25/11/2008

1. Akú prácu vykoná motor ak otočí rameno okolo horitontálnej osi z dolnej (stabilnej) polohy do hornej (nestabilnej) polohy za čas T? Rameno má moment zotrvačnosti okolo tejto osi I, hmotnosť m a vzdialenosť ťažiska od osi otáčania je l. Otáčanie je pritom brzdené lineárnym trením s koeficientom trenia κ a motor počas celkového pohybu, prvú polovicu času roztáča tyč rovnomerne zrýchlene a drúhú polovicu času ju rovnomerne spomaľuje, t.j. $\alpha(t) = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$ pre $t \in (0, T/2)$ a $\alpha = \alpha_1 + \omega_1(t - T/2) - \frac{1}{2}\varepsilon_1(t - T/2)^2$. Ako musí závisieť moment sily od času?
Re: Pre fyzikálne realistickú trajektóriu musí platiť

$$\begin{aligned}
\alpha(0) = 0 \quad &, \quad \alpha(T) = \pi && (7)\\
\dot{\alpha}(0) = 0 \quad &, \quad \dot{\alpha}(T) = 0 && (8)\\
\ddot{\alpha}(0...T/2) = \varepsilon \quad &, \quad \ddot{\alpha}(T/2...T) = \varepsilon_1 && (9)\\
\alpha(T/2 - 0) \quad &= \quad \alpha(T/2 + 0) && (10)\\
\dot{\alpha}(T/2 - 0) \quad &= \quad \dot{\alpha}(T/2 + 0) && (11)
\end{aligned}$$

z čoho nájdeme $\alpha_1 = (1/2)\varepsilon(T/2)^2$, $\omega_1 = \varepsilon T/2$, $\varepsilon = \varepsilon_1$ a $\varepsilon = 4\pi/(T^2)$. Prácu nájdeme z Lagrangeovej rovnice rovnice

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = D^{\kappa} + D^{motor}$$

t.j.

$$W = \int_0^T dt \dot{\alpha}(t) D^{motor}(t) = \int_0^T dt \dot{\alpha}(t) \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} - D^{\kappa} \right) = 2mgl + \kappa \frac{4\pi^2}{3T}$$

pričom $D^{\kappa} = -\kappa\dot{\alpha}$, $L = (1/2)I\dot{\alpha}^2 + mgl\cos(\alpha)$.