Najčastejšie konvencie pre uhly natočenia

Nech sústava O' s bázou vektorov $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ je natočená pomocou sérií rotácií vzhľadom na nehybnú sústavu O s bázou $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Sústava O' môže byť natočená ľubovoľne. Jej orientácia bude jednoznačne daná 3 uhlami ϕ, θ, ψ, tzv. *Eulerovými*, ktoré nám povedia, akými rotáciami dokážeme zorientovať sústavu O do O'. Sú viaceré konvencie, začneme s zxz.

1. Rotácia okolo e_3 o uhol ϕ tak aby e_1 ležal v rovine f_1, f_2
2. Rotácia okolo nového e_1 o θ tak aby nový e_2 tiež ležal v rovine f_1, f_2, alebo, čo je tomu ekvivalentné, aby e_3 bol paralelný s f_3.
3. Rotácia okolo nového $e_3 = f_3$ o ψ tak aby $e_1 = f_1$ a $e_2 = f_2$.

Z tohto je asi zrejmé, aká konvencia je zyz. V technických aplikáciach (roboty, lietadlá, satelity) sa ešte zvykne používať aj konvencia "Roll-Pitch-Yaw"(xyz) ktorá predstavuje zorientovanie špicu pôvodne v smere x (Yaw) otočením okolo z, nastavením stúpania (Pitch) otočením okolo novej osi y a nakoniec pootočenie okolo osi lietadla (roll) okolo novej osi x.

Vektor uhlovej rýchlosti pre gyroskop v sústave pevne spojenej s gyroskopom.

Celková uhlová rýchlosť otáčajúceho sa telesa pri zmene Eulerových uhlov zyz je daná súčtom troch vektorov uhlových rýchlostí patriacich k jednotlivým otáčaniam:

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\psi}}. \tag{33}$$

Každý z nich je zavedený v inak zrotovanej sústave. Pre počítanie s vektorom uhlovej rýchlosti v 2. pohybovej rovnici si ich musíme všetky vyjadriť v sústave pevne spojenej s gyroskopom.

Všeobecne, i-ty bázový vektor $\vec{f}_i$ vznikne rotáciami bázového vektora $\vec{e}_i$;

$$\vec{f}_i = \mathscr{T}^{\phi,\theta,\psi}[\vec{e}_i]. \tag{34}$$

Po častiach:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_i &= \mathscr{O}^{\phi,3}[\vec{e}_i] = \sum_j R^{\phi,3}_{ji} \vec{e}_j = R^{\phi,3}_{ji} \vec{e}_j && (35) \\ \vec{e}''_i &= \mathscr{O}^{\theta,2}[\vec{e}'_i] = \ldots && (36) \\ \vec{f}_i &= \mathscr{O}^{\psi,3}[\vec{e}''_i] && (37) \end{aligned}$$

Je dôležité si uvedomiť že v rôznych riadkoch ide o rotácie okolo rôznych osí “3” a “3”. Analogicky máme aj inverzné vzťahy:

$$\begin{aligned} \vec{e}_i &= \mathscr{O}^{-\phi,3}[\vec{e}'_i] && (38) \\ \vec{e}'_i &= \mathscr{O}^{-\theta,2}[\vec{e}''_i] && (39) \\ \vec{e}''_i &= \mathscr{O}^{-\psi,3}[\vec{f}_i] && (40) \end{aligned}$$

Hľadajme teda všeobecnejšie súradnice vektora $\vec{r}'$ ktorý vznikne 3 rotáciami z vektora $\vec{r} = x_i \vec{e}_i$, t.j. vieme ho zapísať vo finálnej a počiatočnej sústave ako

$$\vec{r}' = \begin{cases} x_i \vec{f}_i \\ x'_i \vec{e}_i \end{cases} \tag{41}$$

Skalárnym násobením s $\vec{e}_j$ nájdeme

$$x'_j = \vec{e}_j \cdot \vec{f}_i x_i, \tag{42}$$

alebo naopak skalárnym násobením s $\vec{f}_j$ nájdeme

$$x_j = \vec{f}_j \cdot \vec{e}_i x'_i. \tag{43}$$

Matica

$$T_{ji} = \vec{e}_j \cdot \vec{f}_i \tag{44}$$

teda predstavuje transformáciu súradníc vektora z finálnej do počiatočnej a jej inverzná matica je

$$T_{ji}^{-1} = T_{ij} = \vec{f}_j \cdot \vec{e}_i. \tag{45}$$

Túto maticu vieme nájsť nasledovne:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_i \cdot \vec{f}_j &= \mathscr{O}^{-\phi,3}[\vec{e}'_i] \cdot \vec{f}_j && (46)\\
&= R_{ki}^{-\phi,3} \vec{e}'_k \cdot \vec{f}_j && (47)\\
&= R_{ki}^{-\phi,3} R_{lk}^{-\theta,2} \vec{e}''_l \cdot \vec{f}_j && (48)\\
&= R_{ki}^{-\phi,3} R_{lk}^{-\theta,2} R_{ml}^{-\psi,3} \vec{f}_m \cdot \vec{f}_j && (49)\\
&= R_{ki}^{-\phi,3} R_{lk}^{-\theta,2} R_{jl}^{-\psi,3} && (50)\\
&= \sum_{lk} R_{jl}^{-\psi,3} R_{lk}^{-\theta,2} R_{ki}^{-\phi,3} && (51)
\end{aligned}$$

Posledný výraz daný ako maticové násobenie je

$$\begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0 \\ -s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

Naprv vyjadríme vektor $\vec{\dot{\phi}} = \dot{\phi}\vec{e}_3$ v sústave $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Pomocou posledne získanej transformácie cez všetku otočenia, rovnica 52, môžeme vyjadriť vektor $\vec{\dot{\phi}}$ v báze $\vec{f}_i$:

$$\vec{\dot{\phi}} = -c\psi s\theta \dot{\phi} \vec{f}_1 + s\psi s\theta \dot{\phi} \vec{f}_2 + c\theta \dot{\phi} \vec{f}_3 \tag{53}$$

alebo pre vektor $\vec{\dot{\theta}} = \dot{\theta}\vec{e}'_2$

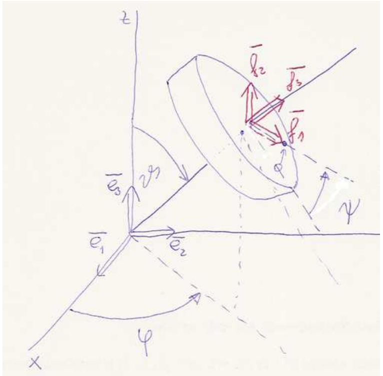
$$\begin{aligned}
\vec{e}'_2 \cdot \vec{f}_j &= \sum_l R_{jl}^{-\psi,3} R_{l2}^{-\theta,2} && (54)\\
\vec{\dot{\theta}} &= s\psi \dot{\theta} \vec{f}_1 + c\psi \dot{\theta} \vec{f}_2. && (55)
\end{aligned}$$

Nakoniec napíšme vektor zodpovedajúci otáčaniu okolo uhla ψ čo je jednoducho

$$\vec{\dot{\psi}} = \dot{\psi} \vec{f}_3. \tag{56}$$

Celková uhlová rýchlosť otáčajúceho sa telesa pri zmene Eulerových uhlov bude potom (pomocou výsledkov 56,55,56)

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= -c\psi s\theta \dot{\phi} + s\psi \dot{\theta} && (57)\\
\omega_2 &= s\psi s\theta \dot{\phi} + c\psi \dot{\theta} && (58)\\
\omega_3 &= c\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}. && (59)
\end{aligned}$$



Obrázok 4: Gyroskop predstavuje zotrvačník s jedným pevným bodom. Uhly ϕ, θ, ψ sú tri Eulerove uhly typu *zyz*.

2.8 Eulerove pohybové rovnice gyroskopu: otáčanie okolo fixovaného bodu

Uvažujme prípad otáčania telesa okolo jedného fixovaného bodu, rôzneho od ťažiska (aby gravitačné sily spôsobili nenulový moment síl). Potom inerciálny člen v 2. pohybovej rovnici i.t.t. (12) môžeme potom napísať v sústave pevne spojenej s i.t.t. a orientovanej tak, že tenzor zotrvačnosti je v nej diagonálny, v tvare

$$\frac{d}{dt}(\sum_i \vec{f}_i I_{ii}\omega_i) = \sum_j D_j \vec{f}_j \tag{60}$$

Pretože jednotkové vektory $\vec{f}_i$ sa otáčajú, platí pre ne

$$\frac{d}{dt}\vec{f}_i = \vec{\omega} \times \vec{f}_i$$

čo vedie na

$$\sum_i \left(\vec{f}_i I_{ii}\dot{\omega}_i + \vec{\omega} \times \vec{f}_i I_{ii}\omega_i \right) = \sum_j D_j \vec{f}_j \tag{61}$$

prenásobením postupne skalárne s $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ dostaneme 3 Eulerove pohybové rovnice otáčajúceho sa i.t.t.

$$I_{11}\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) = D_1 \tag{62}$$
$$I_{22}\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I_1 - I_3) = D_2 \tag{63}$$
$$I_{33}\dot{\omega}_3 + \omega_3\omega_1(I_1 - I_3) = D_3 \tag{64}$$

t.j. systém troch *nelineárnych* diferenciálnych rovníc ktoré musíme riešiť spolu s tromi *nelineárnymi* diferenciálnymi rovnicami pre Eulerove uhly popisujúce orientáciu i.t.t., (57), (58) a (59). Toto predstavuje druhý systém 6 nelineárnych diferenciálnych rovníc. Táto cesta je v jednoduchých prípadoch užitočná, ale vidíme že musíme najprv nájsť $\omega_i(t)$, t.j. spočítať funkcie, ktoré vlastne nepotrebujeme. Naviac, čím z viacerých i.t.t. sa bude robot či manipulátor skladať, tým viac nepotrebných funkcií musíme spočítať. Tento problém obchádza prístup pomocou Lagrangeových rovníc ku ktorému sa čoskoro dostaneme, a v rámci ktorého sformulujeme aj pohybové rovnice gyroskopu a pár manipulátorov.
Kontrolná otázka: Aké zložky má moment gravitačnej sily D_i? Pomôcka: $\vec{D} = mg\vec{f}_3 \times \vec{e}_3$