}$$

$$\int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \omega_i I_{ij}^* \omega_j \right) + [U(\phi)]_{\phi(t_1)}^{\phi(t_2)} - W_n^\phi = W^\phi \tag{122}$$

kde sme využili zápis vektora uhlovej rýchlosti a tenzora zotrvačnosti v súradnicovej sústave pevne spojenej s telesom, v ktorej sú komponenty I_{ij} nezávislé od času.

Kombináciou oboch upravených rovníc nájdeme výsledný vzťah,

$$W = W^* + W^\phi = 116 \tag{123}$$



Obr. 6: Koncová konfigurácia dvoch telies spojených otočným kĺbom a harmonickou pružinou.

- Rozšírenie na N telies: zavedieme index $\alpha = 1,...,N$

$$W = \sum_{\alpha} [K_\alpha + U_\alpha]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_n^{\alpha} \cdot d\vec{r}_\alpha^{*} - \int_{t_1}^{t_2} \vec{D}_n^{*,\alpha} \cdot \vec{\omega}_\alpha dt \tag{124}$$

kde *celková mechanická (kinetická a potenciálna) energia*

$$K + U = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} M_\alpha |\vec{v}_\alpha^{*}|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_\alpha \cdot \vec{\vec{I}}^{*}{}_\alpha \cdot \vec{\omega}_\alpha + U_\alpha(\vec{r}_\alpha, \phi_\alpha) \tag{125}$$

V prípade N telies je celková kinetická enegia súčtom kinetických energií jednotlivých telies. To isté sa nedá povedať o potenciálnej energii, pretože tá pochádza často aj z vzájomného pôsobenia rôznych itt na seba, napríklad keď sú dve itt spolejé harmonickou pružinou. Pri hľadaní výrazu pre celkovú potenciálnu energiu výhodne využívame nezávislosť potenciálnej energie od dráhy, akou sa daný systém N teslies do konfigurácie $\vec{r}_1^{*},...,\vec{r}_N^{*},\phi_1,\theta_1,\psi_1,...,\phi_N,\theta_N,\psi_N$ dostal.

Príklad Potenciálna energia dvoch telies na obrázku 6 vzhľadom na situáciu, keď obe telesá ležia vo výška $z_1^{*} = z_2^{*} = 0$ s uvoľnenou pružinou je

$$U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\phi_1,\phi_2) = m_1 g z_1^{*} + m_2 g z_2^{*} + \frac{1}{2} k (\Delta l)^2, \tag{126}$$

kde k je tuhosť pružiny a Δl je jej predĺženie, ktoré je potrebné vyjadriť pomocou uhlov natočenia telies ϕ_1 a ϕ_2. Evidentne, posledný člen nie je nejakým súčtom potenciálnych energií dvoch samostatných itt.