Úvod do mezoskopickej fyziky

M. Moško a A. Mošková

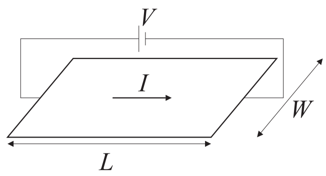
Elektrotechnický ústav SAV, Bratislava

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Mezoskopická fyzika, mezoskopický systém.



Uvažujme dvojrozmernú vodivú platničku s makroskopickými rozmermi W, L. Konduktancia (vodivosť) vzorky je daná Ohmovým zákonom

$$\frac{I}{V} \equiv G = \frac{\sigma W}{L}, \tag{1.1}$$

kde σ je merná vodivosť. Je to materiálový parameter závisiaci napr. od hmotnosti a koncentrácie elektrónov, od ich relaxačného času, ale *nezávisí od* W *a* L.

Mezoskopická fyzika si kladie otázku, čo sa bude diať s G, keď budeme rozmery W a L zmenšovať tak, že sa stanú porovnateľné alebo menšie ako niektorá z týchto charakteristických dĺžok:

λ_F = Fermiho vlnová dĺžka vodivostných elektrónov,

L_{mean} = stredná voľná dráha elektrónu,

L_φ = koherenčná dĺžka elektrónu resp. stredná voľná dráha elektrónu medzi dvomi nepružnými zrážkami.

V prednáške ukážeme, že pre takéto tzv. mezoskopické vodiče neplatí klasický Ohmov zákon $G = \sigma W/L$, ale kvantové transportné zákony demonštrujúce vlnovú povahu elektrónov.

Zhrnuté všeobecnejšie, mezoskopickými systémami nazývame objekty s elektrónovou vodivosťou, ktorých rozmery sú menšie ako koherenčná dĺžka, stredná volná dráha alebo Fermiho vlnová dĺžka vodivostných elektrónov. Tieto objekty môžu byť(a zvyčajne aj sú) makroskopické (zložené z obrovského počtu atómov), v ich makroskopických elektrických vlastnostiach (konduktancia, rezistencia, ...) sa však zásadným spôsobom prejavujú zákony mikrosveta, tj. zákony kvantovej fyziky. Výraz *mezo* sa tu zavádza na odlíšenie od *makro* ale aj od *mikro*.

Typické rozmery jednotlivých charakteristických dĺžok sa dajú zhrnúť nasledovne:

1mm: L_{mean} v režime kvantového Hallovho javu,

10 – 100 μm: L_{mean} a L_φ v polovodičoch s vysokou pohyblivosťou elektrónov pre $T < 4$ K,

100 nm – 1 μm: L_{mean} a L_φ v komerčných polovodičových súčiastkach,

10 – 100 nm: λ_F v polovodičoch a L_{mean} v kovoch,

1 nm: λ_F v kovoch,

0,1 nm: medziatómová vzdialenosť.

1.2 Aproximácia efektívnej hmotnosti pre masívny kryštál

Mezoskopické systémy definované s atomárnou presnosťou je dnes možné pripraviť najmä na báze polovodičov GaAs a AlGaAs. Kvôli jednoduchosti v ďalšom budeme často uvažovať práve takéto mezoskopické systémy. Z našich úvah však bude zrejmé, že získané výsledky platia aj pre mezoskopický systém z ľubovolného iného materiálu, t.j. ľubovolného polovodiča alebo normálneho kovu. Supravodivé mezoskopické systémy v prednáške neuvažujeme.

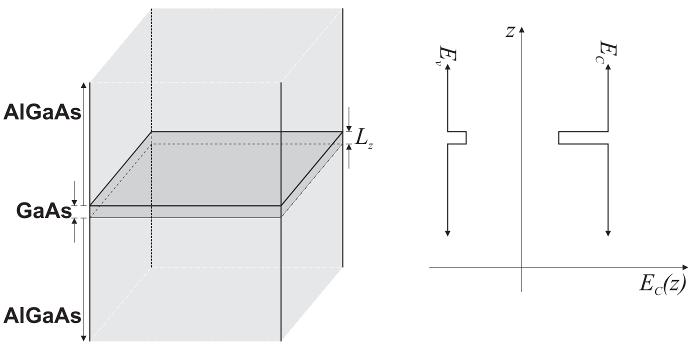
Uvažujme najprv masívny polovodič. Elektróny v jeho vodivostnom páse nech popisuje Schrödingerova rovnica

$$\left[E_C + \frac{(-i\hbar\nabla + e\vec{A})^2}{2m} + U(\vec{r})\right] \Psi(\vec{r}) = E\,\Psi(\vec{r}), \tag{1.2}$$

kde $\vec{A}$ je vektorový potenciál, E_C je dno vodivostného pásu, m a $-e$ sú efektívna hmotnosť a náboj elektrónu, $U(\vec{r})$ je potenciálna energia od priestorových nábojov, hradiel a iných vonkajších polí a E je vlastná hodnota energie elektrónu. Veličina E_C môže závisieť od súradnice, napr. diskontinuita ΔE_C na prechode GaAs–AlGaAs, znázornená na obr. 1.1.

Rovnica (1.2) sa zvykne nazývať aj aproximácia efektívnej hmotnosti. Nevystupuje v nej totiž periodický potenciál kryštalickej mriežky, ktorého vplyv je "schovaný"v efektívnej hmotnosti elektrónu. Vďaka tomu pre $\vec{A} = 0$, $U(\vec{r}) = 0$ a $E_C = \mathrm{const}$ dostaneme ako riešenie rovinnú vlnu

$$\Psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}.\vec{r}}, \tag{1.3}$$



Obr. 1.1: Priebeh dna vodivostného (E_C) a vrcholu valenčného pásu (E_ν) v tenkej vrstve GaAs zovretej dvomi polonekonečnými AlGaAs vrstvami. Vrstva GaAs je pre vodivostné elektróny potenciálovou jamou, pre Al$_x$Ga$_{1-x}$As s $x \approx 0.3$ je asi 0.3 eV hlboká.

inak by to bola z kurzu tuhých látok známa Blochova funkcia $\Psi(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}}$. Aproximácia efektívnej hmotnosti vynikajúco platí pre väčšinu mezoskopických systémov, s ktorými sa budeme zaoberať. Používame ju však len preto, že zjednodušuje výklad. Z našich odvodení bude zrejmé, že rovnaké výsledky by sme (ťažkopádnejším spôsobom) dostali aj bez tejto aproximácie.

1.3 Dvojdimenzionálny (2D) plyn

Moderné technológie umožňujú narásť veľmi tenkú (ak treba, aj atomárne tenkú) vrstvu GaAs, vloženú medzi dve hrubé AlGaAs vrstvy. Toto je znázornené na obr.1.1, ktorý ukazuje aj priebeh dna vodivostného pása $E_C(z)$ v smere kolmom na rozhranie vrstiev. Vidno, že GaAs vrstva predstavuje pre elektróny pravouhlú potenciálovú jamu. Ak sa GaAs vrstva pripraví ako intrinzická a AlGaAs vrsty sa vhodne nadotujú na vrstvy n-typu, elektróny "spadnú"z AlGaAs vrstiev do potenciálovej jamy v GaAs vrstve. Stratia tak možnosť pohybu v smere osi z a vzniká tzv. dvojdimenzionálny (2D) elektrónový plyn. Tento plyn existuje aj pri nulovej teplote, takže pôvodne intrinzická GaAs vrstva sa z hladiska elektrónovej vodivosti chová ako 2D kov.

Elektróny v GaAs vrstve sú teda voľné v rovine x-y a uväznené v smere z potenciálom $E_C(z)$, ako je znázornené na obr. 1.2. Ak uvažujeme magnetické pole $\vec{B} = (0, 0, B)$, vektorový potenciál $\vec{A}$ môžeme vždy vybrať tak, že má nulovú zložku A_z a nie je funkciou súradnice z. Ak naviac predpokladáme, že ani potenciál $U(\vec{r})$ nezávisí od súradnice z, riešenie rovnice (1.2) môžeme zapísať ako

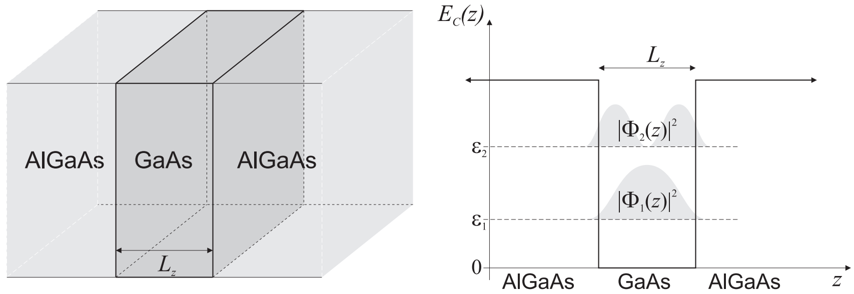
$$\Psi(x, y, z) = \Psi(x, y)\Phi(z). \tag{1.4}$$

Po dosadení tohto riešenia sa rovnica (1.2) rozdelí na dve vzájomne nezávislé rovnice

$$\left[\frac{(-i\hbar\nabla + e\vec{A})^2}{2m} + U(x, y)\right] \Psi(x, y) = \epsilon\, \Psi(x, y), \quad \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1.5}$$

a

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + E_C(z)\right] \Phi_n(z) = E_n\, \Phi_n(z), \tag{1.6}$$



Obr. 1.2: Znázornenie potenciálu viažúceho vodivostné elektróny v tenkej (2D) GaAs vrstve zovretej dvoma polonekonečnými AlGaAs vrstvami. Dno vodivostného pásu v GaAs, E_c, je tu nulovou hladinou energie (pozri tiež obr. 1.1).

kde

$$E = E_n + \epsilon \tag{1.7}$$

a n je kvantové číslo. Ak napríklad aproximujeme $E_C(z)$ ako nekonečne hlbokú pravouhlú potenciálovú jamu v GaAs, t.j. $E_c = 0$ v GaAs vrstve ($0 < z < L_z$) a $E_c \to \infty$ v AlGaAs vrstvách, dostaneme

$$\Phi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin\left(n\frac{\pi z}{L_z}\right), \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(n\frac{\pi}{L_z}\right)^2, \tag{1.8}$$

kde $n = 1, 2, \ldots$. Na obr. 1.2 je znázornené typické $\Phi_n(z)^2$ pre $n = 1$ a 2.

Vhodným dotovaním sa dá nastaviť, že je okupovaný len prvý subpás, E_1. Vtedy, ak je GaAs vrstva veľmi tenká, môžeme smer z jednoducho ignorovať a namiesto (1.2) rovno písať dvojrozmernú Schrödingerovu rovnicu

$$\left[E_S + \frac{(-i\hbar\nabla + e\vec{A})^2}{2m} + U(x,y)\right]\Psi(x,y) = E\,\Psi(x,y), \quad \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1.9}$$

kde $E_S = E_C + E_1$ a E_C teraz označuje dno vodivostného pása v GaAs vrstve. Túto rovnicu budeme neskôr riešiť pre nenulové $\vec{B}$ a pre rôzne prakticky dôležité potenciály $U(x,y)$. Pre $\vec{A} = 0$ a $U(\vec{r}) = 0$ je jej riešením vlnová funkcia

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} e^{ik_x x} e^{ik_y y}, \tag{1.10}$$

a energia

$$E = E_S + \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2) = E_S + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \tag{1.11}$$

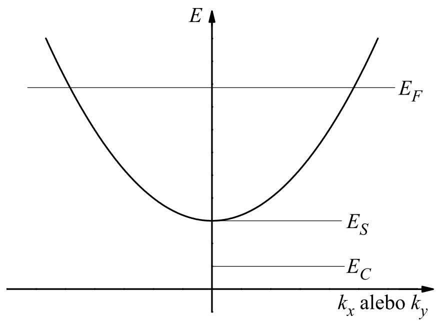
teda vzťahy charakteristické pre ideálny 2D plyn častíc voľných v smeroch x a y. Disperzný zákon (1.11) je schématicky ukázaný na obr. 1.3. Pre vlnovú funkciu požadujeme splnenie Born–vonKarmanových hraničných podmienok $\Psi(x + L_x, y) = \Psi(x,y)$ a $\Psi(x, y + L_y) = \Psi(x,y)$. Odtiaľ

$$k_x = n_x \frac{2\pi}{L_x}, \qquad k_y = n_y \frac{2\pi}{L_y}, \tag{1.12}$$

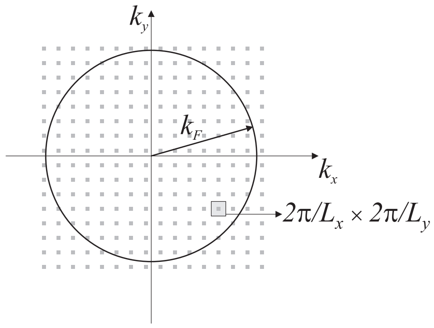
kde $n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ a $n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Prefaktor $1/\sqrt{L_x L_y}$ pochádza z normovacej podmienky $\int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy |\Psi(x,y)|^2 = 1$. Ako je znázornené na obrázku 1.4, na jeden stav $\vec{k}$ pripadá v $\vec{k}$ priestore plocha $\frac{2\pi}{L_x}\frac{2\pi}{L_y}$. Odtiaľ dostaneme, že hustota dovolených hodnôt $\vec{k}$ (alebo hustota stavov) v $\vec{k}$ priestore je

$$\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L_x}\right)\left(\frac{2\pi}{L_y}\right)} = \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2}\,. \tag{1.13}$$

Často potrebujeme poznať počet dovolených stavov $\vec{k}$ v diferenciálnej ploche $dk_x dk_y$. Ten dostaneme vynásobením hustoty stavov (1.13) plochou $dk_x dk_y$.



Obr. 1.3: Disperzný zákon 2D elektrónov (vzťah (1.11) pre $n = 1$).



Obr. 1.4: Znázornenie 2D stavov v k–priestore.

1.4 Jednodimenzionálny (1D) plyn, 1D subpásy, kvantový drôt

Pre 2D elektróny v rovine (x, y) platí Schrödingerova rovnica

$$\left[E_S + \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla + e\vec{A})^2 + U(y)\right]\Psi(x,y) = E\,\Psi(x,y), \tag{1.14}$$

kde potenciál $U(y)$ je teraz väzobný potenciál ohraničujúci 2D elektróny vo vzorke konečnej šírky (obr. 1.5). Magnetické pole $\vec{B} = (0, 0, B)$, ktoré je popísané vektorovým potenciálom

$$\vec{A} = -By\vec{x} \Longrightarrow A_x = -By,\ A_y = 0, \tag{1.15}$$

umožňuje prepísať (1.14) ako

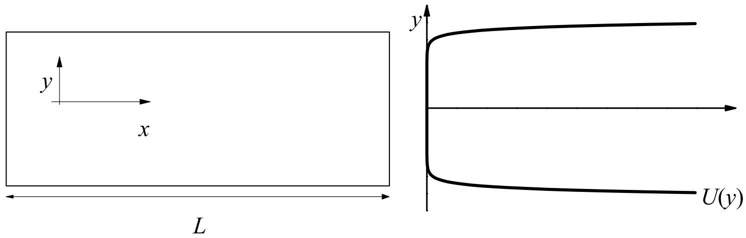
$$\left[E_S + \frac{(p_x - eBy)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + U(y)\right]\Psi(x,y) = E\,\Psi(x,y), \tag{1.16}$$

kde

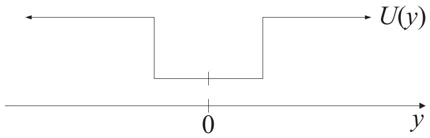
$$p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \qquad p_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}. \tag{1.17}$$

Riešenie hľadáme v tvare

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{L}}\,e^{ikx}\chi(y), \tag{1.18}$$



Obr. 1.5: Schematické znázornenie priebehu väzobného potenciálu na hranách 2D vzorky konečnej šírky.



Obr. 1.6: Väzobný potenciál ako pravouhlá jama.

kde index x pri L a k vynechávame. Dosadením do (1.16) po úprave dostaneme

$$\Big[E_S + \frac{(\hbar k - eBy)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + U(y)\Big]\chi(y) = E\,\chi(y). \tag{1.19}$$

Zaujímame sa o vlnové funkcie $\chi(y)$ a vlastné energie E pre dostatočne realistické $U(y)$. Ak zvolíme

$$U(y) = \frac{1}{2}\,m\omega_0^2 y^2, \tag{1.20}$$

kde ω_0 je parameter, dostaneme analytické riešenia. Prípad $B \neq 0$ budeme uvažovať neskôr. Ak $B = 0$, rovnica (1.19) dá

$$\Big[E_S + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}\,m\omega_0^2 y^2\Big]\chi(y) = E\,\chi(y). \tag{1.21}$$

Formálne je to rovnica harmonického oscilátora, takže vlastné energie a vlastné funkcie sú

$$E_n(k) = E_S + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\hbar\omega_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.22}$$

a

$$\chi_n(y) = \Big(\frac{m\omega_0}{\hbar}\Big)^{1/4}\Big(2^n n!\sqrt{\pi}\Big)^{-1/2} e^{-q^2/2} H_n(q), \qquad q = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\,y, \tag{1.23}$$

kde index y pri n vynechávame a $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$ je n-tý Hermitov polynóm spĺňajúci vzťah ortogonality $\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}$.

Analyticky je riešiteľný aj prípad potenciálu na obr. 1.6, ktorý zodpovedá technológii „leptaného drôtu“. V tomto prípade a v priblížení nekonečne hlbokej potenciálovej jamy má rovnica (1.19) pre $B = 0$ riešenie

$$E_n(k) = E_S + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\pi n}{L_y}\Big)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad , \tag{1.24}$$

a

$$\chi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{L_y}}\,\sin\Big[\frac{\pi n}{L_y}\,(y - \frac{L_y}{2})\Big]. \tag{1.25}$$

V obidvoch prípadoch je pohyb elektrónu voľný iba v smere x, zatiaľ čo v smere y sú vlnové funkcie lokalizované podobne ako priečne módy svetla vo vlnovode. Každému módu prislúcha energetický subpás $E_n(k)$, nazývaný jednorozmerný kanál. Elektróny v subpáse n sa pohybujú v smere x rýchlosťou

$$v_n(k) = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial}{\partial k}\,E_n(k) = \frac{\hbar k}{m}. \tag{1.26}$$

Keďže sú v smeroch y a z lokalizované, hovoríme o jednodimenzionálnom (1D) elektrónovom plyne resp. o 1D vodiči. Táto terminológia sa používa najmä ak elektróny okupujú len najnižší subpás. Ak okupujú viac subpásov, zvykne sa hovoriť aj o kvázi – 1D plyne. Ekvivalentne sa používajú aj pojmy 1D vodič (1D drôt) a kvázi – 1D vodič (kvázi – 1D drôt). Ak je y–ový rozmer porovnateľný s λ_F, hovorí sa aj o kvantovom drôte.

Kapitola 2

Vodivosť balistického vodiča

2.1 Fundamentálne kvantovanie balistickej vodivosti

Ak sa elektróny pohybujú vo vodiči bez zrážok, hovoríme o balistickom transporte a o balistickom vodiči. Pohyb je balistický, ak $W, L < L_{\rm mean}, L_\varphi$. Na obr. 2.1 je balistický 1D vodič napájaný vonkajším napätím V. Pre takýto vodič sú na obr. 2.2 schématicky ukázané disperzný zákon a obsadenie elektrónových stavov pri nulovej teplote. Obsadené stavy sú znázornené plnými krúžkami. Stavy s $k > 0$ sú obsadené po Fermiho energiu $E_F + \delta\mu$, pretože elektróny v týchto stavoch pochádzajú z rovnovážnej distribúcie v ľavom rezervoári. Stavy s $k < 0$ sú z podobných dôvodov obsadené len po Fermiho energiu pravého rezervoáru, E_F. Očividne, táto jednoduchá schéma obsadenia 1D stavov platí len pre *stacionárny bezzrážkový* transport. Vďaka nej je výpočet vodivosti jednoduchý. Elektrón s impulzom k v subpáse n nesie prúd

$$\frac{ev_n(k)}{L} = \frac{e}{L}\frac{1}{\hbar}\frac{\partial}{\partial k}E_n(k). \tag{2.1}$$

Keď sčitame prúdy, ktoré nesú všetky elektróny s energiami $E_n(k) \le E_F$, dostaneme nulu, pretože $v_n(k) = -v_n(-k)$. Z obrázku 2.2 je zrejmé, že nenulový súčet prúdov dajú len stavy s energiami $E_F < E_n(k) \le E_F + \delta\mu$. Pre tieto energie sú totiž obsadené len stavy s kladnými hodnotami k. Celkový prúd tečúci v subpáse n je preto

$$I_n = \sum_{k=k_n(E_F)}^{k_n(E_F+\delta\mu)} \frac{1}{L}\frac{e}{\hbar}\frac{\partial E_n(k)}{\partial k} = 2\frac{L}{2\pi}\int_{k_n(E_F)}^{k_n(E_F+\delta\mu)} dk \frac{1}{L}\frac{e}{\hbar}\frac{\partial E_n(k)}{\partial k}, \tag{2.2}$$

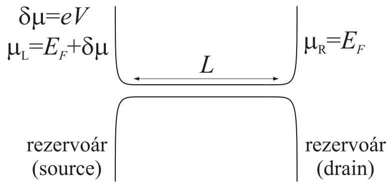
kde $k_n(E_F)$ je dané rovnicou

$$E_F = E_n(k_n) \tag{2.3}$$

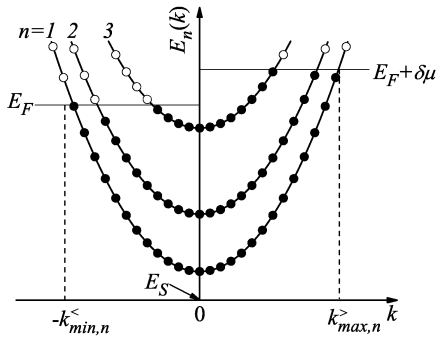
a sumuje sa cez kladné k v hraniciach od $k_n(E_F)$ po $k_n(E_F + \delta\mu)$. Z obr. 2.2 vidno, že $k_n(E_F)$ a $k_n(E_F+\delta\mu)$ sú hodnoty Fermiho impulzu v subpáse n pre elektróny idúce zprava doľava resp. zľava doprava. Prejdime od integrovania cez premennú k ku integrovaniu cez premennú $\varepsilon \equiv E_n(k)$. Vtedy

$$I_n = \frac{e}{\pi\hbar}\int_{k_n(E_F)}^{k_n(E_F+\delta\mu)} dk \frac{\partial E_n(k)}{\partial k} = \frac{e}{\pi\hbar}\int_{E_F}^{E_F+\delta\mu} d\varepsilon = \frac{e\,\delta\mu}{\pi\hbar} = \frac{2e^2}{h}V, \tag{2.4}$$

kde $\delta\mu = eV$. Pri prechode k integračnej premennej ε zmizla závislosť na tvare funkcie $E_n(k)$. V 1D je totiž $dk = (dk/d\varepsilon)d\varepsilon$, takže $dk(\partial\varepsilon/\partial k) = d\varepsilon(\partial\varepsilon/\partial k)(\partial k/\partial\varepsilon) = d\varepsilon$. Výsledok teda platí pre ľubovoľné $E_n(k)$, t.j. pre ľubovoľný kryštalický materiál.



Obr. 2.1:



Obr. 2.2:

Celkový prúd 1D vodičom je $I = \sum_{n=1}^{N} I_n$, kde N je počet obsadených subpásov. Pre vodivosť dostávame, že

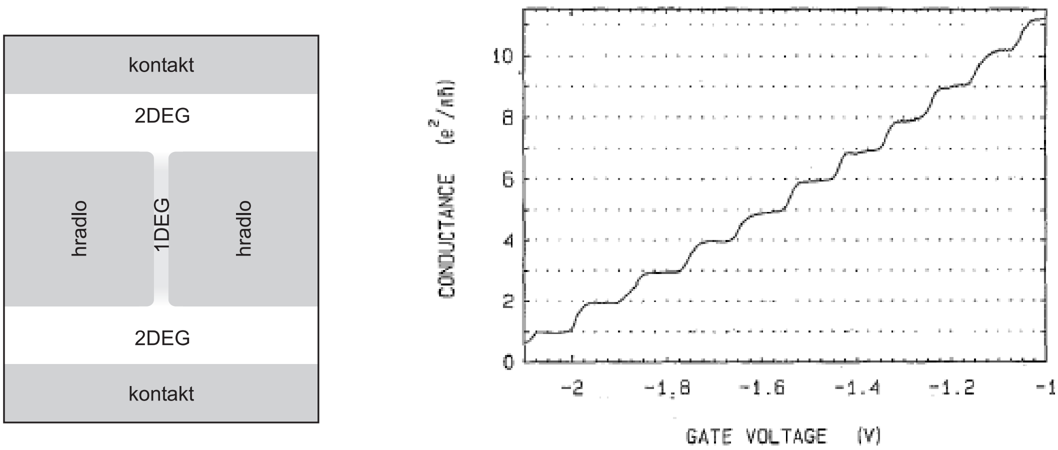
$$G = \frac{I}{V} = \frac{1}{V}\sum_{n=1}^{N} \frac{2e^2}{h} V = \frac{2e^2}{h} N. \tag{2.5}$$

Balistická vodivosť je kvantovaná, kvantum vodivosti je fundamentálna konštanta $2e^2/h$.

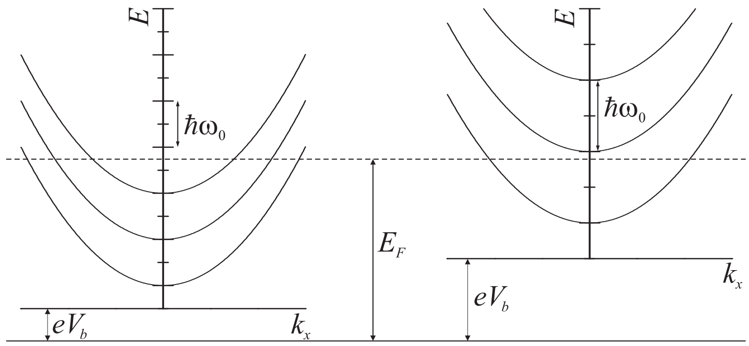
2.2 Meranie fundamentálneho kvantovania vodivosti

Vzťah (2.5) bol experimentálne overený, ako je ukázané na obr. 2.3. Ľavý panel ukazuje, ako sa vytvorí 1D plyn. Tesne nad 2D plyn sa umiestnia hradlá – kovové elektródy elektricky odizolované od 2D plynu. Záporné napätie na hradlách vytlačí spod nich 2D elektróny a medzi hradlami zostane 1D plyn. Meria sa potenciálový rozdiel medzi 2D rezervoármi pri známom prúde. Zväčšovaním záporného napätia na hradlách sa mení (zmenšuje) N a nameraná vodivosť 1D plynu sa mení ako predpovedá vzťah (2.5) [viď pravý panel obr. 2.3]. Napätie na hradlách vytvára medzi hradlami (v modelovej aproximácii) väzobný potenciál

$$U(y) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 y^2 + eV_b, \tag{2.6}$$



Obr. 2.3: Meranie vodivosti, B. van Wees *et. al.*, Phys. Rev. Lett. 1988.



Obr. 2.4:

kde ω_0 určuje silu väzby a eV_b je elektrostatická potenciálna energia medzi hradlami, spôsobená hradlovým napätím. V tomto modeli nájdeme pomocou obrázku 2.4, že

$$N = \text{Int}\left[\frac{E_F - eV_b}{\hbar\omega_0} - \frac{1}{2}\right]. \tag{2.7}$$

Zväčšovaním záporného napätia na hradlách sa zväčšuje ω_0 aj eV_b a klesá hodnota N. Toto je znázornené na obr. 2.4.

2.3 Fundamentálne kvantovanie balistickej magnetovodivosti

Riešme znovu rovnicu (1.19) pre modelový potenciál

$$U(y) = \frac{1}{2}\, m\omega_0^2 y^2, \tag{2.8}$$

teraz však aj s nenulovým magnetickým polom. Prepíšeme ju do tvaru

$$\left[\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\omega_C^2 (y-Y)^2 + \frac{1}{2}\, m\omega_0^2 y^2\right] \chi(y) = E\, \chi(y), \tag{2.9}$$

kde

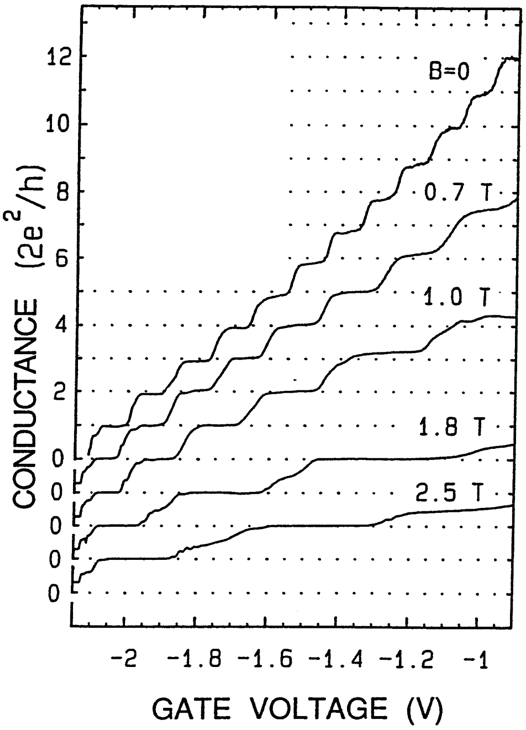
$$Y = \frac{\hbar k}{eB}, \tag{2.10}$$

$\omega_C = eB/m$ a E_S sme položili rovné nule. Rovnica (2.9) sa dá ďalej prepísať ako

$$\left[\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\, \frac{\omega_0^2\omega_C^2}{\omega_{C0}^2}\, Y^2 + \frac{1}{2}\, m\omega_{C0}^2 \big(y - \frac{\omega_C^2}{\omega_{C0}^2}\, Y\big)^2\right] \chi(y) = E\, \chi(y)\,. \tag{2.11}$$

kde $\omega_{C0}^2 = \omega_C^2 + \omega_0^2$. Druhý člen v hamiltoniáne (2.11) nezávisí od premennej y, tretí člen má tvar potenciálu harmonického oscilátora. Riešenia takéhoto problému sú známe, takže môžme písať

$$E_n(k) = \frac{1}{2}\, m\, \frac{\omega_0^2\omega_C^2}{\omega_{C0}^2}\, Y^2 + \big(n + \frac{1}{2}\big)\, \hbar\omega_{C0} = \frac{\hbar^2 k^2}{2\, m}\, \frac{\omega_0^2}{\omega_{C0}^2} + \big(n + \frac{1}{2}\big)\, \hbar\omega_{C0} \tag{2.12}$$



Obr. 2.5: Kvantovanie balistickej vodivosti v magnetickom poli, merané VanWeesom.

a

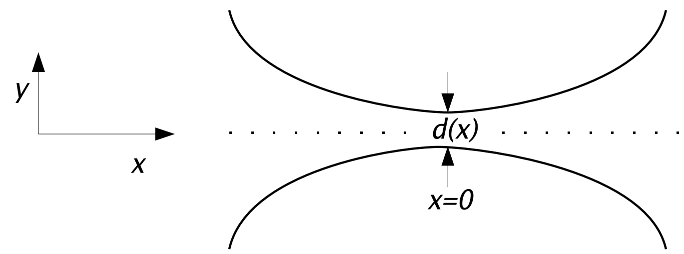
$$\chi_{n,k}(y) = \left(2^n n! \sqrt{\pi} l_{C0}\right)^{-1/2} H_n\Big(\frac{y - \frac{\omega_C^2}{\omega_{C0}^2} Y}{l_{C0}}\Big) \exp\Big[-\frac{(y - \frac{\omega_C^2}{\omega_{C0}^2} Y)^2}{2l_{C0}^2}\Big], \quad l_{C0} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{C0}}}, \tag{2.13}$$

kde H_n sú Hermitove polynomy definované v odseku 1.4 a l_{C0} je charakteristická dĺžka. Z rovnice (2.12) vidno, že $E_n(k)$ si zachovalo „subpásovú" štruktúru 1D elektrónov v kvantovom drôte, pričom elektrón v stave n, k sa pohybuje v smere osi x rýchlosťou

$$v_n(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial k} E_n(k) = \frac{\hbar k}{m} \frac{\omega_0^2}{\omega_{C0}^2}. \tag{2.14}$$

Vodivosť balistického 1D drôtu v magnetickom poli preto musí byť rovnaká ako bez magnetického poľa, t.j. $G = (2e^2/h)N$. Jeden zaujímavý rozdiel však predsa len vznikne. Magnetické pole ovplyvňuje medzisubpásovú medzeru $\hbar\omega_{C0}$ a preto aj hodnotu N. Ak vo formule (2.7) nahradíme $\hbar\omega_0$ za $\hbar\omega_{C0}$, vidíme, že $N(B) < N(0)$ pretože $\hbar\omega_{C0} > \hbar\omega_0$. Toto potvrdzuje aj experimentálny výsledok na obr. 2.5.

V limite $B \to 0$ rovnice (2.12), (2.13) a (2.14) dávajú obvyklé formuly pre 1D elektróny v kvantovom drôte. V limite $\omega_0 \to 0$, t.j. $V(y) = 0$, zase dostávame tzv. Landauove stavy 2D plynu v poli $(0, 0, B)$. Vtedy $l_{C0} \to \sqrt{\hbar/eB}$, $E_n(k) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_C$ a $v_n(k) = 0$. S Landauovymi stavmi sa stretneme pri kvantovom Hallovom jave.



Obr. 2.6: Kvantový bodový kontakt "hladko"pripojený na dva 2D rezervoáry

2.4 Kvantovanie vodivosti bodového kontaktu

V odseku 2.1 sme odvodili, že balistická vodivosť 1D drôtu je kvantovaná v jednotkách $2e^2/h$. V odvodení sme pohyb elektrónu pozdĺž drôtu popisovali vlnovou funkciou e^{ikx}, čo je zrejme v poriadku pre dlhý drôt. Pritom sme implicitne predpokladali, že keď je elektrón injektovaný do drôtu, tak prejde na druhý koniec a s istotou zmizne v druhom kontakte. Inými slovami, koniec drôtu neodrazí elektrón naspäť. Tento implicitný predpoklad kombinovaný s modelom dlhého drôtu nám umožnil vyhnúť sa analýze toho, ako elektrón prechádza z rezervoáru do drôtu resp. z drôtu do rezervoáru. Experiment však ukazuje, že balistická vodivosť je kvantovaná v jednotkách $2e^2/h$ aj vtedy,keď sa namiesto drôtu konečnej dĺžky použije tzv. kvantový bodový kontakt (obr. 2.6), čo je vlastne 1D drôt nulovej dĺžky. V tomto prípade vypadá vysvetlenie kvantovania balistickej vodivosti inak.

Uvažujme 2D Schrödingerovu rovnicu

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+V(x,y)\right]\Psi(x,y) \;=\; \epsilon\,\Psi(x,y) \quad , \tag{2.15}$$

kde $V(x,y)$ je laterálny potenciál definujúci kvantový bodový kontakt (obr. 2.6). Ak sa $V(x,y)$ mení s x pomaly, môžeme do (2.15) dosadiť $\Psi(x,y) \simeq \phi(x)\chi(x,y)$, pričom vo funkciách $\chi(x,y)$ a $V(x,y)$ považujeme x za parameter, nie za premennú. Z rovnice (2.15) sa ľahko oddelí Schrödingerova rovnica pre transverzálne vlnové funkcie $\chi_n(x,y)$,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+V(x,y)\right]\chi_n(x,y) \;=\; E_n(x)\,\chi_n(x,y) \quad , \tag{2.16}$$

kde $E_n(x)$ sú vlastné hodnoty energie v potenciáli $V(x,y)$. Pravdaže, $\chi_n(x,y)$ a $E_n(x)$ závisia od x. Napríklad, ak bodový kontakt definuje potenciál s nekonečne vysokými stenami, t.j.

$$V(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{pre}|y|<d(x)/2 \\ \infty & \text{pre}|y|\geq d(x)/2 \end{cases} \quad , \tag{2.17}$$

potom

$$\chi_n(x,y)=\sqrt{\frac{2}{d(x)}}\,\sin\left[\pi n\frac{\{y+d(x)/2\}}{d(x)}\right] \quad , \quad E_n(x) \;=\; \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\pi n}{d(x)}\right]^2 . \tag{2.18}$$

Presné riešenie rovnice (2.15) sa dá vyjadriť ako rozvoj

$$\Psi(x,y)=\sum_n \phi_n(x)\chi_n(x,y) \quad , \tag{2.19}$$

pretože vlnové funkcie $\chi_n(x,y)$ tvoria úplný systém. Dosaďme (2.19) do rovnice (2.15), vynásobme obidve strany rovnice funkciou $\chi_m^*(x,y)$ a integrujme cez všetky y. Dostaneme

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+E_m(x)-\epsilon\right\}\phi_m(x)=\sum_{\forall n\neq m}A_{nm}\,\phi_n(x)\quad , \tag{2.20}$$

kde A_{mn} je operátor

$$A_{nm}=\frac{\hbar^2}{2m}\left[\int dy\;\chi_m^*(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\chi_n(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\int dy\;\chi_m^*(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi_n(x,y)\right]\quad . \tag{2.21}$$

Pravá strana rovnice (2.20) popisuje väzbu medzi módmi n a m. Obsahuje len členy úmerné priestorovým gradientom v smere x, ktoré sú v adiabatickej aproximácii malé. Preto, v najnižšom ráde je $A_{mn}=0$ a rovnica (2.20) sa redukuje na

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+E_n(x)\right]\phi_n(x)=\epsilon\phi_n(x)\quad . \tag{2.22}$$

Vlnová funkcia pre pohyb v smere x, $\phi_n(x)$, je teda riešením 1D Schrödingerovej rovnice (2.22) s efektívnym potenciálom $E_n(x)$. Potenciál $E_n(x)$ je určený priestorovou závislosťou n-tej vlastnej hodnoty energie priečneho pohybu, t.j. je riešením rovnice (2.16).

Všimnime si, že rovnica (2.22) popisuje rozptyl 1D častice na potenciálovej bariére $E_n(x)$, ktorej výška má maximum práve v mieste bodového kontaktu. Napríklad, podľa rovnice (2.18) je energia $E_n(x)$ maximálna v bode $x=0$, pretože $d(x)$ má v $x=0$ minimum. Rozptyl popísaný rovnicou (2.22) môžeme analyzovať štandartným spôsobom. Uvažujme voľný elektrón v $x\to-\infty$, ktorý sa pohybuje zľava doprava v móde n. Pre jeho vlnovú funkciu a energiu očividne platia vzťahy

$$\phi_n(x\to-\infty)\propto e^{ik_x x}\quad ,\quad \epsilon(k_x)=\frac{\hbar^2k_x^2}{2m}\quad . \tag{2.23}$$

0značme symbolom $T_n(\epsilon)$ pravdepodobnosť, že elektrón prejde na druhú stranu bodového kontaktu a to isté označenie použime pre elektrón dopadajúci sprava doľava v $x\to\infty$.

Vyjadrime najprv $T_n(\epsilon)$ klasicky. Podľa klasickej fyziky sa cez bodový kontakt dostanú len tie elektróny, ktorých energia $\epsilon(k_x)$ je väčšia ako $E_n(x=0)$. Klasicky teda máme

$$\begin{aligned} T_n(\epsilon)&=1 \quad \text{pre} \quad \epsilon\geq E_n(x=0),\\ T_n(\epsilon)&=0 \quad \text{pre} \quad \epsilon< E_n(x=0), \end{aligned} \tag{2.24}$$

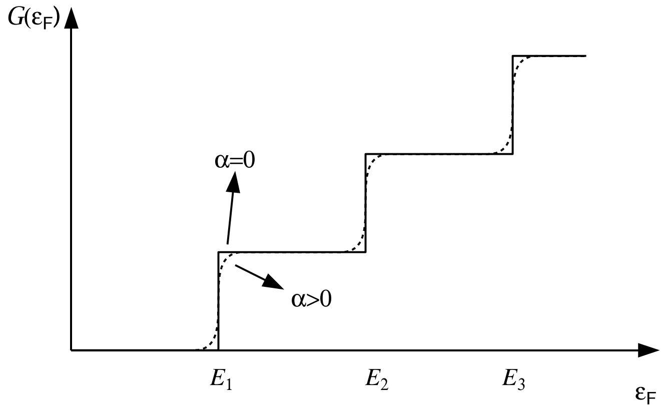
alebo

$$T_n(\epsilon)\;=\;\Theta\left(\epsilon-E_n(0)\right), \tag{2.25}$$

kde $\Theta(z)=1$ pre $z\geq0$ a $\Theta(z)=0$ pre $z<0$.

Prúd tečúci v móde n môžeme vyjadriť ako

$$\begin{aligned} I_n&=\frac{e}{L}\left\{\sum_{k_x>0}v_{n,k_x}\,T_n\left(\epsilon(k_x)\right)+\sum_{k_x<0}v_{n,k_x}\,T_n\left(\epsilon(k_x)\right)\right\}\\ &=e\frac{2}{2\pi}\left\{\int_{k_x>0}dk\,\frac{1}{\hbar}\frac{\partial\epsilon(k_x)}{\partial k_x}\,T_n\left(\epsilon(k_x)\right)+\int_{k_x<0}dk\,\frac{1}{\hbar}\frac{\partial\epsilon(k_x)}{\partial k_x}\,T_n\left(\epsilon(k_x)\right)\right\}\\ &=\frac{2e}{h}\int_{\mu_R}^{\mu_L}d\epsilon\,T_n(\epsilon)=\frac{2e}{h}\,T_n(\epsilon_F)\left[\mu_L-\mu_R\right], \end{aligned} \tag{2.26}$$



Obr. 2.7: Schématické znázornenie kvantovania vodivosti bodového kontaktu podľa diskusie v texte. V experimente je možné napr. meniť polohu Fermiho energie pomocou hradla. Vtedy sa môže namiesto Fermiho energie vynášať na os x napätie na hradle.

kde posledný vzťah na pravej strane platí pre $\mu_L - \mu_R << \mu_{L,R}$. Po dosadení $\mu_L - \mu_R = eV$ dostaneme pomocou rovnice (2.26) pre vodivosť bodového kontaktu vzťah

$$G = \frac{I}{V} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{V} = \frac{2e^2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\epsilon_F) \quad . \tag{2.27}$$

Ak dosadíme klasickú transmisiu (2.25), potom

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(\epsilon_F - E_n(0)) \tag{2.28}$$

a kvantovanie vodivosti je zrejmé. Ak $\epsilon_F < E_1(0)$, potom $G = 0$ pretože $\Theta = 0$ pre $\forall n$. Ak $E_1(0) < \epsilon_F < E_2(0)$, potom $\Theta = 1$ pre $n = 1$ a

$$G = \frac{2e^2}{h}(1 + 0 + 0 + \dots) = \frac{2e^2}{h} \times 1 \quad .$$

Ak $E_2(0) < \epsilon_F < E_3(0)$, potom

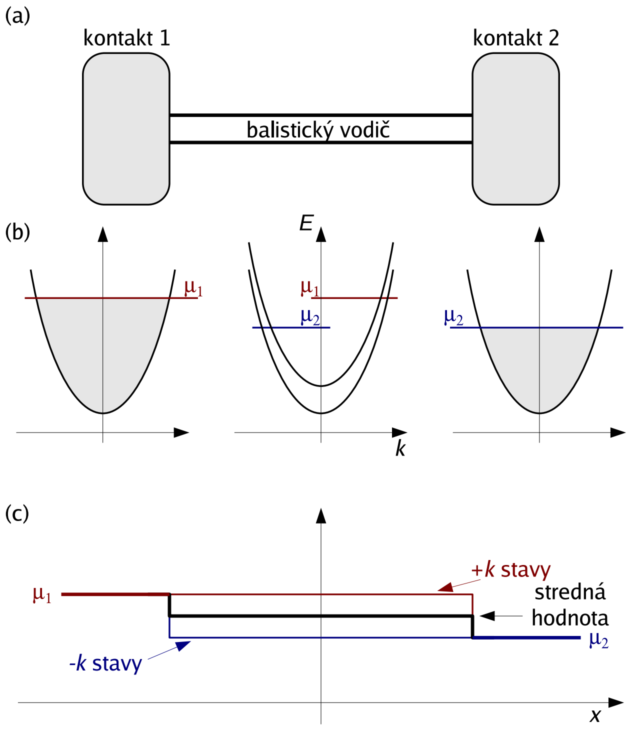
$$G = \frac{2e^2}{h}(1 + 1 + 0 + 0 + \dots) = \frac{2e^2}{h} \times 2$$

atď. Táto závislosť je znázornená na obrázku 2.7 plnou čiarou.

Namiesto klasického výrazu (2.25) by bolo možné pre konkrétny model bodového kontaktu odvodiť adekvátny kvantovomechanický výraz. Napríklad, ak pre malé x rozvinieme $E_n(x) \approx E_n(1 - \alpha x^2)$, kde $E_n = E_n(x = o)$, pre kvantovú transmisiu je možné odvodiť vzťah

$$T_n(\epsilon) = \frac{1}{1 + e^{-\beta_n[\epsilon - E_n]}} \; , \quad \beta_n = \sqrt{\frac{2m}{\alpha \hbar^2 E_n}} \; . \tag{2.29}$$

Detaily tohto odvodenia vynecháme. Výraz (2.29) dáva pre $\alpha \to 0$ klasickú limitu (2.25) a pre nenulové α vedie ku korekciám, znázorneným na obrázku 2.7 prerušovanou čiarou. Jednoducho, v kvantovej mechanike môže byť $T_n < 1$ aj keď $\epsilon > E_n(0)$, a naopak, pre $\epsilon < E_n(0)$ pravdepodobnosť odrazu $1 - T_n$ nie je presne nulová.



Obr. 2.8: (a) Balistický 1D vodič napájaný dvomi širokými kontaktmi. (b) Na rozdiel od 1D vodiča, v ktorom je energia priečneho pohybu kvantovaná (znázornené sú dva energetické subpásy), kontakty sú široké a priečne subpásy enegie sú v nich nekonečne husté (znázornené ako šedá oblasť). Stavy $+k$ a $-k$ vo vodiči majú rôzne kvázi-Fermiho hladiny. (c) Zmena elektrochemického potenciálu z jedného kontaku do druhého.

2.5 Prečo je odpor balistického drôtu nenulový? Kde je odpor?

Z vodivosti G dostávame, že odpor $R_0 \equiv \frac{1}{G} = \frac{h}{2e^2}\frac{1}{N}$ je nenulový. Otázka je, prečo je nenulový, ak sa elektróny v drôte pohybujú balisticky (bez rozptylu a teda bez odporu). Ak je 1D vodič bez prekážky, nemôže spôsobovať odpor. Z toho plynie, že odpor $\frac{h}{2e^2}\frac{1}{N}$ (resp. jemu zodpovedajúci napäťový spád) musí byť lokalizovaný mimo 1D vodič, teda jedine na rozhraní kontakt-vodič. Prečo napäťový spád vznikne práve tam je ukázané na obr. 2.8. Elektrochemické potenciály v kontaktoch sú μ_1 a μ_2 a efektívny elektrochemický potenciál v drôte je $(\mu_1 + \mu_2)/2$. Na ľavom aj pravom rozhraní kontakt-vodič preto vzniká potenciálový schod $(\mu_1 - \mu_2)/2 = eV/2$, spolu $\mu_1 - \mu_2 = eV$.

Na zmeranie odporu $R_0 = \frac{h}{2e^2}\frac{1}{N}$ je teda potrebné merať potenciálový rozdiel medzi kontaktmi pri známom prúde. Ide o tzv. dvojterminálové meranie: sondy na meranie potenciálového rozdielu sa prikladajú priamo na prúdové kontakty. Odpor $\frac{1}{G} = (h/2e^2)/N$ sa nazýva fundamentálny kontaktný odpor.

Komplikovanejšie je merať potenciálový schod $eV/2$ na rozhraní kontakt-vodič. Vtedy sa totiž jedna z napäťových sond musí priložiť priamo na drôt, čo treba urobiť neinvazívne (pozri kapitolu 4).

Kapitola 3

Vodivosť mezoskopického vodiča s prekážkami

3.1 Landauerova formula pre dvojterminálovú vodivosť

Predstavme si, že do vnútra balistického drôtu vložíme prekážku (viď obr.3.1), ktorá dopadajúce elektróny prepúšťa alebo odráža. Vodivosť drôtu s prekážkou vypočítame analogicky, ako sme počítali vodivosť balistického drôtu v odseku 2.1., ibaže vezmeme do úvahy, že elektrón dopadajúci na prekážku v stave (n, k) pretuneluje cez prekážku s pravdepodobnosťou $T_n(k)$. Vzťah (2.2) pre balistický prúd v n-tom subpáse sa zmení takto:

$$I_n = \sum_{k=k_n(E_F)}^{k_n(E_F+\delta\mu)} \frac{1}{L}\frac{e}{\hbar}\frac{\partial E_n(k)}{\partial k} T_n(k) = 2\frac{L}{2\pi}\int_{k_n(E_F)}^{k_n(E_F+\delta\mu)} dk \frac{1}{L}\frac{e}{\hbar}\frac{\partial E_n(k)}{\partial k} T_n(k)\ . \tag{3.1}$$

Zameníme integrovanie cez k integrovaním cez $\varepsilon \equiv E_n(k)$ a máme

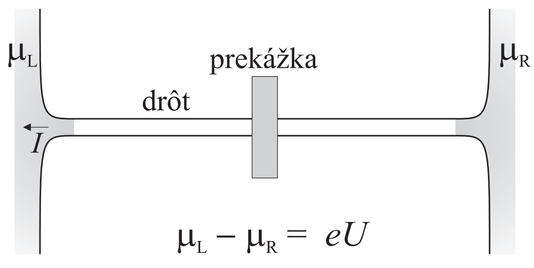
$$I_n = \frac{e}{\pi\hbar}\int_{k_n(E_F)}^{k_n(E_F+\delta\mu)} dk\,\frac{\partial E_n(k)}{\partial k} T_n(k) = \frac{e}{\pi\hbar}\int_{E_F}^{E_F+\delta\mu} d\varepsilon T_n(\varepsilon)\ , \tag{3.2}$$

Pre $\delta\mu = eV << E_F$ môžeme položiť $T_n(\varepsilon) \simeq T_n(E_F)$. Dostaneme

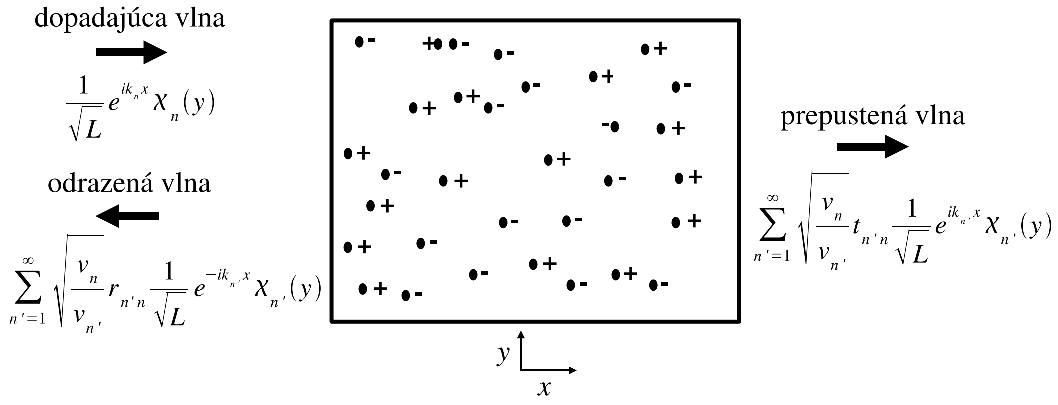
$$I_n = \frac{2e^2}{2\pi\hbar} T_n(E_F)\, V. \tag{3.3}$$

Pre dvojterminálovú vodivosť $G = \frac{I}{V} = \frac{1}{V}\sum_{n'=1}^{N} I_n$ dostávame Landauerovu formulu

$$G = \frac{2e^2}{h}\sum_{n=1}^{N} T_n(E_F)\ , \tag{3.4}$$



Obr. 3.1: Mezoskopický vodič s prekážkou. Vodivosť $G = I/U$ je tzv. dvojterminálová vodivosť, pretože sa meria potenciálový rozdiel U medzi prúdovými terminálmi L a R.



Obr. 3.2: Mezoskopický vodič s náhodne rozloženými prímesami. Prímesi so znamienkom plus/mínus sú príťažlivé/odpudivé. Vytvárajú náhodný potenciál $U_I(x, y)$, ktorý dopadajúcu vlnu čiastočne odráža a čiastočne prepúšťa (pozri text).

kde N je počet obsadených 1D subpásov, alebo presnejšie, $n = N$ je energeticky najvyšší subpás pre ktorý je ešte $E_n < E_F$. Všimnime si, že odvodenie Landauerovej formuly je nezávislé od konkrétneho tvaru funkcie $E_n(k)$.

Poďme definovať $T_n(E_F)$ z prvých princípov. Formula (3.4) platí pre mezoskopický vodič s ľubovoľnou prekážkou. Príklad na obrázku 3.2 ukazuje vzorku šírky W, v ktorej sú prekážkami prímesné atómy. Tieto vytvárajú vo vzorke náhodný potenciál $U_I\,(x, y)$, na ktorom sa elektróny rozptyľujú. Pre elektrón vo vzorke platí Schrodingerova rovnica

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + U\,(y) + U_I\,(x, y)\right]\psi(x, y) = E_F\psi(x, y), \tag{3.5}$$

kde $U(y)$ je potenciál definujúci okraje vzorky a kde sa nám stačí obmedziť na vlastnú energiu $E = E_F$, nakoľko vodivosť (3.4) určujú len elektróny na Fermiho hladine.

Zopakujme najprv, aké je riešenie pre vodič bez prekážok. Pre $U_I(x, y) = 0$ sú riešením rovnice (3.5) vlnové funkcie

$$\xi_n^{\pm}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\pm ik_n x}\chi_n(y) \quad , \tag{3.6}$$

kde $k_n > 0$, index "+" označuje vlnu šíriacu sa zľava doprava, index "-" vlnu šíriacu sa zprava doľava, vlnová funkcia $\chi_n(y)$ je riešením Schrodingerovej rovnice

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + U\,(y)\right]\chi_n(y) = E_n\chi_n(y), \tag{3.7}$$

a E_n je energia 1D subpásu s kvantovým číslom n. Pre $E = E_F$ platí

$$E_F = E_n + \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \quad , \tag{3.8}$$

t.j., vlnový vektor k_n má význam Fermiho vlnového vektora v subpáse n.

V Landauerovej formuli (3.4) sumujeme len po $n = N$, t.j. po najvyšší subpás pre ktorý je ešte $E_n < E_F$. Stavy s $E_n < E_F$ majú podľa rovnice (3.8) reálne hodnoty Fermiho impulzu k_n a nazývajú sa *vodivé*, pretože prispievajú do vodivosti (3.4).

Stavy s $n > N$ majú $E_n > E_F$ a z rovnice (3.8) pre ne vyplýva imaginárny Fermiho impulz $k_n = i\kappa_n$, kde κ_n je reálne číslo. Nazývajú sa *evanescentné* stavy a platí pre ne

$$E_F = E_n - \frac{\hbar^2 \kappa_n^2}{2m}, \tag{3.9}$$

$$\xi_n^{\pm}(x,y) \propto e^{\mp \kappa_n x} \chi_n(y), \qquad n = N+1, \ldots, \infty. \tag{3.10}$$

Evanescentné vlnové funkcie teda exponenciálne klesajú s x. Neskôr uvidíme, že i keď evanescentné stavy nevystupujú priamo v sume (3.4), majú na vodivosť nepriamy vplyv.

Uvažujme rovnicu (3.5) aj s potenciálom $U_I(x,y)$. Tento potenciál tvoria prekážky, ktoré sú na obrázku 3.2 ukázané ako náhodne rozmiestnené prímesi. Nech na ne dopadá zľava elektrón v stave $\xi_n^+(x,y) = L^{-1/2}\, e^{+ik_n x} \chi_n(y)$. Pýtame sa, ako vypočítať pravdepodobnosť $T_n(k_n)$, že tento elektrón pretuneluje cez prekážky na druhú stranu vzorky.

Vo všeobecnosti, elektrón dopadajúci na prekážky v stave ξ_n^+ cez ne môže pretunelovať (alebo sa od nich odraziť) do ľubovolného subpásu n', pričom jeho energia musí po rozptyle z n do n' zostať zachovaná. Vlnovú funkciu pred a za prekážkami môžeme preto zapísať ako

$$\psi_n^+(x,y) = \begin{cases} \xi_n^+(x,y) + \sum\limits_{n'=1}^{\infty} \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, r_{n'n}\, \xi_{n'}^-(x,y), & x < 0 \\ \sum\limits_{n'=1}^{\infty} \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, t_{n'n}\, \xi_{n'}^+(x,y), & x > L \end{cases}, \tag{3.11}$$

kde $t_{n'n}(k_n)$ a $r_{n'n}(k_n)$ sú amplitúdy pravdepodobnosti prechodu resp. odrazu z n do n' pre elektrón prichádzajúci zľava, v_n je rýchlosť elektrónu v stave k_n (pre parabolický disperzný zákon $v_n = \hbar k_n/m$) a faktor $\sqrt{v_n/v_{n'}}$ je dôsledok konvencie. Ak vzťahy (3.11) chápeme ako rozvoje rozptýlenej vlnovej funkcie do úplného systému funkcií $e^{\mp ik'x}\chi_{n'}(y)$, mala by v nich vystupovať aj suma cez k'. Zachovanie energie však pre dané n' pripúšťa len k' na Fermiho hladine, t. j. $k' = k_{n'}$. Tak zostali rozvoje do úplneho systému funcií $\chi_{n'}(y)$.

Ak na prekážky dopadá sprava elektrón v stave $\xi_n^-(x,y) = L^{-1/2}\, e^{-ik_n x}\chi_n(y)$, vlnovú funkciu pred a za prekážkami môžeme vyjadriť ako

$$\psi_n^-(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{n'=1}^{\infty} \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, t'_{n'n}\, \xi_{n'}^-(x,y), & x < 0 \\ \xi_n^-(x,y) + \sum\limits_{n'=1}^{\infty} \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, r'_{n'n}\, \xi_{n'}^+(x,y), & x > L \end{cases}, \tag{3.12}$$

kde $t'_{n'n}(k_n)$ a $r'_{n'n}(k_n)$ sú amplitúdy pravdepodobnosti prechodu resp. odrazu z n do n' pre elektrón prichádzajúci zprava.

Podľa kvantovej mechaniky elektrón s vlnovou funkciou $\psi(x,y)$ nesie v smere x prúdovú hustotu

$$j(x,y) = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx}\right] \tag{3.13}$$

a elektrický prúd

$$J = e \int_0^W j(x,y)\, dy. \tag{3.14}$$

Z rovnice (3.11) dosaďme do (3.13) vlnovú funkciu $\psi_n^+ = \sum\limits_{n'=1}^{\infty} \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}} t_{n'n} \xi_{n'}^+(x,y)$ a pri integrovaní v (3.14) využime, že vlnové funkcie $\chi_n(y)$ sú ortogonálne. Po jednoduchých úpravách, ktoré čitateľ nájde v Dodatku A, dostaneme výsledok

$$J_n^+ = \frac{1}{L} \frac{e\hbar k_n}{m} \sum_{n'=1}^{N} |t_{n'n}(k_n)|^2, \tag{3.15}$$

v ktorom sa príspevok od evanescentných stavov ($n > N$) ukázal byť identicky rovný nule a zostal len príspevok od stavov vodivých. Vzťah (3.15) vyjadruje prúd nesený zľava doprava jedným elektrónom v stave $k = k_n$. Vzťah (3.15) sme kvôli jednoduchosti odvodili pre parabolický disperzný zákon (rovnica (3.8)). Urobiť podobné odvodenie pre obecný disperzný zákon je možné avšak zdĺhavé.

Teraz sa vráťme k rovnici (3.2) a prepíšme ju takto:

$$\begin{aligned} I_n = {} & \frac{e}{\pi\hbar} \int_{k_n(E_F)}^{k_n(E_F+\delta\mu)} dk \, \frac{\partial E_n(k)}{\partial k} T_n(k) = \\ & \frac{e}{\pi\hbar} \int_{E_F}^{E_F+\delta\mu} d\varepsilon \frac{\partial k}{\partial \varepsilon} \, \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} \, T_n(\varepsilon) \simeq \frac{e}{\pi\hbar} \frac{\partial k_n}{\partial E_F} \, \frac{\partial E_F}{\partial k_n} \, T_n(\varepsilon_F) \, \delta\mu \, . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Poslednú rovnicu môžeme zapísať ako

$$I_n \; = \; \delta\mu \;\, g_n^+(E_F) \;\, J_n^+ \; , \tag{3.17}$$

kde

$$g_n^+(E_F) \; \equiv \; \frac{L}{\pi} \frac{\partial k_n}{\partial E_F} \tag{3.18}$$

je hustota stavov na Fermiho hladine pre pozitívne k_n (pre elektróny dopadajúce na prekážku zľava v subpáse n) a

$$J_n^+(E_F) \; = \; \frac{e}{L} \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_F}{\partial k_n} \;\, T_n(\varepsilon_F) \tag{3.19}$$

je prúd nesený zľava doprava jedným elektrónom v stave k_n.

Vzťahy (3.17) - (3.19) platia pre ľubovoľný disperzný zákon $E_n(k)$. Ak predpokladáme parabolický disperzný zákon, vzťah (3.19) prejde na tvar

$$J_n^+ \; = \; e \frac{\hbar k_n}{m} T_n(\varepsilon_F) \; , \tag{3.20}$$

ktorý môžeme porovnať so vzťahom (3.15). Z porovnania dostaneme

$$T_n(E_F) = \sum_{n'=1}^{N} |t_{n'n}(E_F)|^2 \; , \tag{3.21}$$

takže Landauerovu formulu môžeme zapísať aj v tvare

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n=1}^{N} \sum_{n'=1}^{N} |t_{n'n}(E_F)|^2 \; , \tag{3.22}$$

v ktorom je T_n explicitne vyjadrená cez amplitúdy prechodu $t_{n'n}$. Vyjadrenie (3.21) sme kvôli jednoduchosti dokázali len pre parabolický disperzný zákon. Dôkaz pre obecný disperzný zákon je zdĺhavejší a vynechávame ho. Výsledok (3.21) nie je triviálny. Keby sme ho neodvodili rigorózne, vznikla by otázka, prečo T_n nevyjadrujeme ako totálnu amplitúdu $\sum_{n'=1}^{N} t_{n'n}$ vynásobenú jej komplexne združeným obrazom, čo nie je správny výsledok.

3.2 Definícia matice rozptylu

Formula (3.22) vyjadruje dvojterminálovú vodivosť neusporiadaného mezoskopického vodiča pomocou transmisných amplitúd $t_{n'n}$. Ako však vypočítať $t_{n'n}$? Vo zvyšku tejto kapitoly popíšeme metódu rozptylových matíc, ktorá umožňuje $t_{n'n}$ vypočítať v princípe pre ľubovolný náhodný potenciál $U_I(x,y)$. Metóda rozptylových matíc nám umožní zaviesť aj koncepciu Feynmannových dráh, ktorú budeme potrebovať pri vysvetľovaní slabej lokalizácie a univerzálnych fluktuácií vodivosti. V tomto odseku rozptylovú maticu zadefinujeme.

Prepíšeme najprv rovnice (3.11) v trochu pozmenenom tvare

$$\psi_n^+(x,y) = \begin{cases} \alpha_1^{(n)}\xi_n^+(x,y) + \sum\limits_{n'=1}^{\infty} \alpha_1^{(n)} \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, r_{n'n}\, \xi_{n'}^-(x,y), & x<0 \\ \sum\limits_{n'=1}^{\infty} \alpha_1^{(n)} \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, t_{n'n}\, \xi_{n'}^+(x,y), & x>L \end{cases}, \tag{3.23}$$

kde sme na pravú stranu pridali koeficient $\alpha_1^{(n)}$. Podobne, prepíšeme (3.12) do tvaru

$$\psi_n^-(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{n'=1}^{\infty} \beta_2^{(n)} \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, t'_{n'n}\, \xi_{n'}^-(x,y), & x<0 \\ \beta_2^{(n)}\xi_n^-(x,y) + \sum\limits_{n'=1}^{\infty} \beta_2^{(n)} \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, r'_{n'n}\, \xi_{n'}^+(x,y), & x>L \end{cases}, \tag{3.24}$$

kde je na pravej strane pridaný koeficient $\beta_2^{(n)}$. Inými slovami, koeficientom $\alpha_1^{(n)}$ sme preškálovali dopadajúcu vlnu $\xi_n^+(x,y)$ aj výsledné prepustené a odrazené vlny. Podobne, koeficientom $\beta_2^{(n)}$ sme preškálovali dopadajúcu vlnu $\xi_n^-(x,y)$ aj výsledné prepustené a odrazené vlny. Vidno, že rovnice (3.23) a (3.24) sú len špeciálne prípady obecného matematického riešenia

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{n'=1}^{\infty} \alpha_1^{(n')}\xi_{n'}^+(x,y) + \sum\limits_{n'=1}^{\infty} \beta_1^{(n')}\xi_{n'}^-(x,y), & x<0 \\ \sum\limits_{n'=1}^{\infty} \alpha_2^{(n')}\xi_{n'}^+(x,y) + \sum\limits_{n'=1}^{\infty} \beta_2^{(n')}\xi_{n'}^-(x,y), & x>L \end{cases}, \tag{3.25}$$

kde $\beta_1^{(n')}$ a $\alpha_2^{(n')}$ sú výstupné amplitúdy a $\alpha_1^{(n')}$ a $\beta_2^{(n')}$ sú vstupné amplitúdy. Princíp superpozície nám umožňuje skonštruovať obecné riešenie aj tak, že rovnice (3.23) a (3.24) sčítame a vysumujeme cez všetky n. Pre $x<0$ dostaneme vzťah

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty}[\psi_n^+(x,y) + \psi_n^-(x,y)] = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_1^{(n)}\xi_n^+(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n'=1}^{\infty}\left[\alpha_1^{(n)}\sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, r_{n'n} + \beta_2^{(n)}\sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, t'_{n'n}\right]\xi_{n'}^-(x,y) \end{aligned} \tag{3.26}$$

a pre $x>L$ nájdeme

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty}[\psi_n^+(x,y) + \psi_n^-(x,y)] = \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n'=1}^{\infty}\left[\alpha_1^{(n)}\sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, t_{n'n} + \beta_2^{(n)}\sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, r'_{n'n}\right]\xi_{n'}^+(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_2^{(n)}\xi_n^-(x,y)\,. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Ak (3.26) a (3.27) porovnáme s (3.25), dostaneme rovnice

$$\beta_1^{(n')} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_1^{(n)} \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, r_{n'n} + \beta_2^{(n)} \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, t'_{n'n} \right], \qquad n' = 1, 2, \ldots \infty\,, \tag{3.28}$$

a

$$\alpha_2^{(n')} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_1^{(n)} \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, t_{n'n} + \beta_2^{(n)} \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, r'_{n'n} \right], \qquad n' = 1, 2, \ldots \infty\,. \tag{3.29}$$

Posledné dve rovnice sú obecné vzťahy medzi výstupnými a vstupnými amplitúdami. Tieto rovnice môžeme zapísať aj v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} \beta_\mathbf{1} \\ \alpha_\mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{r}} & \tilde{\mathbf{t}}' \\ \tilde{\mathbf{t}} & \tilde{\mathbf{r}}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_\mathbf{1} \\ \beta_\mathbf{2} \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

kde vzťah medzi vektormi

$$\begin{pmatrix} \alpha_\mathbf{1} \\ \beta_\mathbf{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} \\ \vdots \\ \beta_2^{(1)} \\ \beta_2^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad a \qquad \begin{pmatrix} \beta_\mathbf{1} \\ \alpha_\mathbf{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \beta_1^{(1)} \\ \beta_1^{(2)} \\ \vdots \\ \alpha_2^{(1)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

sprostredkuje matica

$$\tilde{\mathbb{S}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{r}} & \tilde{\mathbf{t}}' \\ \tilde{\mathbf{t}} & \tilde{\mathbf{r}}' \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

zložená z matíc $\tilde{\mathbf{r}}$, $\tilde{\mathbf{t}}$, $\tilde{\mathbf{t}}'$, $\tilde{\mathbf{r}}'$ s prvkami

$$(\tilde{\mathbf{r}})_{n'n} = \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, r_{n'n}, \quad (\tilde{\mathbf{t}})_{n'n} = \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, t_{n'n}, \quad (\tilde{\mathbf{t}}')_{n'n} = \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, t'_{n'n}, \quad (\tilde{\mathbf{r}}')_{n'n} = \sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\, r'_{n'n}. \tag{3.33}$$

Matica $\tilde{\mathbb{S}}$ popisuje, ako sa dopadajúci elektrón rozptyľuje na ľubovoľnej prekážke, v našom prípade na prímesiach (obr. 3.2) náhodne rozmiestnených v oblasti $0 < x < L$. Maticu $\tilde{\mathbb{S}}$ by sme teda mohli nazvať maticou rozptylu. Namiesto matice $\tilde{\mathbb{S}}$ je však v literatúre obvyklé definovať maticu rozptylu trochu inak. Prepíšeme (3.23) v tvare

$$\psi_n^+(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} a_1^{(n)} \phi_n^+(x,y) + \sum\limits_{n'=1}^{\infty} a_1^{(n)}\, r_{n'n}\, \phi_{n'}^-(x,y), & x < 0 \\ \sum\limits_{n'=1}^{\infty} a_1^{(n)}\, t_{n'n}\, \phi_{n'}^+(x,y), & x > L \end{array} \right., \tag{3.34}$$

a (3.24) v tvare

$$\psi_n^-(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_{n'=1}^{\infty} b_2^{(n)}\, t'_{n'n}\, \phi_{n'}^-(x,y), & x < 0 \\ b_2^{(n)} \phi_n^-(x,y) + \sum\limits_{n'=1}^{\infty} b_2^{(n)}\, r'_{n'n}\, \phi_{n'}^+(x,y), & x > L \end{array} \right., \tag{3.35}$$

kde

$$\phi_n^{\pm}(x,y) = \sqrt{\frac{L}{v_n}}\xi_n^{\pm}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{v_n}}e^{\pm ik_n x}\chi_n(y) \tag{3.36}$$

sú len inak normované vlnové funkcie $\xi_n^{\pm}$ a koeficienty $a_1^{(n)}$ a $b_2^{(n)}$ sú definované ako

$$a_1^{(n)} = \sqrt{\frac{v_n}{L}}\alpha_1^{(n)}, \quad b_2^{(n)} = \sqrt{\frac{v_n}{L}}\beta_2^{(n)}. \tag{3.37}$$

Zadefinujeme ešte

$$b_1^{(n)} = \sqrt{\frac{v_n}{L}}\beta_1^{(n)}, \quad a_2^{(n)} = \sqrt{\frac{v_n}{L}}\alpha_2^{(n)}, \tag{3.38}$$

a obecný rozvoj (3.25) prepíšeme v tvare

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{n'=1}^{\infty} a_1^{(n')}\phi_{n'}^{+}(x,y) + \sum\limits_{n'=1}^{\infty} b_1^{(n')}\phi_{n'}^{-}(x,y), & x < 0 \\ \sum\limits_{n'=1}^{\infty} a_2^{(n')}\phi_{n'}^{+}(x,y) + \sum\limits_{n'=1}^{\infty} b_2^{(n')}\phi_{n'}^{-}(x,y), & x > L\,. \end{cases} \tag{3.39}$$

Tou istou úvahou akou sme prišli k rovniciam (3.28) a (3.29) ľahko prídeme k rovniciam

$$b_1^{(n')} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_1^{(n)}\, r_{n'n} + b_2^{(n)}\, t'_{n'n}\right], \qquad n' = 1,2,\ldots\infty\,, \tag{3.40}$$

a

$$a_2^{(n')} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_1^{(n)}\, t_{n'n} + b_2^{(n)}\, r'_{n'n}\right], \qquad n' = 1,2,\ldots\infty\,, \tag{3.41}$$

čo sú len rovnice (3.28) a (3.29) prepísané pomocou inak normovaných vstupných amplitúd (3.37) a výstupných amplitúd (3.38). Rovnice (3.40) a (3.41) zapíšeme v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix}\mathbf{b_1}\\ \mathbf{a_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{r} & \mathbf{t}'\\ \mathbf{t} & \mathbf{r}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a_1}\\ \mathbf{b_2}\end{pmatrix}, \tag{3.42}$$

kde vzťah medzi vektormi

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a_1}\\ \mathbf{b_2}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1^{(1)}\\ a_1^{(2)}\\ \vdots\\ b_2^{(1)}\\ b_2^{(2)}\\ \vdots\end{pmatrix} \qquad a \qquad \begin{pmatrix}\mathbf{b_1}\\ \mathbf{a_2}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_1^{(1)}\\ b_1^{(2)}\\ \vdots\\ a_2^{(1)}\\ a_2^{(2)}\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{3.43}$$

sprostredkuje matica

$$\mathbb{S} \equiv \begin{pmatrix}\mathbf{r} & \mathbf{t}'\\ \mathbf{t} & \mathbf{r}'\end{pmatrix} \tag{3.44}$$

ktorá sa skladá z matíc $\mathbf{r}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}'$, $\mathbf{r}'$ s prvkami

$$(\mathbf{r})_{n'n} = r_{n'n}, \quad (\mathbf{t})_{n'n} = t_{n'n}, \quad (\mathbf{t}')_{n'n} = t'_{n'n}, \quad (\mathbf{r}')_{n'n} = r'_{n'n}. \tag{3.45}$$

Namiesto matice $\tilde{\mathbb{S}}$ sa zvykne nazývať maticou rozptylu práve matica $\mathbb{S}$ definovaná vzťahmi (3.44) a (3.45). Ľahko sa dá presvedčiť, že medzi $\tilde{\mathbb{S}}$ a $\mathbb{S}$ platí vzťah

$$\mathbb{S} = \mathbb{W}\tilde{\mathbb{S}}\mathbb{W}^{-1} \tag{3.46}$$

kde $\mathbb{W}$ je diagonálna matica s prvkami

$$(\mathbb{W})_{n'n} = \sqrt{v_n}\,\delta_{n'n} \tag{3.47}$$

a $\mathbb{W}^{-1}$ je inverzná matica s prvkami

$$(\mathbb{W}^{-1})_{n'n} = \frac{1}{\sqrt{v_n}}\,\delta_{n'n}. \tag{3.48}$$

Všimnime si ešte, že keby sme rozvoje (3.34), (3.35) a (3.39) obmedzili na konečný počet kanálov ($n, n' = 1, 2, ...N_{max}$), tak rozmery matíc $\mathbf{r}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}'$, $\mathbf{r}'$ by boli $N_{max} \times N_{max}$ a matica rozptylu (3.44) by mala rozmery $2N_{max} \times 2N_{max}$. Exaktné rozvoje však obsahujú členy s $n, n' = 1, 2, ...\infty$, keďže v princípe existuje možnosť rozptylu do evanescentných stavov ($n > N$), ktorých je nekonečne veľa.

3.3 Vlastnosti matice rozptylu

Uvažujme prúd nesený časticou s vlnovou funkciou $\psi(x, y)$,

$$J = \int_0^W \frac{\hbar}{2im}\left[\psi^*(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y) - \psi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,y)\right] dy. \tag{3.49}$$

Ak za $\psi(x, y)$ dosadíme vlnovú funkciu $\xi_n^{\pm}(x, y) = L^{-1/2}\, e^{\pm ik_n x}\chi_n(y)$, dostaneme

$$J_n = \frac{1}{L}\frac{\hbar k_n}{m} = \frac{v_n}{L} \qquad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots N, \tag{3.50}$$

a

$$J_n = 0 \qquad \text{pre} \quad n = N + 1, N + 2, \ldots \infty. \tag{3.51}$$

Pripomíname (odsek 3.1), že kanály $n = 1, 2, \ldots N$ sú vodivé - s reálnym vlnovým vektorom k_n, zatiaľ čo kanály $n = N + 1, N + 2, \ldots \infty$ sú evanescentné - s rýdzo imaginárnym k_n. Evanescentné kanály k prúdu neprispievajú práve kvôli rýdzoimaginárnemu k_n, čo sme už raz videli pri odvodení Landauerovej formuly v odseku 3.1.

Ak za $\psi(x, y)$ dosadíme prenormovanú vlnovú funkciu $\phi_n^{\pm}(x, y) = \sqrt{L/v_n}\xi_n^{\pm}(x, y)$, vo vodivostných kanáloch sa všetky prúdy prenormujú na jednotku, t.j.,

$$J_n = 1 \qquad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots N, \tag{3.52}$$

a v evanescentných kanáloch dostaneme znovu

$$J_n = 0 \quad \text{pre} \quad n = N + 1, N + 2, \ldots \infty. \tag{3.53}$$

Hovoríme, že vlnová funcia $\phi_n^{\pm}(x, y) = \sqrt{1/v_n}\, e^{\pm ik_n x}\chi_n(y)$ je pre $n = 1, 2, \ldots N$ normovaná na jednotkový prúd. Vlnovým funkciám $a_1^{(n)}\phi_n^+$, $a_2^{(n)}\phi_n^+$, $b_1^{(n)}\phi_n^-$ a $b_2^{(n)}\phi_n^-$ teda očividne zodpovedajú prúdy

$$J_n = |a_1^{(n)}|^2, \quad J_n = |a_2^{(n)}|^2, \quad J_n = |b_1^{(n)}|^2, \quad J_n = |b_2^{(n)}|^2 \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots N. \tag{3.54}$$

Z tohoto dôvodu sa amplitúdy $a_1^{(n)}$, $a_2^{(n)}$, $b_1^{(n)}$ a $b_2^{(n)}$ nazývajú aj prúdové amplitúdy, zatiaľ čo amlitúdy $\alpha_1^{(n)}$, $\alpha_2^{(n)}$, $\beta_1^{(n)}$ a $\beta_2^{(n)}$ (predchádzajúci odsek) sú vlnové amplitúdy. Z požiadavky, že súčet výstupných prúdov sa musí rovnať súčtu vstupných prúdov, vyplýva rovnica

$$\sum_{n=1}^{N} |b_1^{(n)}|^2 + \sum_{n=1}^{N} |a_2^{(n)}|^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_1^{(n)}|^2 + \sum_{n=1}^{N} |b_2^{(n)}|^2. \tag{3.55}$$

Túto rovnicu môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix}\mathbf{b_1^*}, \, \mathbf{a_2^*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{b_1}\\ \mathbf{a_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{a_1^*}, \, \mathbf{b_2^*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a_1}\\ \mathbf{b_2}\end{pmatrix}. \tag{3.56}$$

kde

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a_1}\\ \mathbf{b_2}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_1^{(N)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_2^{(N)} \end{pmatrix} \qquad a \qquad \begin{pmatrix}\mathbf{b_1}\\ \mathbf{a_2}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_1^{(N)} \\ a_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_2^{(N)} \end{pmatrix}. \tag{3.57}$$

Kvôli zjednodušeniu zápisu sa v nasledujúcich riadkoch obmedzíme na prípad $N = 2$, naše závery však budú platné pre ľubovoľné N. Pre $N = 2$ sa obecné vzťahy (3.42), (3.44) a (3.45) redukujú na rovnice

$$\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_1^{(2)} \\ a_2^{(1)} \\ a_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & t'_{11} & t'_{12} \\ r_{21} & r_{22} & t'_{21} & t'_{22} \\ t_{11} & t_{12} & r'_{11} & r'_{12} \\ t_{21} & t_{22} & r'_{21} & r'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_1^{(2)} \\ b_2^{(1)} \\ b_2^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{3.58}$$

kde

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & t'_{11} & t'_{12} \\ r_{21} & r_{22} & t'_{21} & t'_{22} \\ t_{11} & t_{12} & r'_{11} & r'_{12} \\ t_{21} & t_{22} & r'_{21} & r'_{22} \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

je matica rozptylu s rozmermi 4×4 (v prípade N kanálov by mala rozmery $2N \times 2N$).

Pripomeňme si teraz niekoľko známych vzťahov. Uvažujme maticu $\mathbf{C}$ a jej prvky $(\mathbf{C})_{ij}$ označme ako

$$(\mathbf{C})_{ij} \equiv c_{ij}. \tag{3.60}$$

Potom transponovaná matica, $\mathbf{C}^\mathbf{T}$, je matica s prvkami

$$(\mathbf{C}^\mathbf{T})_{ij} = c_{ji}, \tag{3.61}$$

komplexne združená matica $\mathbf{C}^*$ má prvky

$$(\mathbf{C}^*)_{ij} = c_{ij}^* \tag{3.62}$$

a hermitovsky združená matica $\mathbf{C}^+$ je definovaná vzťahom

$$(\mathbf{C}^+)_{ij} = c_{ji}^*. \tag{3.63}$$

Ak hermitovsky združíme súčin dvoch matíc $\mathbf{CD}$, dá sa ukázať (dodatok B), že

$$(\mathbf{CD})^+ = \mathbf{D}^+\mathbf{C}^+. \tag{3.64}$$

Zapíšeme (3.58) vo forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_2} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{b_2} \end{pmatrix} \tag{3.65}$$

kde $\mathbf{S}$ je matica rozptylu (3.59), a obidve strany rovnice (3.65) hermitovsky združíme pomocou predpisov (3.62), (3.63) a (3.64). Dostaneme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b_1^*}, \; \mathbf{a_2^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1^*}, \; \mathbf{b_2^*} \end{pmatrix} \mathbf{S}^+. \tag{3.66}$$

Keď (3.30) a (3.66) dosadíme do ľavej strany rovnice (3.56), okamžite vidíme, že

$$\mathbf{S}^+\mathbf{S} = \mathbf{1}, \tag{3.67}$$

kde $\mathbf{1}$ je jednotková matica. Matica $\mathbf{S}$ je teda unitárna. Zdôraznime, že vzťah unitarity (3.67) platí pre maticu rozptylu (3.59) resp. obecne pre maticu rozptylu $2N \times 2N$, kde N je počet vodivých kanálov. Vzťah (3.67) neplatí pre maticu rozptylu rozšírenú na evanescentné kanály [rovnice (3.42)]. K unitarite sme totiž prišli od rovnice (3.55), ktorá evanescentné kanály neobsahuje. Poznamenajme ešte, že matica $\tilde{\mathbf{S}}$ unitárna nie je, ani keby sa zredukovala len na vodivé kanály.

Keď do (3.67) dosadíme maticu rozptylu (3.59), dostaneme rovnice

$$\sum_{n'=1}^{N} |r_{n'n}|^2 + \sum_{n'=1}^{N} |t_{n'n}|^2 = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots N, \tag{3.68}$$

a

$$\sum_{n'=1}^{N} |r'_{n'n}|^2 + \sum_{n'=1}^{N} |t'_{n'n}|^2 = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots N, \tag{3.69}$$

kde sme $N = 2$ zobecnili na N. Vzťahy $|r|^2 + |t|^2 = 1$ a $|r'|^2 + |t'|^2 = 1$, známe z teórie jednorozmerného rozptylu, sú špeciálnym prípadom vzťahov (3.68) a (3.69).

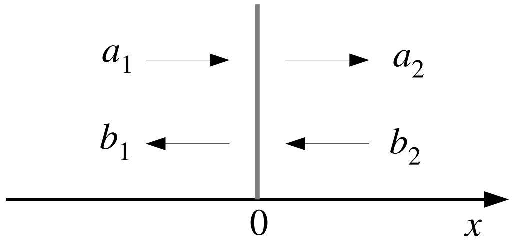
3.4 Závislosť matice rozptylu na polohe rozptylovača

Uvažujme najprv najjednoduchšiu rozptylovú úlohu (obr. 3.3) - rozptyl jednorozmerného elektrónu na jednorozmernej potenciálovej bariére tvaru δ-funkcie, lokalizovanej v určitom bode na osi x. Všeobecné riešenie (3.39) sa v tomto prípade zjednoduší na

$$\psi(x) = \begin{cases} a_1\phi^+(x) + b_1\phi^-(x), & x < x_1 \\ a_2\phi^+(x) + b_2\phi^-(x), & x > x_1 \; , \end{cases} \tag{3.70}$$

kde

$$\phi^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{\pm ikx}, \quad v = \frac{\hbar k}{m} \tag{3.71}$$



Obr. 3.3: Rozptyl elektrónu na jednorozmernej potenciálovej bariére tvaru δ-funkcie, umiestnenej v počiatku súradnej sústavy. Reflexné a transmisné amplitúdy tejto bariéry označíme ako r_0, r_0' a t_0, t_0', kde index 0 znamená, že ide o prekážku v bode $x = 0$.

a x_1 je poloha prekážky. Podľa teórie z predchádzajúcich dvoch odsekov, pre prípad na obrázku (3.3) môžeme vzťah medzi vstupnými a výstupnými amplitúdami vyjadriť rovnicou

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & t_0' \\ t_0 & r_0' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{3.72}$$

kde

$$\mathbb{S}_0 \equiv \begin{pmatrix} r_0 & t_0' \\ t_0 & r_0' \end{pmatrix} \tag{3.73}$$

je matica rozptylu prekážky (δ-bariéry) v polohe $x = 0$.

Ukážeme, že keď túto prekážku premiestnime do ľubovolného bodu x_1, tak posledné dve rovnice sa zmenia na rovnice

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0\, e^{i2kx_1} & t_0' \\ t_0 & r_0' e^{-i2kx_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{3.74}$$

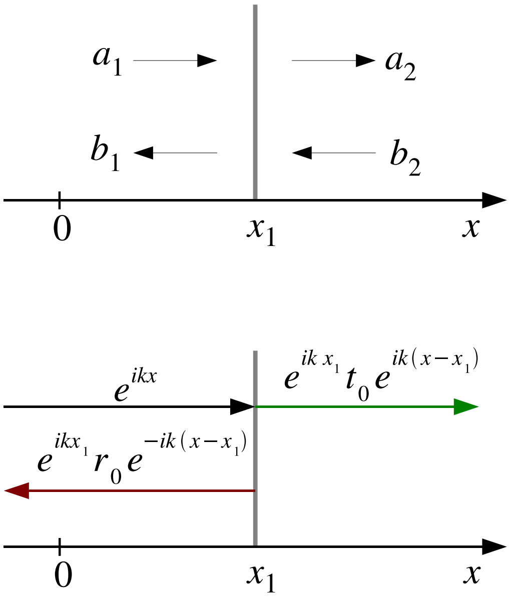
kde

$$\mathbb{S} \equiv \begin{pmatrix} r_0\, e^{i2kx_1} & t_0' \\ t_0 & r_0' e^{-i2kx_1} \end{pmatrix}. \tag{3.75}$$

je matica rozptylu prekážky v bode x_1.

Ak je prekážka v bode $x = 0$ a dopadá na ňu zľava rovinná vlna $\phi^+(x) \propto e^{ikx}$, potom v bode rozptylu má fázový faktor dopadajúcej vlny hodnotu práve $\exp(ik0) = 1$. Pri odraze sa táto hodnota preškáluje amplitúdou r_0, takže po odraze sa doľava šíri vlna s fázovým faktorom $r_0\ \exp(-ikx)$. Pri prechode prekážkou sa fázový faktor e^{ikx} škáluje amplitúdou t_0, takže doprava sa šíri vlna $t_0\ \exp(-ikx)$.

Ak je však prekážka v bode x_1 (obr. 3.4), tak pri rozptyle vlny $\phi^+(x) \propto e^{ikx}$ má jej geometrický fázový faktor v bode rozptylu hodnotu $\exp(ikx_1)$, teda nie jednotku. Odrazom sa tento fázový faktor zmení na $\exp(ikx_1)\ r_0$ a keďže bod vzniku odrazenej vlny je x_1, tak po odraze sa doľava šíri vlna $\exp[-ik(x - x_1)]$ násobená faktorom $\exp(ikx_1)\, r_0$, teda celkove $r_0 \exp(i2kx_1) \exp(-ikx)$. Vidíme, že v porovnaní s prekážkou v $x = 0$ sa pri amplitúde r_0 objavil naviac geometrický fázový faktor $\exp(i2kx_1)$ Pri prechode sa fázový faktor e^{ikx} tesne za prekážkou zmení na $\exp(ikx_1)\ t_0$ a a doprava sa šíri vlna $\exp(ikx_1)\, t_0\ \exp[ik(x - x_1)] = t_0\ \exp(ikx)$, rovnako ako v predchádzajúcom prípade.



Obr. 3.4: Rozptyl elektrónu na jednorozmernej potenciálovej bariére tvaru δ-funkcie, posunutej do bodu x_1. Spodný panel ilustruje, prečo sa v matici rozptylu posunutej bariéry [rovnice (3.74) a (3.75)] objaví pri amplitúde r_0 geometrický fázový faktor $\exp(i2kx_1)$ a pri t_0 sa neobjaví nič. Analogická ilustrácia sa dá načrtnúť pre vlnu dopadajúcu zprava na vysvetlenie faktora e^{-i2kx_1} pri amlitúde r'_0.

To je dôvod, prečo sa v rovniciach (3.74) a (3.75) objavil pri r_0 faktor $\exp(i2kx_1)$, zatiaľ čo pri t_0 sa neobjavilo nič. Tie isté úvahy pre vlnu $\phi^-(x) \propto e^{-ikx}$ by vysvetlili, prečo sa pri r'_0 objavil faktor e^{-i2kx_1} a pri t'_0 opäť nič.

Predchádajúca argumentácia sa týkala jednorozmerného rozptylu, platila teda pre jednokanálový vodič. Získané závery teraz zobecníme na vodič s dvomi vodivými kanálmi.

Na obrázku 3.5 je znázornený rozptyl elektrón vo vodiči s dvomi vodivými kanálmi na jednorozmernej potenciálovej bariére tvaru δ-funkcie, ktorá je lokalizovaná v určitom bode na osi x. Všeobecné riešenie (3.39) sa v tomto prípade zjednoduší na

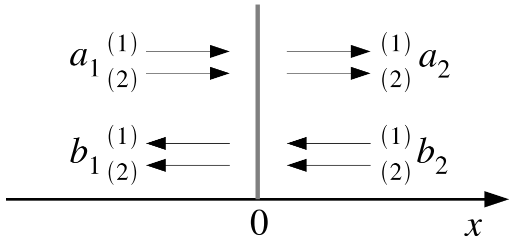
$$\psi(x,y) = \begin{cases} a_1^{(1)}\phi_1^+(x,y) + a_1^{(2)}\phi_2^+(x,y) + b_1^{(1)}\phi_1^-(x,y) + b_1^{(2)}\phi_2^-(x,y), & x < x_1 \\ a_2^{(1)}\phi_1^+(x,y) + a_2^{(2)}\phi_2^+(x,y) + b_2^{(1)}\phi_1^-(x,y) + b_2^{(2)}\phi_2^-(x,y), & x > x_1 \,. \end{cases} \tag{3.76}$$

kde

$$\phi_n^\pm(x,y) = \frac{1}{\sqrt{v_n}} e^{\pm ik_n x}\chi_n(y). \tag{3.77}$$

Pre $x_1 = 0$ (obr. 3.5) napíšeme vzťah medzi výstupnými a vstupnými amplitúdami v tvare

$$\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_1^{(2)} \\ a_2^{(1)} \\ a_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{011} & r_{012} & t'_{011} & t'_{012} \\ r_{021} & r_{022} & t'_{021} & t'_{022} \\ t_{011} & t_{012} & r'_{011} & r'_{012} \\ t_{021} & t_{022} & r'_{021} & r'_{022} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_1^{(2)} \\ b_2^{(1)} \\ b_2^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{3.78}$$



Obr. 3.5: Rozptyl elektrónu vo vodiči s dvomi vodivými kanálmi na jednorozmernej δ-bariére v počiatu súradnej sústavy. Reflexné a transmisné amplitúdy prekážky označíme ako r_{0ji}, r'_{0ji} a t_{0ji}, t'_{0ji}, kde index 0 znamená, že ide o prekážku v bode $x = 0$, $i = 1, 2$ sú indexy kanálov pred rozptylom a $j = 1, 2$ sú indexy kanálov po rozptyle.

kde

$$\mathbb{S}_0 = \begin{pmatrix} r_{011} & r_{012} & t'_{011} & t'_{012} \\ r_{021} & r_{022} & t'_{021} & t'_{022} \\ t_{011} & t_{012} & r'_{011} & r'_{012} \\ t_{021} & t_{022} & r'_{021} & r'_{022} \end{pmatrix}, \tag{3.79}$$

je matica rozptylu prekážky v polohe $x_1 = 0$. Zavedieme označenia

$$\mathbf{r_0} \equiv \begin{pmatrix} r_{011} & r_{012} \\ r_{021} & r_{022} \end{pmatrix}, \ \mathbf{t_0} \equiv \begin{pmatrix} t_{011} & t_{012} \\ t_{021} & t_{022} \end{pmatrix}, \tag{3.80a}$$

$$\mathbf{r'_0} \equiv \begin{pmatrix} r'_{011} & r'_{012} \\ r'_{021} & r'_{022} \end{pmatrix}, \ \mathbf{t'_0} \equiv \begin{pmatrix} t'_{011} & t'_{012} \\ t'_{021} & t'_{022} \end{pmatrix}, \tag{3.80b}$$

$$\mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \end{pmatrix} \tag{3.81}$$

a zapíšeme (3.78) v tvare

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r_0} & \mathbf{t'_0} \\ \mathbf{t_0} & \mathbf{r'_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{b_2} \end{pmatrix}. \tag{3.82}$$

Ak prekážku posunieme do bodu x_1 a naše úvahy pre jeden kanál prispôsobíme na dva kanály, ľahko nájdeme, že

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{t'} \\ \mathbf{t} & \mathbf{r'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{b_2} \end{pmatrix}, \tag{3.83}$$

kde

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{011}\, e^{i2k_1x_1} & r_{012}\, e^{i(k_2x_1+k_1x_1)} \\ r_{021}\, e^{i(k_1x_1+k_2x_1)} & r_{022}\, e^{i2k_2x_1} \end{pmatrix}, \tag{3.84a}$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_{011} & t_{012}\, e^{i(k_2x_1-k_1x_1)} \\ t_{021}\, e^{i(k_1x_1-k_2x_1)} & t_{022} \end{pmatrix}, \tag{3.84b}$$

$$\mathbf{r'} = \begin{pmatrix} r'_{011}\, e^{-i2k_1x_1} & r'_{012}\, e^{-i(k_2x_1+k_1x_1)} \\ r'_{021}\, e^{-i(k_1x_1+k_2x_1)} & r'_{022}\, e^{-i2k_2x_1} \end{pmatrix}, \tag{3.84c}$$

$$\mathbf{t'} = \begin{pmatrix} t'_{011} & t'_{012}\, e^{-i(k_2x_1-k_1x_1)} \\ t'_{021}\, e^{-i(k_1x_1-k_2x_1)} & t'_{022} \end{pmatrix}. \tag{3.84d}$$

Matica

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{t}' \\ \mathbf{t} & \mathbf{r}' \end{pmatrix} \tag{3.85}$$

v rovnici (3.83) je teda matica rozptylu prekážky v polohe x_1. Definujme 2×2 maticu

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} e^{ik_1x_1} & 0 \\ 0 & e^{ik_2x_1} \end{pmatrix}, \quad (\mathbb{X})_{m,n} = e^{ik_mx_1}\delta_{m,n} \tag{3.86}$$

a k nej inverznú 2×2 maticu

$$\mathbb{X}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-ik_1x_1} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2x_1} \end{pmatrix}, \quad (\mathbb{X}^{-1})_{m,n} = e^{-ik_mx_1}\delta_{m,n}. \tag{3.87}$$

(Platí, že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{X} = 1$.) Vzťahy (3.84) môžeme prepísať ako súčin matíc

$$\mathbf{r} = \mathbb{X}\mathbf{r}_0\mathbb{X}, \quad \mathbf{t} = \mathbb{X}^{-1}\mathbf{t}_0\mathbb{X} \tag{3.88}$$

a

$$\mathbf{r}' = \mathbb{X}^{-1}\mathbf{r}_0'\mathbb{X}^{-1}, \quad \mathbf{t}' = \mathbb{X}\mathbf{t}_0'\mathbb{X}^{-1}, \tag{3.89}$$

kde matice $\mathbf{r}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{r}_0'$ a $\mathbf{t}_0'$ sú dané vzťahmi (3.80), t.j. popisujú prekážku v polohe $x = 0$. Rozptylovú maticu $\mathbb{S}$ prekážky v mieste x_1 teda môžeme vyjadriť pomocou rozptylovej matice $\mathbb{S}_0$ prekážky v mieste $x = 0$ takto:

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \mathbb{X}\mathbf{r}_0\mathbb{X} & \mathbb{X}\mathbf{t}_0'\mathbb{X}^{-1} \\ \mathbb{X}^{-1}\mathbf{t}_0\mathbb{X}^{-1} & \mathbb{X}^{-1}\mathbf{r}_0'\mathbb{X} \end{pmatrix}. \tag{3.90}$$

Konečne, rovnice (3.76) - (3.90) môžeme ľahko zobecniť na vodič s ľubovoľným počtom kanálov N_{max}. Po mechanickom prepísaní všetkych rovníc pre N_{max} kanálov sa zmení len to, že matice $\mathbf{r}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{r}_0'$ a $\mathbf{t}_0'$ a matice $\mathbb{X}$ a $\mathbb{X}^{-1}$ narastú z 2×2 na $N_{max} \times N_{max}$. To isté sa udeje s maticami $\mathbf{r}, \mathbf{t}, \mathbf{r}'$ a $\mathbf{t}'$ a hlavný výsledok (3.90) zostane rovnaký.

V dodatku C je popísané aj čisto matematické odvodenie výsledku (3.90). V porovnaní s úvahami v tomto odseku je fyzikálne menej názorné, je však dobré si ho osvojiť.

3.5 Skladanie rozptylových matíc dvoch a viac prekážok

Uvažujme rozptyl elektrónu v mnohokanálovom vodiči s dvomi prekážkami (δ-bariérami) v polohách x_1 a x_2. V súlade s označeniami na obrázku 3.6 definuje rovnica

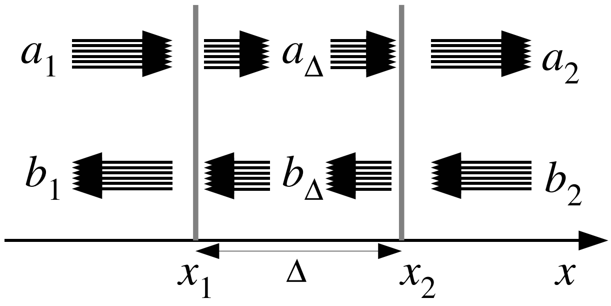
$$\begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} & \mathbf{t_1'} \\ \mathbf{t_1} & \mathbf{r_1'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{b_\Delta} \end{pmatrix} \tag{3.91}$$

rozptylovú maticu $\mathbb{S}_1$ prekážky v polohe x_1,

$$\mathbb{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} & \mathbf{t_1'} \\ \mathbf{t_1} & \mathbf{r_1'} \end{pmatrix}, \tag{3.92}$$

a rovnica

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b_\Delta} \\ \mathbf{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r_2} & \mathbf{t_2'} \\ \mathbf{t_2} & \mathbf{r_2'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a_\Delta} \\ \mathbf{b_2} \end{pmatrix} \tag{3.93}$$



Obr. 3.6: Mnohokanálový rozptyl na dvoch bariérach umiestnených vo všeobecných polohách x_1 a x_2.

rozptylovú maticu $\mathbb{S}_2$ prekážky v polohe x_2,

$$\mathbb{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{r_2} & \mathbf{t'_2} \\ \mathbf{t_2} & \mathbf{r'_2} \end{pmatrix}. \tag{3.94}$$

Rovnicou

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{t'} \\ \mathbf{t} & \mathbf{r'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{b_2} \end{pmatrix}. \tag{3.95}$$

zadefinujeme rozptylovú maticu prekážky zloženej z dvoch prekážok,

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{t'} \\ \mathbf{t} & \mathbf{r'} \end{pmatrix}. \tag{3.96}$$

Chceme odpovedať na otázku, ako vypočítať maticu $\mathbb{S}$, ak poznáme matice $\mathbb{S}_1$ a $\mathbb{S}_2$.

Z (3.91) a (3.93) získame dvojicu rovníc

$$\mathbf{a_\Delta} = \mathbf{t_1 a_1} + \mathbf{r'_1 b_\Delta} \tag{3.97}$$

a

$$\mathbf{b_\Delta} = \mathbf{r_2 a_\Delta} + \mathbf{t'_2 b_2}. \tag{3.98}$$

Dosadíme (3.98) do (3.97). Dostaneme

$$\mathbf{a_\Delta} = \mathbf{t_1 a_1} + \mathbf{r'_1 r_2 a_\Delta} + \mathbf{r'_1 t'_2 b_2} \tag{3.99}$$

a odtiaľ

$$\mathbf{a_\Delta} = \left[\mathbf{1} - \mathbf{r'_1 r_2}\right]^{-1} \mathbf{t_1 a_1} + \left[\mathbf{1} - \mathbf{r'_1 r_2}\right]^{-1} \mathbf{r'_1 t'_2 b_2}, \tag{3.100}$$

kde $[\mathbf{1} - \mathbf{r'_1 r_2}]^{-1}$ je inverzná matica k matici $[\mathbf{1} - \mathbf{r'_1 r_2}]$ a $\mathbf{1}$ je jednotková matica. Teraz dosaďme (3.97) do (3.98). Dostaneme

$$\mathbf{b_\Delta} = \mathbf{r_2 t_1 a_1} + \mathbf{r_2 r'_1 b_\Delta} + \mathbf{t'_2 b_2} \tag{3.101}$$

a odtiaľ

$$\mathbf{b_\Delta} = \left[\mathbf{1} - \mathbf{r_2 r'_1}\right]^{-1} \mathbf{r_2 t_1 a_1} + \left[\mathbf{1} - \mathbf{r_2 r'_1}\right]^{-1} \mathbf{t'_2 b_2}. \tag{3.102}$$

Z (3.91) máme

$$\mathbf{b_1} = \mathbf{r_1 a_1} + \mathbf{t'_1 b_\Delta}, \tag{3.103}$$

odtiaľ s využitím (3.102) získame

$$\mathbf{b_1} = \left\{\mathbf{r_1} + \mathbf{t'_1}\left[\mathbf{1} - \mathbf{r_2 r'_1}\right]^{-1}\mathbf{r_2 t_1}\right\}\mathbf{a_1} + \mathbf{t'_1}\left[\mathbf{1} - \mathbf{r_2 r'_1}\right]^{-1}\mathbf{t'_2}\,\mathbf{b_2}. \tag{3.104}$$

Z (3.93) máme

$$\mathbf{a_2} = \mathbf{t_2 a_\Delta} + \mathbf{r'_2 b_2}, \tag{3.105}$$

odtiaľ s využitím (3.100) dostaneme

$$\mathbf{a_2} = \mathbf{t_2}\left[\mathbf{1} - \mathbf{r'_1 r_2}\right]^{-1}\mathbf{t_1}\,\mathbf{a_1} + \left\{\mathbf{r'_2} + \mathbf{t_2}\left[1 - \mathbf{r'_1 r_2}\right]^{-1}\mathbf{r'_1 t'_2}\right\}\mathbf{b_2}. \tag{3.106}$$

Porovnaním (3.95) s (3.104) a (3.106) dostaneme výsledky

$$\mathbf{t} = \mathbf{t_2}\left[\mathbf{1} - \mathbf{r'_1 r_2}\right]^{-1}\mathbf{t_1}, \tag{3.107a}$$

$$\mathbf{t'} = \mathbf{t'_1}\left[\mathbf{1} - \mathbf{r_2 r'_1}\right]^{-1}\mathbf{t'_2}, \tag{3.107b}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_1} + \mathbf{t'_1}\left[\mathbf{1} - \mathbf{r_2 r'_1}\right]^{-1}\mathbf{r_2 t_1}, \tag{3.107c}$$

$$\mathbf{r'} = \mathbf{r'_2} + \mathbf{t_2}\left[\mathbf{1} - \mathbf{r'_1 r_2}\right]^{-1}\mathbf{r'_1 t'_2}. \tag{3.107d}$$

Výsledky (3.107) vyjadrujú maticu $\mathbb{S}$ pomocou matíc $\mathbb{S}_1$ a $\mathbb{S}_2$. Vzťahy (3.107) sa zvyknú formálne zapisovať aj v tvare

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2, \tag{3.108}$$

kde

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{t'} \\ \mathbf{t} & \mathbf{r'} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} & \mathbf{t'_1} \\ \mathbf{t_1} & \mathbf{r'_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{r_2} & \mathbf{t'_2} \\ \mathbf{t_2} & \mathbf{r'_2} \end{pmatrix} \tag{3.109}$$

a $\otimes$ je operátor, ktorý formálne definuje skladanie matíc $\mathbb{S}_1$ a $\mathbb{S}_2$ tak, že prvky výslednej matice $\mathbb{S}$ sú dané vzťahmi (3.107). Nezabudnime, že prvky matíc (3.109) sú tiež matice, takže poradenie operácií násobenia vo vzťahoch (3.107) je potrebné dodržať.

Konečne, uvedené skladanie $\mathbb{S}$-matíc dvoch prekážok môžeme zobecniť na ľubovoľný počet prekážok vzťahom

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2 \otimes \mathbb{S}_3 \otimes \ldots \mathbb{S}_j \otimes \ldots \quad . \tag{3.110}$$

Doposiaľ sme o maticiach $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_2$, ... $\mathbb{S}_j$ hovorili ako o rozptylových maticiach prekážok lokalizovaných v polohách $x_1, x_2, \ldots, x_j$ pre ktoré vieme závislosť od polohy vyjadriť vzťahom (3.90). Poznamenajme však, že pomocou vzťahu (3.110) môžeme skladať aj rozptylové matice prekážok, ktoré nie sú bodové, ale majú určitý priestorový rozsah δx a neprekrývajú sa. Na záver ešte prepíšeme vzťah (3.90) pre maticu $\mathbb{S}_j$:

$$\mathbb{S}_j = \begin{pmatrix} \mathbb{X}_j \mathbf{r}_0 \mathbb{X}_j & \mathbb{X}_j \mathbf{t}'_0 \mathbb{X}_j^{-1} \\ \mathbb{X}_j^{-1}\mathbf{t}_0 \mathbb{X}_j^{-1} & \mathbb{X}_j^{-1}\mathbf{r}'_0 \mathbb{X}_j \end{pmatrix}, \tag{3.111}$$

kde

$$\mathbb{X}_j = \begin{pmatrix} e^{ik_1 x_j} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & e^{ik_2 x_j} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}, \quad (\mathbb{X}_j)_{m,n} = e^{ik_m x_j}\delta_{m,n}. \tag{3.112}$$

Býva zvykom zapisovať vzťah (3.111) pomocou operácie $\otimes$ v tvare

$$\mathbb{S}_j = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{X}_j \\ \mathbb{X}_j & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{S}_0 \otimes \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{X}_j^{-1} \\ \mathbb{X}_j^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.113}$$

Čitateľ si s použitím operácie $\otimes$ ľahko overí, že posledný vzťah a vzťah (3.111) sú totožné.

3.6 Feynmannove dráhy

Teraz zadefinujeme pojem Feynmannových dráh. Najprv ukážeme, že inverznú maticu $\left[\mathbf{1} - \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\right]^{-1}$ je možné zapísať v tvare radu

$$\left[\mathbf{1} - \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\right]^{-1} = \mathbf{1} + \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2 + \dots \tag{3.114}$$

Na dôkaz správnosti rozvoja (3.114) nám stačí dokázať, že jeho pravá strana splňuje vzťah

$$\left[\mathbf{1} - \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\right]^{-1}\left[1 - \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\right] = \mathbf{1}. \tag{3.115}$$

Dosadíme (3.114) do (3.117) a uvedomíme si, že $|r_{m\to n}| < 1$. Dostaneme

$$\lim_{N\to\infty}\left[\mathbf{1} + \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\ +\ \dots + \left(\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\right)^N\right]\left[\mathbf{1} - \mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\right] = \mathbf{1} - \lim_{N\to\infty}\left[\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\right]^{N+1} = \mathbf{1}. \tag{3.116}$$

Podobne, inverznú maticu $\left[\mathbf{1} - \mathbf{r}_2\mathbf{r}_1\right]^{-1}$ môžeme rozvinúť ako

$$\left[\mathbf{1} - \mathbf{r}_2\mathbf{r}_1'\right]^{-1} = \mathbf{1} + \mathbf{r}_2\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2\mathbf{r}_1'\,\mathbf{r}_2\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2\mathbf{r}_1'\,\mathbf{r}_2\mathbf{r}_1'\,\mathbf{r}_2\mathbf{r}_1' + \dots. \tag{3.117}$$

Dosaďme rozvoj (3.114) do (3.107a) a rozvoj (3.117) do (3.107c). Dostaneme rozvoje

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_2\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{t}_1 + \dots \tag{3.118}$$

a

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{t}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{r}_1'\,\mathbf{r}_2\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{t}_1 + \dots \quad . \tag{3.119}$$

Vidíme teda, že maticové prvky $(\mathbf{t})_{nm}$ a $(\mathbf{r})_{nm}$ môžeme vyjadriť rozvojmi

$$(\mathbf{t})_{nm} = (\mathbf{t}_2\mathbf{t}_1)_{nm} + (\mathbf{t}_2\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{t}_1)_{nm} + (\mathbf{t}_2\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{t}_1)_{nm} + \dots \tag{3.120}$$

a

$$(\mathbf{r})_{nm} = (\mathbf{r}_1)_{nm} + (\mathbf{t}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{t}_1)_{nm} + (\mathbf{t}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{t}_1)_{nm} + (\mathbf{t}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{r}_1'\,\mathbf{r}_2\mathbf{r}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{t}_1)_{nm} + \dots \quad , \tag{3.121}$$

ktoré sa skladajú z nekonečného počtu členov a zaručene konvergujú.

Pozrime sa na rovnicu (3.121). Vieme, že $(\mathbf{r})_{nm}$ je amplitúda pravdepodobnosti, že elektrón, ktorý dopadá na prekážku zľava v kanáli m, sa od nej odrazí späť v kanáli n. Tento odrazový proces sa môže zrealizovať rozličnými spôsobmi, nazývanými Feynmannove dráhy. Aby bolo vidno, o čo ide, vyjadríme člen $(\mathbf{t}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{t}_1)_{nm}$ ako

$$(\mathbf{t}_1'\mathbf{r}_2\mathbf{t}_1)_{nm} = \sum_{n_1=1}^{N_{max}}\sum_{n_2=1}^{N_{max}}(\mathbf{t}_1')_{nn_2}(\mathbf{r}_2)_{n_2n_1}(\mathbf{t}_1)_{n_1m} \tag{3.122}$$

a podobne by sme mohli vyjadriť aj ďalšie členy na pravej strane rovnice (3.121). Vidno, že výraz $(\mathbf{t}_1')_{nn_2}(\mathbf{r}_2)_{n_2n_1}(\mathbf{t}_1)_{n_1m}$ je amplitúda pravdepodobnosti odrazu po nasledovnej dráhe: Elektrón prejde cez prekážku 1 zľava doprava a rozptýli sa pri tom z kanála m do kanála n_1, v kanáli n_1 dopadne na prekážku 2, od prekážky 2 sa odrazí späť (doľava) a rozptýli sa pri tom z n_1 do n_2, v kanáli n_2 dopadne na prekážku 1 zprava a prejde cez ňu doľava tak, že sa rozptýli z n_2 do n. Všimnime si, že pri popise dráhy sme výraz $(\mathbf{t}_1')_{nn_2}(\mathbf{r}_2)_{n_2n_1}(\mathbf{t}_1)_{n_1m}$ prečítali odzadu dopredu. Dvojitá suma na pravej strane rovnice

(3.122) obsahuje N_{max}^2 takýchto dráh. Nazývame ich Feynmannove dráhy. Keď si čitateľ podobným spôsobom rozpíše člen $(\mathbf{t'_1 r_2 r'_1 r_2 t_1})_{nm}$, nájde N_{max}^4 Feynmannových dráh, člen $(\mathbf{t'_1 r_2 r'_1\, r_2 r'_1 r_2 t_1})_{nm}$ bude obsahovať N_{max}^6 Feynmannových dráh, atď.

Kvôli úplnosti sa pozrime aj na rozvoj (3.120). Napríklad, člen $(\mathbf{t}_2\mathbf{r'_1 r_2}\mathbf{t}_1)_{nm}$ môžeme vyjadriť ako

$$(\mathbf{t}_2\mathbf{r'_1 r_2}\mathbf{t}_1)_{nm} = \sum_{n_1=1}^{N_{max}} \sum_{n_2=1}^{N_{max}} \sum_{n_3=1}^{N_{max}} (\mathbf{t}_2)_{nn_3}(\mathbf{r'_1})_{n_3n_2}(\mathbf{r_2})_{n_2n_1}(\mathbf{t}_1)_{n_1m}. \tag{3.123}$$

Vieme, že $(\mathbf{t})_{nm}$ je amplitúda pravdepodobnosti, že elektrón, ktorý dopadá na prekážku zľava v kanáli m, vyjde na druhej strane prekážky v kanáli n. Z toho je zrejmé, že výraz $(\mathbf{t}_2)_{nn_3}(\mathbf{r'_1})_{n_3n_2}(\mathbf{r_2})_{n_2n_1}(\mathbf{t}_1)_{n_1m}$ je amplitúda pravdepodobnosti prechodu po nasledovnej Feynmannovej dráhe: Elektrón prechádza cez prekážku 1 a rozptyľuje sa pri tom z m do n_1, v kanáli n_1 dopadá na prekážku 2, od nej sa odrazí naspäť (doľava) a zároveň rozptýli z n_1 do n_2, v kanáli n_2 dopadne na prekážku 1 z pravej strany a odrazí naspäť (doprava) do kanála n_3, v kanáli n_3 dopadne znovu na prekážku 2 a vyjde za ňou v kanáli m. Podobne môžeme pomocou Feymnannových dráh vyjadriť aj ostatné členy rozvoja (3.120).

Amplitúdy $(\mathbf{r})_{nm}$ a $(\mathbf{t})_{nm}$ teda môžeme vyjadriť ako sumy amplitúd všetkých možných Feynmannovych dráh. Keďže rozvoje (3.118) a (3.119) obsahujú nekonečne veľa členov, nekonečný je aj počet možných Feynmannových dráh. Z tohto dôvodu nie je pojem Feynmannovej dráhy moc užitočný pre kvantitatívne numerické výpočty. Neskôr však uvidíme, že Feynmannové dráhy umožňujú pochopiť fyzikálnu podstatu niektorých mezoskopických javov tak, ako to algebra matíc rozptylu neumožňuje.

3.7 Rozptylová matica dvojrozmernej prekážky modelovanej dvojrozmernou δ-funkciou

Pripomeňme najprv, čo sme sa v tejto kapitole doposiaľ stihli naučiť. Uvažovali sme mezoskopický vodič s rozptyľujúcou prekážkou, ktorou môžu byť náhodne rozmiestnené prímesy (obr. 3.2) alebo nejaký iný typ neusporiadanosti, jednoducho disorder. Ukázali sme, že dvojterminálová vodivosť mezoskopického vodiča s ľubovoľným disorderom je popísaná Landauerovou formulou (vzťah (3.22)), ktorá hovorí, že vodivosť je súčet štvorcov transmisných amplitúd v jednotlivých vodivostných kanáloch. Výpočet týchto transmisných amplitúd pre daný disorder umožňuje metóda rozptylových matíc. Rozptylovú maticu prekážky, ktorá sa skladá zo za sebou nasledujúcich jednotlivých prekážok (napríklad prímesných atómov), môžeme vypočítať tak, že vezmeme rozptylové matice jednotlivých prekážok a celkovú maticu z nich zložíme pomocou vzťahu (3.110) a špeciálne definovanej operácie skladania matíc (vzťahy (3.107)). Pri tom sme mlčky predpokladali, že rozptylové matice jednotlivých rozptyľovačov poznáme. Ak by sme chceli urobiť numerické výpočty vodivosti pre konkrétny disorder, potrebujeme ešte určiť rozptylové matice kokrétnych jednotlivých rozptylovačov. V tomto odseku ukážeme, ako odvodiť rozptylovú maticu jedného prímesného atomu z obrázku 3.2, na ktorom uvažujeme prímesné atómy ako bodové rozptylovače. Rozptylový potenciál bodového rozptylovača lokalizovaného v bode $(x_i, y_i))$ má tvar $V(x,y) \propto \delta(x-x_i)\delta(y-y_i)$ a v prvom priblížení ním môžeme modelovať napr. silno tienený coulombovský potenciál ionizovaného donora alebo akceptora alebo krátkodosahový potenciál neutrálnej prímesi. Keď odvodíme rozptylovú maticu jednej takejto prímesi, čitateľ bude mať v rukách kompletný nástroj na numerický výpočet vodivosti mezoskopickej vzorky s konkrétnou konfiguráciou prímesí.

Hľadáme teda S-maticu jednej δ-bariéry umiestnenej v bode $(0, y_i)$. Jej potenciál v dvojrozmernej Schrödingerovej rovnici (3.5)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+U\left(y\right)+U_I\left(x,y\right)\right]\psi(x,y)=E_F\psi(x,y),$$

je

$$U_I(x,y) = U_0\,\delta(x)\delta(y-y_i). \tag{3.124}$$

Do Schrödingerovej rovnice (3.5) dosadíme potenciál prímesi (3.124) a preintegrujeme pravú aj ľavú stranu cez x v infinitezimálne malom okolí bariéry. Dostaneme

$$\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}\,|_{x=0+\epsilon}-\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}\,|_{x=0-\epsilon}=\frac{mU_0}{\hbar^2}\delta(y-y_i)\left(\psi(0-\epsilon,y)+\psi(0+\epsilon,y)\right). \tag{3.125}$$

Využili sme pritom nasledovné vzťahy vyplývajúce z podmienky spojitosti funkcie $\phi(x, y)$ v okolí nuly:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi(x,y)dx=0, \tag{3.126}$$

$$\phi(0-\epsilon,y)\approx\phi(0+\epsilon,y), \tag{3.127}$$

a teda

$$\phi(0,y)\approx\frac{\phi(0-\epsilon,y)+\phi(0+\epsilon,y)}{2}. \tag{3.128}$$

Rovnice (3.127) a (3.125) nám umožnia po dosadení konkrétneho tvaru riešenia $\phi(x, y)$ určiť prvky matice S.

Nech na prekážku (δ-bariéru) dopadá rovinná vlna zľava v kanáli n_0. 0becné riešenie (3.39) nadobudne tvar

$$\psi^+_{n_0}(x,y)=\begin{cases}\phi^+_{n_0}(x,y)+\sum\limits_{n'=1}^{N_{max}}r_{n'n_0}\phi^-_{n'}(x,y), & x<0\\ \sum\limits_{n'=1}^{N_{max}}t_{n'n_0}\phi^+_{n'}(x,y), & x>0\,.\end{cases} \tag{3.129}$$

kde

$$\phi^\pm_n(x,y)=\frac{1}{\sqrt{v_n}}e^{\pm ik_nx}\chi_n(y) \tag{3.130}$$

Toto riešenie dosadíme do rovnice (3.125), vynásobíme funkciou $\chi^*_n(y)$, preintegrujeme cez y a využijeme podmienku ortonormálnosti

$$\int_0^W\chi^*_n(y)\chi_{n'}(y)dy=\delta_{nn'}\quad.$$

Získame rovnicu

$$\sum_{n'=1}^{N_{max}}\delta_{nn'}\,k_{n'}\frac{1}{\sqrt{v_{n'}}}\left[t_{n'n_0}-(-r_{n'n_0})\right]-k_{n_0}\frac{1}{\sqrt{v_{n_0}}}\,\delta_{nn_0}=$$
$$-\,i\sum_{n'=1}^{N_{max}}\Gamma_{nn'}\frac{1}{\sqrt{v_{n'}}}\left[t_{n'n_0}+r_{n'n_0}\right]-i\Gamma_{nn_0}\frac{1}{\sqrt{v_{n_0}}}. \tag{3.131}$$

V maticovom zápise má posledná rovnica tvar

$$\mathbf{K}\,\mathbf{C}\;[\mathbf{t}+\mathbf{r}-\mathbf{I}] = -i\boldsymbol{\Gamma}\,\mathbf{C}\,(\mathbf{t}+\mathbf{r}+\mathbf{I}) \tag{3.132}$$

s maticovými prvkami

$$\Gamma_{nn'} = \frac{mU_0}{\hbar^2}\chi_n^*(y_i)\chi_{n'}(y_i)\ , \tag{3.133}$$

$$K_{nn'} = k_{n'}\delta_{nn'}\ , \tag{3.134}$$

$$C_{nn'} = \frac{1}{\sqrt{v_{n'}}}\delta_{nn'} \tag{3.135}$$

a $\mathbf{I}$ je jednotková matica.
Riešenie $\psi^+_{n_0}(x,y)$ dané rovnicou (3.129) dosadíme aj do podmienky spojitosti (3.127). Opäť vynásobíme obe strany získanej rovnice funkciou $\chi_n^*(y)$, preintegrujeme cez y a využijeme podmienku ortonormálnosti funkcií $\chi_n^*(y)$ a $\chi_{n'}^*(y)$.
Dostaneme rovnicu

$$\frac{1}{\sqrt{v_{n_0}}}\delta_{nn_0} + \sum_{n'=1}^{N_{max}}\frac{1}{\sqrt{v_{n'}}}\delta_{nn'}\,r_{n'n_0} = \sum_{n'=1}^{N_{max}}\frac{1}{\sqrt{v_{n'}}}\delta_{nn'}\,t_{n'n_0}\ . \tag{3.136}$$

V maticovom zápise má (3.136) tvar

$$\mathbf{C}+\mathbf{C}\,\mathbf{r} = \mathbf{C}\,\mathbf{t}\ . \tag{3.137}$$

Po prenásobení pravej aj ľavej strany (3.137) maticou $\mathbf{C}^{-1}$ dostaneme

$$\mathbf{I}+\mathbf{r} = \mathbf{t} \tag{3.138}$$

Keď do (3.132) dosadíme za $\mathbf{r}$ vzťah z (3.138), dostaneme maticovú rovnicu pre $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{C}\;[\mathbf{t}-\mathbf{I}] = -i\boldsymbol{\Gamma}\,\mathbf{C}\mathbf{t}\ . \tag{3.139}$$

Túto už môžeme jednoducho riešiť:

$$(\mathbf{K}+i\boldsymbol{\Gamma})\;\mathbf{C}\,\mathbf{t} = \mathbf{K}\mathbf{C}\,, \tag{3.140}$$

odtiaľ:

$$\mathbf{t} = \mathbf{C}^{-1}\;(\mathbf{K}+i\boldsymbol{\Gamma})^{-1}\;\mathbf{K}\mathbf{C}. \tag{3.141}$$

Teraz dosadíme (3.141) do (3.132) a jednotkovú maticu $\mathbf{I}$ zapíšeme ako súčin matice $(\mathbf{K}+i\boldsymbol{\Gamma})\,\mathbf{C}$ a matice k nej inverznej

$$\mathbf{I} = [(\mathbf{K}+i\boldsymbol{\Gamma})\,\mathbf{C}]^{-1}\,[(\mathbf{K}+i\boldsymbol{\Gamma})\,\mathbf{C}] = \mathbf{C}^{-1}\;(\mathbf{K}+i\boldsymbol{\Gamma})^{-1}\,(\mathbf{K}+i\boldsymbol{\Gamma})\,\mathbf{C}\ .$$

Pre $\mathbf{r}$ potom dostaneme

$$\mathbf{r} = \mathbf{C}^{-1}\;(\mathbf{K}+i\boldsymbol{\Gamma})^{-1}\;\mathbf{K}\mathbf{C}\;+\;\mathbf{C}^{-1}\;(\mathbf{K}+i\boldsymbol{\Gamma})^{-1}\;(\mathbf{K}+i\boldsymbol{\Gamma})\,\mathbf{C} \tag{3.142}$$

a odtiaľ po úprave

$$\mathbf{r} = -i\,\mathbf{C}^{-1}\;(\mathbf{K}+i\boldsymbol{\Gamma})^{-1}\;\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{C}. \tag{3.143}$$

Keď na prekážku (δ-bariéru) necháme dopadať rovinnú vlnu v kanáli n_0 sprava, dostaneme z obecného riešenia (3.39) tvar

$$\psi^-_{n_0}(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{n'=1}^{N_{max}} t'_{n'n_0}\phi^-_{n'}(x,y), & x<0 \\ \phi^-_{n_0}(x,y) + \sum\limits_{n'=1}^{N_{max}} r'_{n'n_0}\phi^+_{n'}(x,y), & x>0 \end{cases} \tag{3.144}$$

Riešenie opäť dosadíme do rovnice (3.125), vynásobíme funkciou $\chi^*_n(y)$, preintegrujeme podľa y a využijeme podmienku ortonormálnosti. Získame rovnicu pre prvky submatíc $\mathbf{r}'$ a $\mathbf{t}'$

$$\begin{aligned} &- k_{n_0}\frac{1}{\sqrt{v_{n_0}}}\delta_{nn_0} + \sum_{n'=1}^{N_{max}} \delta_{nn'}\, k_{n'}\frac{1}{\sqrt{v_{n'}}}\left[r'_{n'n_0} - \left(-t'_{n'n_0}\right)\right] = \\ &\qquad\qquad - i\Gamma_{nn_0}\frac{1}{\sqrt{v_{n_0}}} - i\sum_{n'=1}^{N_{max}} \Gamma_{nn'}\frac{1}{\sqrt{v_{n'}}}\left[t'_{n'n_0} + r'_{n'n_0}\right] \;, \end{aligned} \tag{3.145}$$

v maticovom zápise :

$$\mathbf{K}\,\mathbf{C}\,\left[-\mathbf{I} + \mathbf{r}' + \mathbf{t}'\right] = -i\mathbf{\Gamma}\,\mathbf{C}\left(\mathbf{I} + \mathbf{r}' + \mathbf{t}'\right) \tag{3.146}$$

Riešenie $\psi^-_{n_0}(x,y)$ (3.144) opäť dosadíme aj do podmienky spojitosti (3.128) a dostaneme rovnicu

$$\mathbf{t}' = \mathbf{I} + \mathbf{r}' \tag{3.147}$$

Za $\mathbf{r}'$ opäť dosadíme z (3.147) do (3.146), aby sme dostali maticovú rovnicu pre $\mathbf{t}'$

$$\mathbf{K}\,\mathbf{C}\,\left[\mathbf{t}' - \mathbf{I}\right] = -i\mathbf{\Gamma}\,\mathbf{C}\mathbf{t}'\;, \tag{3.148}$$

ktorej riešenie je (analogicky dopadu vlny zľava)

$$\mathbf{t}' = \mathbf{C}^{-1}\,\left(\mathbf{K} + i\mathbf{\Gamma}\right)^{-1}\,\mathbf{K}\mathbf{C}. \tag{3.149}$$

Opäť dosadíme (3.149) do (3.146), jednotkovú maticu zapíšeme s tvare súčinu

$$\mathbf{I} = \mathbf{C}^{-1}\,\left(\mathbf{K} + i\mathbf{\Gamma}\right)^{-1}\left(\mathbf{K} + i\mathbf{\Gamma}\right)\mathbf{C}\;,$$

dostaneme

$$\mathbf{r}' = \mathbf{C}^{-1}\,\left(\mathbf{K} + i\mathbf{\Gamma}\right)^{-1}\,\mathbf{K}\mathbf{C} \;+\; \mathbf{C}^{-1}\,\left(\mathbf{K} + i\mathbf{\Gamma}\right)^{-1}\,\left(\mathbf{K} + i\mathbf{\Gamma}\right)\mathbf{C} \tag{3.150}$$

a po úprave:

$$\mathbf{r}' = -i\,\mathbf{C}^{-1}\,\left(\mathbf{K} + i\mathbf{\Gamma}\right)^{-1}\,\mathbf{\Gamma}\mathbf{C}. \tag{3.151}$$

Rozptylová matica $\mathbf{S}$ pre δ-bariéru má teda tvar

$$S \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{t}' \\ \mathbf{t} & \mathbf{r}' \end{pmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} -iC^{-1}\left(K + i\Gamma\right)^{-1}\Gamma C & C^{-1}\left(K + i\Gamma\right)^{-1}KC \\ C^{-1}\left(K + i\Gamma\right)^{-1}KC & -iC^{-1}\left(K + i\Gamma\right)^{-1}\Gamma C \end{bmatrix}. \tag{3.152}$$

Ako jednoduchý príklad hľadajme teraz S-maticu δ-bariéry v situácii kedy je obsadený len jeden subpás a evanescentné stavy môžeme zanedbať. Potom riešenie Schrödingerovej rovnice (3.5) pre vlnu dopadajúcu zľava na prekážku je

$$\psi^+(x,y) = \begin{cases} \phi^+(x,y) + r\phi^-(x,y), & x < 0 \\ t\phi^+(x,y), & x > 0 \,. \end{cases} \tag{3.153}$$

a pre vlnu dopadajúcu sprava

$$\psi^-(x,y) = \begin{cases} t'\phi^-(x,y), & x < 0 \\ \phi^-(x,y) + r'\phi^+(x,y), & x > 0 \end{cases} \tag{3.154}$$

kde

$$\phi^\pm(x,y) = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{\pm ikx}\chi(y) \tag{3.155}$$

Najprv dosadíme do rovnice (3.125) riešenie $\psi^+(x,y)$ pre vlnu dopadajúcu zľava, vynásobíme rovnicu funkciou $\chi^*(y)$, preintegrujeme cez y a využijeme normovanosť funkcie $\chi(y)$. Dostaneme

$$k\,[t - (1-r)] = -i\Gamma\,[1 + r + t]\,. \tag{3.156}$$

kde

$$\Gamma = \frac{mU_0}{\hbar^2}\chi^*(y_i)\chi(y_i). \tag{3.157}$$

Riešenie $\psi^+(x,y)$ dosadíme aj do podmienky spojitosti (3.127). Opäť vynásobíme obe strany získanej rovnice funkciou $\chi^*(y)$ a preintegrujeme cez y. Dostaneme jednoduchý vzťah

$$(1 + r) = t \tag{3.158}$$

Riešením jednoduchej sústavy rovníc (3.156) a (3.158) je

$$r = \frac{-i\Gamma}{k + i\Gamma} \tag{3.159}$$

a

$$t = \frac{k}{k + i\Gamma}\,. \tag{3.160}$$

Teraz dosadíme do rovnice (3.125) riešenie $\psi^-(x,y)$ pre vlnu dopadajúcu na prekážku sprava. Úplne rovnakým postupom, ako pre vlnu dopadajúcu zľava, dostaneme rovnice

$$k\,[-1 + r' - (-t')] = -i\Gamma\,[1 + r' + t']\,. \tag{3.161}$$

a

$$(1 + r') = t'\,. \tag{3.162}$$

Z nich

$$r' = \frac{-i\Gamma}{k + i\Gamma} \tag{3.163}$$

a

$$t' = \frac{k}{k + i\Gamma} \tag{3.164}$$

Výsledná rozptylová matica **S** je

$$\mathbf{S} = \frac{1}{(k + i\Gamma)}\begin{pmatrix} -i\Gamma & k \\ k & -i\Gamma \end{pmatrix}\,. \tag{3.165}$$

Kapitola 4

Analýza merania odporu mezoskopického vodiča

4.1 Mnohoterminálový koherentný vodič v Büttikerovom formalizme

V predchádzajúcej kapitole sme uvažovali mezoskopický vodič s prekážkou, pripojený na dva kontakty (terminály) s rozdielnymi chemickými potenciálmi (obr. 3.1). Ukázali sme, že v tomto prípade je prúd daný vzťahom

$$I = GU, \tag{4.1}$$

kde

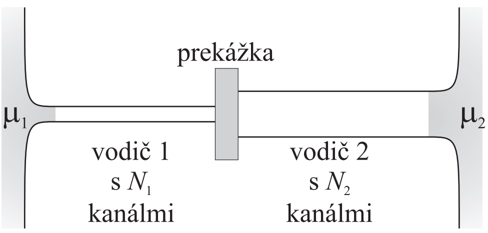
$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} |t_{mn}(E_F)|^2 \tag{4.2}$$

je Landauerova formula pre vodivosť a t_{mn} je amplitúda pravdepodobnosti, že elektrón dopadajúci na prekážku zľava v kanáli n vyjde za prekážkou na pravej strane v kanáli m.

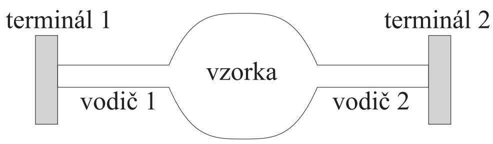
Formulu (4.2) môžeme zobecniť na situáciu z obr. 4.1, kedy je pred prekážkou vodič s N_1 kanálmi a za prekážkou vodič s N_2 kanálmi. Dostaneme

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} |t_{mn}(E_F)|^2. \tag{4.3}$$

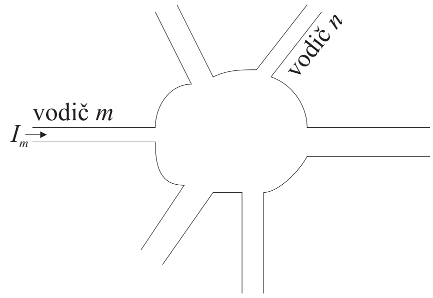
Táto formula zrejme platí aj pre situáciu na obrázku 4.2, kde prekážku nahradzuje obecnejší pojem vzorka a pod vodičmi máme na mysli ideálne prívody bez akýchkoľvek rozptylovačov – mnohokanálové drôty s konštantným prierezom pozdĺž drôtu.



Obr. 4.1:



Obr. 4.2:



Obr. 4.3:

Teraz rovnice (4.1) a (4.3) zobecníme pre vzorku s mnohými terminálmi, ukázanú schematicky na obr. 4.3. Nech N_m je počet kanálov v prívode m a N_n počet kanálov v prívode n. Urobme konvenciu, že prúd vtekajúci do prívodu zvonku (z terminálu) je kladný. Uvažujme prívod m a v ňom kanál α. Nech je chemický potenciál terminálu m zmenený z hodnoty E_F o malú hodnotu $\delta\mu_m = -eV_m$, kde V_m je napätie aplikované na terminál m. Potom čistý nerovnovážny prúd, ktorý dopadá v „stave“ $\{m, \alpha\}$ na vzorku, je

$$\begin{aligned} I_{m\alpha}^{\text{dopad}} &= -\, e\, \frac{2}{2\pi} \int_0^\infty \{\theta(\mu_m - E_{m,\alpha}) - \theta(E_F - E_{m,\alpha})\}\, \frac{1}{\hbar}\, \frac{dE_{m,\alpha}}{dk}\, dk \\ &= -\frac{2e}{h} \int_{E_F}^{\mu_m} dE_{m,\alpha} = -\frac{2e}{h}\, \delta\mu_m = \frac{2e^2}{h}\, V_m\ , \end{aligned} \tag{4.4}$$

kde $E_{m,\alpha}(k)$ je energia elektrónu s vlnovým vektorom k a $\theta(\mu_m - E_{m,\alpha})$ je Fermiho distribučná funkcia pri absolútnej nule [$\theta(z) = 1$ pre $z > 0$ a $\theta(z) = 0$ pre $z < 0$]. Z elektrónov obsiahnutých v $I_{m\alpha}^{\text{dopad}}$ vstúpi do kanála β v prívode n príspevok

$$-I_{m\alpha}^{\text{dopad}}\, |t_{n\beta,m\alpha}|^2, \tag{4.5}$$

kde $|t_{n\beta,m\alpha}|^2$ je pravdepodobnosť prechodu z $\{m, \alpha\}$ do $\{n, \beta\}$ a $t_{n\beta,m\alpha}$ je amplitúda pravdepodobnosti. Prúd v prívode n nesený elektrónmi prichádzajúcimi z prívodu m je

$$I_{nm} = -\frac{2e^2}{h}\, V_m \sum_{\beta=1}^{N_n} \sum_{\alpha=1}^{N_m} |t_{n\beta,m\alpha}|^2. \tag{4.6}$$

V ďalšom už budeme potrebovať len označenie

$$T_{nm} = \sum_{\beta=1}^{N_n} \sum_{\alpha=1}^{N_m} |t_{n\beta,m\alpha}|^2, \quad R_m = \sum_{\beta=1}^{N_m} \sum_{\alpha=1}^{N_m} |r_{m\beta,m\alpha}|^2, \tag{4.7}$$

kde sme definovali aj reflexnú amplitúdu $r_{m\beta,m\alpha}$ pre elektróny dopadajúce na vzorku v prívode m. Čistý prúd injektovaný z prívodu m do vzorky je

$$I_{mm} = \frac{2e^2}{h}\, (N_m - R_m)\, V_m \tag{4.8}$$

a celkový prúd tečúci prívodom m je evidentne

$$I_m = \frac{2e^2}{h} \Big[(N_m - R_m)\, V_m - \sum_{\forall\, n \neq m} T_{mn}\, V_n \Big]. \tag{4.9}$$

Rovnice (4.9) sa nazývajú *Büttikerove rovnice* alebo *Büttikerove formuly*. Vyjadrujú, aký prúd tečie v prívodoch v mnohoterminálovom mezoskopickom systéme a sú vlastne kvantovou obdobou Kirchhoffových zákonov.

Vyšetrime vlastnosti formuly (4.9) platiace bez ohľadu na konkrétnu fyziku koeficientov T_{mn}. Prúd I_{mm} daný vzťahom (4.8) musí byť rovný prúdu injektovanému z m do všetkých ostatných n prívodov, t.j.

$$I_{mm} + \sum_{\forall\, n \neq m} I_{nm} = 0. \tag{4.10}$$

Posledný vzťah po využití (4.6), (4.7) a (4.8) dáva sumačné pravidlo

$$R_m + \sum_{\forall\, n \neq m} T_{nm} = N_m, \tag{4.11}$$

čo je zovšeobecnenie vzťahu $R + T = 1$ pre jeden kanál.

Ak v rovnici (4.9) vezmeme všetky napätia rovnaké, potom prúd I_m na jej ľavej strane musí byť nulový pre všetky m. Dostaneme sumačné pravidlo

$$R_m + \sum_{\forall\, n \neq m} T_{mn} = N_m, \tag{4.12}$$

Z rovníc (4.11) a (4.12) dostaneme

$$\sum_n T_{mn} = \sum_n T_{nm}, \quad \text{kde } T_{mm} \equiv R_m. \tag{4.13}$$

Poznamenajme, že platí aj symetria

$$T_{mn} = T_{nm}, \tag{4.14}$$

ktorá však z rovnice (4.13) nevyplýva pokiaľ neuvažujeme dvojterminálový prípad. Symetria (4.14) platí ako dôsledok symetrie Schrodingerovej rovnice vzhľadom na obrátenie času. V prípade nenulového magnetického poľa B vzťah (4.14) neplatí, ale platí

$$T_{mn}(B) = T_{nm}(-B). \tag{4.15}$$

Konečne, rovnice (4.13) umožňujú prepísať Büttikerov vzťah (4.9) vo forme

$$I_m = \frac{2e^2}{h} \sum_{\forall\, n \neq m} (T_{nm} V_m - T_{mn} V_n) \tag{4.16a}$$

alebo aj

$$I_m = \frac{2e^2}{h} \sum_{\forall\, n \neq m} T_{mn} (V_m - V_n) = \sum_{\forall\, n \neq m} G_{mn} (V_m - V_n), \tag{4.16b}$$

kde $G_{mn} = \frac{2e^2}{h} T_{mn}$ je koherentná vodivosť medzi terminálmi m a n. Je zobecnením Landauerovej formuly pre mnohoterminálový systém, rovnica (4.16b) sa v dvojterminálovom prípade zhoduje s (4.1)

4.2 Aplikácia Büttikerovej formuly na trojterminálový systém

Uvažujme trojterminálový systém z obr. 4.4, vychádzajúc z Büttikerových rovníc (4.16b). Bez újmy na obecnosti položme $V_1 = 0$ ako referenčné napätie. Dostaneme

$$\begin{aligned} I_1 = -I &= \frac{2e^2}{h}\,(-T_{12}\,V_2 - T_{13}\,V_3), \\ I_2 = I &= \frac{2e^2}{h}\,[(T_{21} + T_{23})\,V_2 - T_{23}\,V_3], \\ I_3 = 0 &= \frac{2e^2}{h}\,[-T_{32}\,V_2 + (T_{31} + T_{32})\,V_3]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Sčítaním týchto rovníc dostaneme nulu na ich oboch stranách, čo znamená, že jedna z rovníc je prebytočná a možno ju vynechať. Z (4.17) dostaneme vzťah

$$\frac{I}{V_2} = \frac{2e^2}{h}\Big(T_{12} + \frac{T_{13}\,T_{32}}{T_{31} + T_{32}}\Big), \tag{4.18}$$

ktorý sa dá písať s využitím vzťahu $T_{31} + T_{32} = T_{13} + T_{23}$ vo forme

$$\frac{I}{V_2} = \frac{2e^2}{h}\Big(T_{12} + \frac{T_{13}\,T_{32}}{T_{13} + T_{23}}\Big). \tag{4.19}$$

Vodivosť I/V_2 sa skladá z dvoch príspevkov. Príspevok úmerný T_{12} je tzv. priamy príspevok — Landauerova formula. Príspevok úmerný $T_{13}\,T_{32}/(T_{13} + T_{23})$ sa nazýva nepriamy a pochádza od elektrónov, ktoré idú z 1 do 3 a z 3 do 2. Z (4.17) dostaneme aj vzťah

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{T_{32}}{T_{31} + T_{32}} = \frac{T_{32}}{T_{13} + T_{23}}, \tag{4.20}$$

ktorý hovorí, že potenciál V_3, ktorý nameria sonda 3, závisí od jej vlastností. Ak v (4.19) položíme $T_{12} = 0$, tak

$$\frac{I}{V_2} = \frac{2e^2}{h}\,\frac{T_{13}\,T_{32}}{T_{13} + T_{23}}, \quad \text{resp.} \quad \frac{V_2}{I} = \frac{h}{2e^2}\Big(\frac{1}{T_{13}} + \frac{1}{T_{32}}\Big), \tag{4.21}$$

kde vzťah pre $\frac{V_2}{I}$ sme získali jednoduchou úpravou pomocou sumačných pravidiel pre T_{ij}. Vzťah pre $\frac{V_2}{I}$ hovorí, že odpor medzi elektródami 1 a 2 je daný ako nekoherentný (ohmický) súčet odporov $1/T_{13}$ a $1/T_{32}$. Nepriamy príspevok $T_{13}\,T_{32}/(T_{13}+T_{23})$ teda v rovnici (4.19) narušuje koherenciu, resp. zavádza čiastočnú koherenciu.

Uvažujme trojterminálový systém (obr. 4.4b), ktorý vznikne keď pripojíme napäťovú sondu 3 na dvojterminálový balistický vodič. Uvažujme pre jednoduchosť jednokanálový vodič. Pred pripojením sondy 3 je $T_{12} = 1$. Predpokladajme, že sonda 3 je slabo invazívna, t.j. že v rovnici (4.19) je $T_{12} \approx 1$ a zároveň $T_{12} \gg T_{13}\,T_{32}/(T_{13}+T_{23})$. Výsledná vodivosť $\frac{I}{V_2} \approx \frac{2e^2}{h} T_{12} \approx \frac{2e^2}{h}$ je balistická, avšak stále platí vzťah (4.20), podľa ktorého sonda 3 meria potenciál závislý od jej vlastností. Podľa obrázku 2.8 má sonda 3 namerať $\frac{V_3}{V_2} = \frac{1}{2}$. Rovnosť $\frac{V_3}{V_2} = \frac{1}{2}$ však dostaneme len pre $T_{32} = T_{31} = T_{23}$, teda vtedy, ak je spoj medzi balistickým vodičom a napäťovou sondou dokonale symetrický.

4.3 Štvorbodové meranie odporu v Büttikerovom formalizme

Na obrázku 4.5 je štvorterminálový systém, ktorý meria odpor prekážky v strede vodiča. Napíšme pre tento systém Büttikerove rovnice (4.16b) v maticovom tvare ako

$$\begin{pmatrix} T_{12}+T_{13}+T_{14} & -T_{12} & -T_{13} & -T_{14} \\ -T_{21} & T_{21}+T_{23}+T_{24} & -T_{23} & -T_{24} \\ -T_{31} & -T_{32} & T_{31}+T_{32}+T_{34} & -T_{34} \\ -T_{41} & -T_{42} & -T_{43} & T_{41}+T_{42}+T_{43} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \frac{h}{2e^2} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \frac{h}{2e^2} \begin{pmatrix} -I \\ I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Bez ujmy na všeobecnosti položíme $V_3 = 0$. Potom je jedna z rovníc prebytočná a môžeme vynechať napríklad prvú z nich. V maticovom zápise tak dostaneme

$$\begin{pmatrix} -T_{21} & T_{21}+T_{23}+T_{24} & -T_{24} \\ -T_{31} & -T_{32} & -T_{34} \\ -T_{41} & -T_{42} & T_{41}+T_{42}+T_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_4 \end{pmatrix} = \frac{h}{2e^2} \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Neznáme V_1, V_2, V_4 sa ľahko vyjadria cez koeficienty T_{mn} a cez I. Definujme odpor

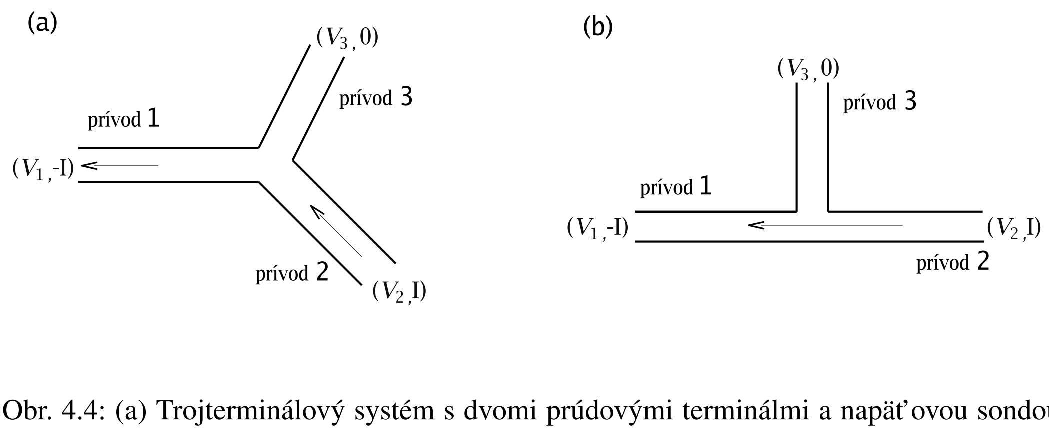
$$R_{mn,pq} \equiv \frac{V_p - V_q}{I_{n \leftarrow m}}. \quad (4.24)$$

Z (4.23) a (4.24) dostaneme

$$R_{21,43} = \frac{V_4 - V_3}{I} = \frac{h}{2e^2} \frac{T_{42}T_{31} - T_{41}T_{32}}{S}, \quad (4.25)$$

$$R_{21,21} = \frac{V_2 - V_1}{I} = \frac{h}{2e^2} \frac{(T_{31}+T_{32}+T_{34})(T_{41}+T_{42}+T_{43}) - T_{34}T_{43}}{S}, \quad (4.26)$$

kde S je determinant matice v (4.23). Odpor $R_{21,43}$ je výsledkom štvorbodového merania a očividne závisí od vlastností meracích sond 3 a 4. Sondy 3 a 4 ovplyvňujú aj odpor $R_{21,21}$, meraný medzi terminálmi 1 a 2.



Obr. 4.4: (a) Trojterminálový systém s dvomi prúdovými terminálmi a napäťovou sondou 3. (b) To isté pre rovný balistický vodič

Historicky dôležitá je analýza merania odporu prekážky s transmisiou T umiestnenej v strede *jednokanálového* kvantového drôtu. Predpokladajme, že sondy 3 a 4 sú slabo invazívne, tj., že všetky transmisné koeficienty obsahujúce indexy 3 a 4 sú malé v porovnaní s koeficientami T_{12} a T_{21}, takže vplyv sónd 3 a 4 na T_{12} a T_{21} môžeme zanedbať. Vtedy

$$T_{12} = T_{21} = T. \tag{4.27}$$

Nech

$$T_{31} = \alpha, \qquad T_{32} = \beta \tag{4.28}$$

kde α, β sú rádu $\delta \ll 1$. Potom koeficient $T_{34} = \gamma$ je rádu δ^2, pretože popisuje prechod cez dva slabo prepúšťajúce spoje. To isté platí zrkadlovo symetricky pre koeficienty sondy 4. Dostaneme

$$S = \begin{vmatrix} -T & T & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \\ -\beta & -\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} \approx T(\alpha+\beta)^2, \tag{4.29}$$

ak podržíme len členy do najnižšieho rádu v δ. Potom (4.25) a (4.26) dajú

$$R_{21,43} \approx \frac{h}{2e^2}\,\frac{\alpha^2-\beta^2}{S} \approx \frac{h}{2e^2}\,\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{1}{T}, \tag{4.30}$$

$$R_{21,21} \approx \frac{h}{2e^2}\,\frac{(\alpha+\beta)^2-\gamma^2}{S} \approx \frac{h}{2e^2}\,\frac{1}{T}. \tag{4.31}$$

Predpokladajme ešte, že prúd zo sondy 3 sa rozdeľuje rovnako do oboch smerov tak, ako je to znázornené na obrázku 4.5 vpravo. Vidno, že

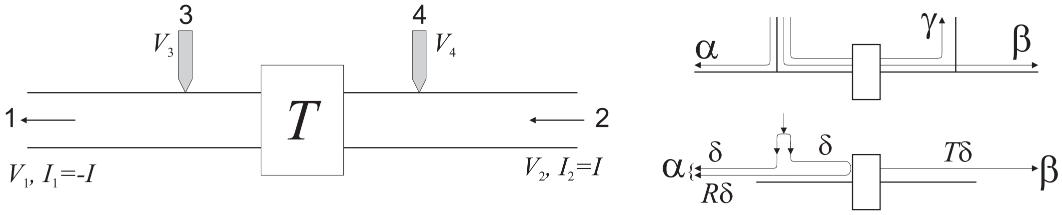
$$\alpha = (1+R)\,\delta, \qquad \beta = T\delta. \tag{4.32}$$

Vzťahy (4.32) sú semiklasické, pretože do nich nevstupuje vplyv interferencie medzi dopadajúcimi a odrazenými elektrónovými vlnami. Teraz použijeme tieto semiklasické vzťahy, vplyv interferencie budeme analyzovať v poslednom odseku tejto kapitoly. Ak vzťahy (4.32) dosadíme do (4.30), konečné výsledky sú

$$R_{21,43} \approx \frac{h}{2e^2}\,\frac{1-T}{T}, \qquad R_{21,21} \approx \frac{h}{2e^2}\,\frac{1}{T}. \tag{4.33}$$

Druhý z týchto výsledkov sa zhoduje s dvojterminálovým odporom

$$R_0 \equiv \frac{1}{G} = \frac{h}{2e^2}\,\frac{1}{T}, \tag{4.34}$$



Obr. 4.5: Štvorterminálový systém.

ktorý dostaneme, keď Landauerovu vodivosť (3.4) zapíšeme pre jeden kanál a prevrátime. Prepíšme ešte (4.34) ako

$$R_0 \equiv \frac{1}{G} = \frac{h}{2e^2}\frac{(T+R)}{T} = \underbrace{\frac{h}{2e^2}}_{R_{\text{kontakt}}} + \underbrace{\frac{h}{2e^2}\frac{R}{T}}_{R_{\text{drôt}}}, \tag{4.35}$$

kde R je pravdepodobnosť odrazu a $T+R=1$. Podľa vzťahu (4.35) prekážka v 1D drôte pridáva ku fundamentálnemu kontaktnému odporu $h/2e^2$ sériový odpor

$$R_{\text{drôt}} = \frac{h}{2e^2}\frac{R}{T}, \tag{4.36}$$

ktorý je totožný s výsledkom (4.33) pre štvorterminálový odpor $R_{21,43}$. V literatúre sa názov Landauerova formula používa pre vzťah $R_0 = \frac{h}{2e^2}\frac{1}{T}$ a aj pre vzťah $R_{\text{drôt}} = \frac{h}{2e^2}\frac{R}{T}$. Rozdiel medzi obidvomi vzťahmi bol zdrojom rozporov, kým sa nevyjasnilo, že prvá z formúl platí pre dvojbodové meranie odporu (keď sa meria potenciálový rozdiel medzi prúdovými terminálmi) a druhá pre štvorbodové meranie odporu, keď sa meria potenciálový spád priamo v drôte. V zostávajúcich odsekoch tejto kapitoly budeme štvorbodové meranie odporu analyzovať ešte raz s dôrazom na otázku, ako sa mení potenciál pozdĺž drôtu. V poslednom odseku budeme uvažovať aj tzv. fázovocitlivé meranie, pri ktorom semiklasické vzťahy (4.32) neplatia a výsledný odpor je poznamenaný interferenciou.

4.4 Ako sa mení potenciál v okolí prekážky?

V tomto odseku budeme uvažovať jednokanálový vodič a formulu $R_{\text{drôt}} = \frac{h}{2e^2}\frac{R}{T}$ odvodíme ešte raz. Odvodíme ju menej formálne - jednoduchou analýzou priebehu potenciálu v drôte. Pripomeňme znovu, že vodič je jednokanálový, keď v ňom elektróny obsadzujú len subpás $n=1$. Energia elektrónu v subpáse $n=1$ je $\varepsilon_1(k) = \varepsilon_1 + E$, kde $E = \hbar^2k^2/2m$ alebo obecne $E(k)$. Dno subpásu ε_1 v ďaľšom môžeme brať nulové. Označme distribučnú funkciu $+k$ stavov naľavo od prekážky ako $f_+^L(E)$. Keďže bola do drôtu injektovaná z ľavého kontaktu (z rezervoáru s chemickým potenciálom μ_L), musí platiť

$$f_+^L(E) = \theta\left(\mu_L - E\right), \tag{4.37}$$

kde $\theta(z)=1$ pre $z \geq 0$ a $\theta(z)=0$ pre $z<0$. Z tých istých dôvodov môžeme vyjadriť distribúciu $-k$ stavov napravo od prekážky ako

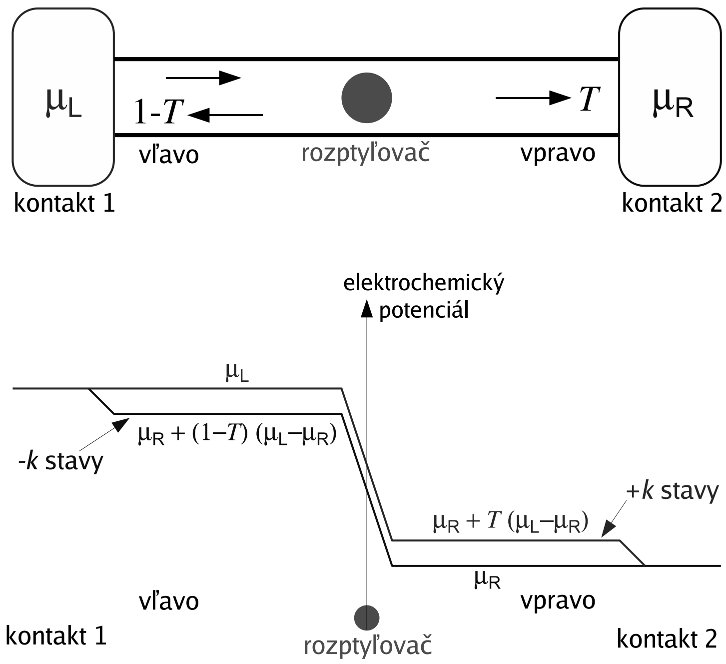
$$f_-^R(E) = \theta\left(\mu_R - E\right). \tag{4.38}$$

Prúd vyjadríme ako

$$I = \frac{2e}{2\pi}\int_0^\infty dk\,\frac{1}{\hbar}\frac{\partial E(k)}{\partial k}\,T\,\left[f_+^L(E) - f_-^R(E)\right]. \tag{4.39}$$

Prejdeme k integrovaniu cez premennú E a zapíšeme (4.39) v tvare

$$I = \frac{2e}{h}\int_0^\infty dE\,T\,\left[f_+^L(E) - f_-^R(E)\right]. \tag{4.40}$$



Obr. 4.6: (a) 1D vodič s jedným rozptylovačom s transmisiou T. (b) Zmena elektrochemického potenciálu, ukázaná separátne pre elektróny s pozitívnym a negatívnym k.

Ak dosadíme (4.37) a (4.38), vzťah (4.40) dá pre $\mu_L - \mu_R = eV \ll \mu_{L,R}$ Landauerov výraz $I = \frac{2e}{h}\, T\, (\mu_L - \mu_R)$. Zapíšeme vzťah (4.40) vo forme

$$I = \frac{2e}{h} \int_0^\infty dE\, \left[f_+^R(E) - f_-^R(E) \right], \tag{4.41}$$

kde $f_+^R(E)$ označuje distribúciu elektrónov v $+k$ stavoch napravo od prekážky:

$$f_+^R(E) = T\, \left[f_+^L(E) - f_-^R(E) \right] + f_-^R(E). \tag{4.42}$$

Pre $+k$ stavy napravo od prekážky definujeme „chemický potenciál“ F_R vzťahom

$$f_+^R(E) = \theta(F_R - E). \tag{4.43}$$

Distribúcia (4.43) má tvar rovnovážnej (Fermiho) distribúcie, zatiaľ čo distribúcia (4.42) je nerovnovážna. Pokiaľ elektróny počas prechodu drôtom nerozptyľuje nič iné ako prekážka, potom všade napravo od prekážky platí výraz (4.42) a výraz (4.43) len definuje F_R.

Ak má mať veličina F_R význam „chemického potenciálu“, distribúcia (4.43) musí dať po sčítaní cez všetky k rovnaký počet elektrónov ako distribúcia (4.42), t.j.

$$\int_0^\infty dE \frac{dk}{dE} \theta\left(F_R - E\right) = \int_0^\infty dE \frac{dk}{dE} \left\{ T\, \left[\theta(\mu_L - E) - \theta(\mu_R - E) \right] + \theta(\mu_R - E) \right\}. \tag{4.44}$$

Pre $\mu_L - \mu_R \ll \mu_{L,R}$ a $F_R - \mu_R \ll \mu_R$ dostaneme z poslednej rovnice výsledok

$$F_R = \mu_R + T\ (\mu_L - \mu_R)\,. \tag{4.45}$$

Podobne postupujme pre $-k$ stavy vľavo od prekážky. Zapíšme vzťah (4.40) v tvare

$$I = \frac{2e}{h}\int\limits_0^\infty dE\ \left[f_+^L(E) - f_-^L(E)\right], \tag{4.46}$$

kde $f_-^L(E)$ je distribučná funkcia pre $-k$ stavy vľavo od prekážky:

$$f_-^L(E) = f_+^L(E) - T\left[f_+^L(E) - f_-^R(E)\right]. \tag{4.47}$$

Definujme pre $-k$ stavy vľavo od prekážky "chemický potenciál"F_L vzťahom

$$f_-^L(E) = \theta(F_L - E) \tag{4.48}$$

a žiadajme, nech distribúcia (4.48) dáva rovnaký počet elektrónov ako distribúcia (4.47), t.j.

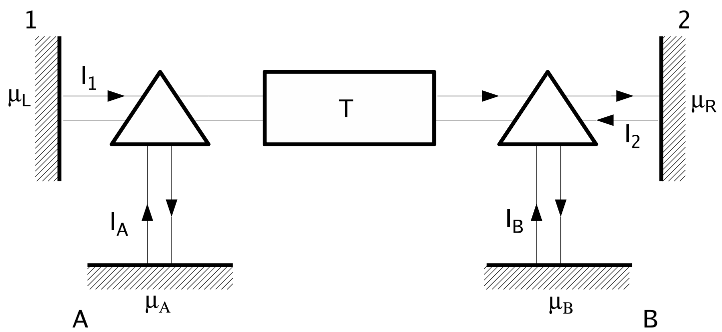
$$\int\limits_0^\infty dE\ \frac{dk}{dE}\theta\left(F_L - E\right) = \int\limits_0^\infty dE\ \frac{dk}{dE}\Big\{\theta(\mu_L - E) - T\left[\theta(\mu_L - E) - \theta(\mu_R - E)\right]\Big\}. \tag{4.49}$$

Odtiaľ pre $\mu_L - \mu_R \ll \mu_{L,R}$ a $F_R - \mu_R \ll \mu_R$ dostaneme výsledok

$$F_L = \mu_R + (1 - T)\left(\mu_L - \mu_R\right). \tag{4.50}$$

Obrázok 4.6 ukazuje priebeh chemického potenciálu pozdĺž 1D drôtu pre $-k$ aj $+k$ stavy. Pre $-k$ stavy vzniká na prekážke potenciálový spád $F_L - \mu_R = (1 - T)(\mu_L - \mu_R)$ a rovnaký spád potenciálu, $\mu_L - F_R = (1 - T)(\mu_L - \mu_R)$, máme pre $+k$ stavy. Keď napäťový spád $(1 - T)(\mu_L - \mu_R)/e$ vydelíme prúdom $I = \frac{2e}{h}\ T\ (\mu_L - \mu_R)$, dostaneme vzťah pre odpor prekážky: $R_{\text{drôt}} = \frac{h}{2e^2}\,\frac{R}{T}$. Z obrázku tiež vidno, že zvyšok aplikovaného napätia, $T(\mu_L - \mu_R)$, padá na rozhranie kontakt-vodič. Keď tento napäťový spád vydelíme prúdom $I = \frac{2e}{h}\ T\ (\mu_L - \mu_R)$, dostaneme fundamentálny kontaktný odpor $\frac{h}{2e^2}$.

Skúsme priebeh potenciálu z obrázku 4.6 namerať pomocou schémy na obrázku 4.7. V predošlom odseku sme to už vlastne urobili pomocou Buttikerovho formalizmu. Tu ukážeme neformálny a fyzikálne názornejší výklad, ktorý svojho času Buttikera inšpiroval.



Obr. 4.7: Meranie potenciálu vo vodiči s prekážkou ideálnymi potenciometrami

Drôt s prekážkou je pripojený na prúdové kontakty 1 a 2. V dôsledku malej odchýlky chemického potenciálu od rovnovážnej hodnoty E_F emituje rezervoár 1 do drôtu prúd

$$I_1 = e\,\frac{2}{2\pi}\int_0^\infty \{\theta(\mu_L - E) - \theta(E_F - E)\}\,\frac{1}{\hbar}\,\frac{dE}{dk}\,dk = \frac{2e}{h}\,(\mu_L - E_F) \quad . \tag{4.51}$$

Podobne, rezervoár 2 emituje do drôtu opačne orientovaný prúd

$$I_2 = \frac{2e}{h}\;(\mu_R - E_F) \quad , \tag{4.52}$$

takže z kontaktu 1 do kontaktu 2 tečie v limite $\mu_L - \mu_R << E_F$ čistý prúd

$$I = T\;(I_1 - I_2) = \frac{2e}{h}\;T\;(\mu_L - \mu_R) \quad . \tag{4.53}$$

Ako potenciometre slúžia rezervoáry A a B, ktoré sú s 1D drôtom spojené cez ideálne (balistické) 1D prívody A a B. Rezervoáry A a B emitujú do prívodov A a B prúdy

$$I_A = \frac{2e}{h}\;(\mu_A - E_F) \quad , \; I_B = \frac{2e}{h}\;(\mu_B - E_F) \quad . \tag{4.54}$$

Prívod a 1D drôt spája trojuholníkový „optický hranol“. Keď elektrón v drôte dopadne na hranol, s pravdepodobnosťou δ sa rozptýli do prívodu. Nech $\delta \ll T$ a nech je δ rovnaké pre elektróny dopadajúce na hranol zľava i sprava. Potom do prívodu A tečú prúdy pochádzajúce z I_1 a I_2, a to (s presnosťou do prvého rádu v δ)

$$I_1(1+R)\delta \quad , \qquad I_2 T\delta \quad . \tag{4.55}$$

Za predpokladu, že sa prechod elektrónu cez hranol deje koherentne (bez zmeny energie), s rovnakými pravdepodobnosťami δ sa realizujú aj opačné procesy, prechod z prívodu A do vodiča 1 vľavo od hranola (do $-k$ stavu) a prechod z prívodu A do vodiča 1 vpravo od hranola (do $+k$ stavu). Pravdepodobnosť, že hranol prepustí elektrón z prívodu A do vodiča, je teda 2δ. Potom $1 - 2\delta$ je pravdepodobnosť, že elektrón dopadajúci na hranol v prúde I_A sa odrazí späť do prívodu A. V prívode A preto tečie smerom k rezervoáru A spolu s prúdmi (4.55) aj prúd

$$I_A\,(1 - 2\delta) \quad . \tag{4.56}$$

Pretože rezervoár A je potenciometer, celkový prúd tečúci prívodom A musí byť nulový:

$$I_A(1-2\delta) + I_1(1+R)\delta + I_2 T\delta - I_A = 0 \quad . \tag{4.57}$$

V prívode B máme analogicky:

$$I_B(1-2\delta) + I_2(1+R)\delta + I_1 T\delta - I_B = 0 \quad . \tag{4.58}$$

Poznamenajme, že faktory $(1+R)\delta$ a $T\delta$ sú totožné so semiklasickými vyjadreniami (vzťahmi 4.32) pre transmisné koeficienty T_{31} a T_{32}.

Z posledných dvoch rovníc získame po dosadení vzťahov (4.51), (4.52) a (4.54) rovnice

$$2\delta\frac{2e}{h}(\mu_A - E_F) \;=\; \frac{2e}{h}(\mu_L - E_F)(1+R)\delta + \frac{2e}{h}(\mu_R - E_F)T\delta \quad , \tag{4.59}$$

$$2\delta\frac{2e}{h}(\mu_B - E_F) \;=\; \frac{2e}{h}(\mu_R - E_F)(1+R)\delta \;+ \frac{2e}{h}(\mu_L - E_F)T\delta \quad . \tag{4.60}$$

Odtiaľ

$$\mu_A = \frac{(\mu_L + \mu_R)}{2} + R\frac{(\mu_L - \mu_R)}{2} \quad , \quad \mu_B = \frac{(\mu_L + \mu_R)}{2} - R\frac{(\mu_L - \mu_R)}{2} \quad , \tag{4.61}$$

a

$$\mu_A - \mu_B = (\mu_L - \mu_R)R \quad . \tag{4.62}$$

Sú to tie isté výsledky ako na obrázku 4.6. Treba ale zdôrazniť nasledovné. Vzťahy (4.61) sú chemické potenciály rovnovážneho elektrónového plynu v rezervoároch A a B tak, ako sa "nastavia" v procese merania. Priebeh potenciálu na obrázku 4.6 sme odvodili bez uváženia procesu merania, kvôli čomu sme museli definovať "chemické potenciály" nerovnovážneho elektrónového plynu vo vnútri drôtu.

Keď skombinujeme vzťah (4.62) so vzťahom (4.53), dostaneme

$$\mu_A - \mu_B = \frac{h}{2e}\frac{R}{T}I, \quad \text{resp.} \quad V_A - V_B = \frac{\mu_A - \mu_B}{e} = \frac{h}{2e^2}\frac{R}{T}I \tag{4.63}$$

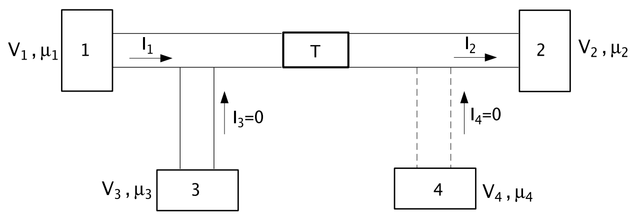
a konečne

$$R_{\text{drôt}} = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{h}{2e^2}\frac{R}{T} \quad . \tag{4.64}$$

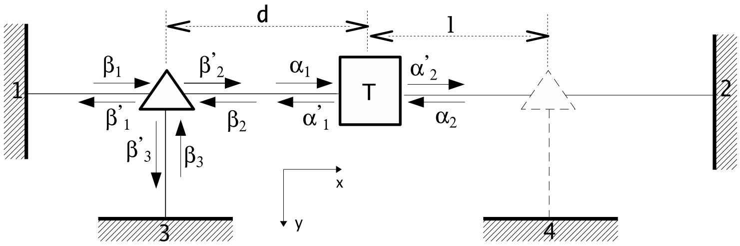
Vzťah (4.64) hovorí, aký odpor namerajú v štvorbodovom zapojení ideálne potenciometre, t.j. neinvazívne ($\delta \ll T$) symetrické sondy. Ak potenciometre nie sú ideálne, namerajú podľa predošlého odseku výsledok, ktorý závisí od ich vlastností. Ak sú ideálne, nemajú podľa tohto odseku na meraný potenciál žiaden vplyv. V nasledujúcom odseku sa dozvieme, že aj ideálne potenciometre ovplyvňujú meraný potenciál, ak sú fázovo citlivé. Ide o citlivosť na interferenciu elektrónových vĺn v drôte.

4.5 Meranie potenciálu fázovocitlivými potenciometrami

V tomto odseku sa zoznámime s meraním potenciálu citlivým na fázu vlnovej funkcie elektrónov vo vodiči. Uvidíme, že v prípade fázovocitlivého merania je výsledok merania



Obr. 4.8: Štvorbodové meranie potenciálu v jednokanálovom vodiči s transmisiou T. Prívody k potenciometrom 3 a 4 sú tiež jednokanálové, rovnakého prierezu a z rovnakého materiálu ako je vodič. Predpokladáme, že potenciometre 3 a 4 sú slaboinvazívne. Vtedy výsledný potenciál potenciometra 3 nie je ovplyvnený prítomnosťou potenciometra 4, a naopak. Dôkaz tohto tvrdenia necháme na čitateľa a v texte sa obmedzíme na predpoklad, že keď meria potenciometer 3 tak nie je pripojený potenciometer 4, a naopak.



Obr. 4.9: Rozptyl elektrónov vo vodiči s prekážkou (s transmisiou T) a potenciometrami 3 a 4. Potenciometer je k vodiču pripojený pomocou trujuholníkového "optického hranola". Rozptyľuje teda prekážka a optický hranol.

potenciálu ovplyvnený meraním, hoci sa použijú ideálne potenciometre. Vyjdeme z Buttikerových rovníc.

$$I_m = \frac{2e^2}{\hbar} \sum_{\forall n \neq m} T_{nm} V_m - T_{mn} V_n \ , \tag{4.65}$$

terminály budeme číslovať, ako je ukázané na obrázku 4.8. Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že keď meriame potenciometrom 3, tak potenciometer 4 je úplne odpojený, a naopak, pri meraní potenciometrom 4 bude úplne odpojený potenciometer 3. Z rovníc (4.65) dostaneme

$$I_3 = \frac{2e^2}{\hbar} \left(T_{13} V_3 + T_{23} V_3 - T_{32} V_2 - T_{31} V_1 \right) \ . \tag{4.66}$$

Položíme $I_3 = 0$ a nájdeme, že potenciometer 3 meria potenciál

$$V_3 = \frac{T_{31} V_1 + T_{32} V_2}{T_{13} + T_{23}} \quad \text{resp.} \quad \mu_3 = \frac{T_{31} \mu_1 + T_{32} \mu_2}{T_{13} + T_{23}} \ . \tag{4.67}$$

Ideme vypočítať transmisné koeficienty T_{31} a T_{32}. Ako je ukázané na obrázku 4.9, prívod potenciometra 3 je k vodiču pripojený pomocou optického hranola. Elektróny vo vodiči sú teda rozptylované nielen prekážkou ale aj optickým hranolom. Rozptyl na optickom hranole 3 môžeme popísať rovnicou

$$\begin{pmatrix} \grave{\beta}_1 \\ \grave{\beta}_2 \\ \grave{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \ , \tag{4.68}$$

kde β_1, β_2 a β_3 sú amplitúdy rovinných vĺn dopadajúcich na optický hranol a $\grave{\beta}_1$, $\grave{\beta}_2$ a $\grave{\beta}_3$ sú amplitúdy vĺn šíriacich sa preč od optického hranola. Rovnica (4.68) nám umožňuje vypočítať výstupné amplitúdy $\grave{\beta}_1$, $\grave{\beta}_2$ a $\grave{\beta}_3$ zo vstupných amplitúd β_1, β_2 a β_3, ak poznáme prvky S_{ij} matice $\{S_{ij}\}$. Táto matica sa nazýva matica rozptylu alebo S-matica. Vysvetlíme pôvod rovnice (4.68) a pokúsime sa postupne určiť prvky S_{ij}.

Začnime z rovnice

$$\begin{pmatrix} \grave{\beta}_1 \\ \grave{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \ , \tag{4.69}$$

ktorá vznikne z rovnice (4.68) tak, že prívod 3 odstránime ale optický hranol ponecháme. Vlnová funkcia elektrónu má v oblasti vľavo od optického hranola 3 všeobecný tvar

$$\beta_1 e^{ikx} + \grave{\beta}_1 e^{-ikx} \tag{4.70}$$

a v oblasti medzi hranolom 3 a prekážkou tvar

$$\beta_2 e^{-ikx} + \grave{\beta}_2 e^{ikx} \ . \tag{4.71}$$

Predpokladajme na chvíľu, že vo vodiči nie je žiadna prekážka, t.j. $T = 1$. V tomto prípade je optický hranol jediný rozptyľovač a rozptyl na ňom je (bez prívodu 3) jednorozmerný. Učebnicový popis tohto rozptylu je zhrnutý na obrázku 4.10. Vidno, že ak elektrón dopadá na optický hranol z ľavej strany, vstupné amplitúdy sú $\beta_1 = 1$ a $\beta_2 = 0$ a výstupné amplitúdy sú $\grave{\beta}_1 = r$ a $\grave{\beta}_2 = t$. V prípade dopadu zprava sú zase vstupy $\beta_1 = 0$ a $\beta_2 = 1$ a výstupy $\grave{\beta}_1 = t'$ a $\grave{\beta}_2 = r'$. Tieto výsledky dostaneme aj z rovnice (4.69), ak položíme

$$S_{11} = r \quad , \quad S_{12} = t' \quad , \quad S_{21} = t \quad , \quad S_{22} = r' \ . \tag{4.72}$$

Prvky S_{ij} sú teda amplitúdy pravdepodobnosti prechodu a odrazu cez hranol. Kým je odpojený prívod 3, pre pravdepodobnosti $|S_{ij}|^2$ zrejme platí, že

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \quad , \quad |S_{22}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \ , \tag{4.73}$$

pretože elektrón pri dopade na hranol nemá inú možnosť ako prejsť alebo sa odraziť.

Uvažujme teraz elektrón dopadajúci na optický hranol zľava a vráťme do stredu vodiča prekážku s transmisiou T. Pre dopad zľava máme vstup $\beta_1 = 1$, avšak vďaka prekážke už neplatí $\beta_2 = 0$, pretože vlna $\grave{\beta}_2 e^{ikx}$ sa čiastočne odrazí od prekážky späť takže vznikne aj vlna $\beta_2 e^{-ikx}$. Máme teda rovnicu

$$\begin{pmatrix} \grave{\beta}_1 \\ \grave{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \ . \tag{4.74}$$

Konečne, keď vrátime späť prívod 3, vráti nás to k rovnici (4.68) v tvare

$$\begin{pmatrix} \grave{\beta}_1 \\ \grave{\beta}_2 \\ \grave{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \tag{4.75}$$

kde sme položili $\beta_3 = 0$, pretože v prívode 3 nie je nič, čo by mohlo elektrón pohybujúci sa preč od hranola odraziť smerom späť k hranolu. Inými slovami, všeobecný tvar vlnovej funkcie v prívode 3,

$$\grave{\beta}_3 e^{-iky} + \beta_3 e^{iky} \ , \tag{4.76}$$

sa redukuje na rovinnú vlnu $\grave{\beta}_3 e^{-iky}$ idúcu smerom k terminálu 3. Táto vlna vznikla preto, lebo optický hranol rozptýlil elektrón z vodiča do prívodu

Obr. 4.10: Rozptyl na optickom hranole 3 z predošlého obrázku v prípade, že prívod 3 je od hranola odpojený a vo vodiči nie je okrem hranola už žiadna iná prekážka. Symbol t (t') je amplitúda pravdepodobnosti prechodu pre vlnu dopadajúcu zprava (zľava), symbol r (r') je amplitúda pravdepodobnosti odrazu pre vlnu dopadajúcu zprava (zľava).

Špecifikujme maticové prvky S_{ij}. Budeme predpokladať, že potenciometer je ideálny, t.j., že optický hranol elektróny vo vodiči takmer vôbec neodráža a takmer perfektne prepúšťa. Matematicky to vyjadríme vzťahmi

$$\begin{aligned} &S_{11} \to 0\,, && S_{12} \approx 1 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\,, \\ &S_{21} \approx 1 \cdot e^{i(\varphi_2+\varphi_1)}\,, && S_{22} \to 0 \qquad\qquad , \end{aligned} \tag{4.77}$$

kde $\varphi_1 + \varphi_2$ je fáza. Ďalej zvolíme

$$S_{31} \;\approx\; \sqrt{\delta} e^{i(\varphi_3+\varphi_1)} \;\;,\;\; S_{32} \;\approx\; \sqrt{\delta} e^{i(\varphi_3+\varphi_2)}\,, \tag{4.78}$$

kde δ je parameter, s ktorým sme sa už stretli v predchádzajúcich dvoch odsekoch (platí, že $\delta \ll 1$ a aj $\delta \ll T$). Očividne, S_{31} je amplitúda pravdepodobnosti, že vlna, ktorá vo vodiči dopadá na hranol z ľavej strany, prejde do prívodu 3. Podobne, S_{32} je amplitúda pravdepodobnosti prechodu z vodiča do prívodu 3 pre vlnu dopadajúcu na hranol z pravej strany. Výber (4.78) zaisťuje, že

$$|S_{31}|^2 \;=\; |S_{32}|^2 \;=\; \delta\,. \tag{4.79}$$

Toto je matematické konštatovanie faktu, že spoj medzi prívodom 3 a vodičom je po technologickej stránke zrealizovaný dokonale symetricky a aj slabo invazívne ($\delta \ll T$). Podobne,

$$S_{13} \;\approx\; \sqrt{\delta} e^{i(\varphi_1+\varphi_3)} \;\;,\;\; S_{23} \;\approx\; \sqrt{\delta} e^{i(\varphi_2+\varphi_3)}\,. \tag{4.80}$$

Koeficient S_{33} potrebovať nebudeme. Kvôli úplnosti uveďme, že ide o koeficient odrazu pre vlnu dopadajúcu na optický hranol v prívode 3. Keďže musí platiť vzťah

$$|S_{33}|^2 \;+\; |S_{23}|^2 \;+\; |S_{13}|^2 \;=\; 1\,, \tag{4.81}$$

vidno, že

$$|S_{33}|^2 \approx\; 1 - 2\delta\,, \;\; \text{resp.}\;\; S_{33} \approx\; \sqrt{1-2\delta} e^{i(\varphi_3+\varphi_3)}\,. \tag{4.82}$$

Z rovnice (4.75) dostaneme

$$\grave{\beta}_3 \;=\; S_{31} + S_{32}\beta_2 \;=\; \sqrt{\delta}\left[e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} + e^{i(\varphi_3+\varphi_2)}\beta_2\right]\,. \tag{4.83}$$

kde amplitúdu β_2 potrebujeme ešte určiť. Vlna $\beta_2 e^{-ikx}$ vzniká v dôsledku odrazu vlny $\grave{\beta}_2 e^{ikx}$ na prekážke. Predpokladajme, že prekážka je lokalizovaná v strede drôtu a tiež predpokladajme, že optický hranol je bodový, t.j., že jeho rozmer je zanedbateľný v porovnaní s vlnovou dĺžkou elektrónu. V takom prípade hneď vidíme, že

$$\beta_2 \;=\; \grave{\beta}_2 \sqrt{R} \cdot e^{i\phi} e^{i2kd} \tag{4.84}$$

kde $\sqrt{R}\; e^{i\phi}$ je amplitúda pravdepodobnosti odrazu od prekážky, d je vzdialenosť medzi optickým hranolom a prekážkou a e^{i2kd} je fáza, ktorú rovinná vlna získa pri prechode od hranola k prekážke a naspäť. Z rovnice (4.75) ostaneme aj

$$\grave{\beta}_2 \approx e^{i(\varphi_2+\varphi_1)}\,. \tag{4.85}$$

Dosadíme posledný vzťah do (4.84) a (4.84) dosadíme do (4.83). Dostaneme

$$\grave{\beta}_3 \;=\; \sqrt{\delta} e^{i(\varphi_3+\varphi_1)}\left[1 \;+\; \sqrt{R} e^{i(2\varphi_2+\phi+2kd)}\right]\,. \tag{4.86}$$

Transmisný koeficient T_{31} je daný vzťahom

$$T_{31} = \frac{\frac{\hbar k}{m}\,|\grave{\beta}_3|^2}{\frac{\hbar k}{m}\,|\beta_1|^2} = \frac{|\grave{\beta}_3|^2}{|\beta_1|^2} = |\grave{\beta}_3|^2 \,, \tag{4.87}$$

kde $\frac{\hbar k}{m}\,|\beta_1|^2$ je dopadajúci prúd, $\frac{\hbar k}{m}\,|\grave{\beta}_3|^2$ je prepustený prúd a $\beta_1 = 1$. Pre $\grave{\beta}_3$ dané vzťahom (4.86) dostaneme výsledok

$$T_{31} \;=\; \delta\left(1 + R + 2R^{1/2}cos\chi\right) \,, \tag{4.88}$$

kde

$$\chi \;=\; \phi + 2\varphi_1 + 2kd \,. \tag{4.89}$$

Ďalej potrebujeme vypočítať transmisný koeficient T_{32}. Uvažujme elektrón ktorý bol do vodiča injektovaný z terminálu 2. Jeho vlnová funkcia v oblasti vpravo od prekážky je

$$\alpha_2 e^{-ikx} \;+\; \grave{\alpha}_2 e^{ikx} \,, \tag{4.90}$$

kde $\alpha_2 e^{-ikx}$ je injektovaná vlna a $\grave{\alpha}_2 e^{ikx}$ je vlna, ktorá vznikla odrazom vlny $\alpha_2 e^{-ikx}$. Koeficient T_{32} je pravdepodobnosť, že elektrón prejde z terminálu 2 do terminálu 3. To znamená, že

$$T_{32} \;=\; \frac{\frac{\hbar k}{m}\,|\grave{\beta}_3|^2}{\frac{\hbar k}{m}\,|\alpha_2|^2} = \frac{|\grave{\beta}_3|^2}{|\alpha_2|^2} = |\grave{\beta}_3|^2 \,, \tag{4.91}$$

kde $\alpha_2 = 1$. Zdôraznime, že $\grave{\beta}_3$ teraz nie je dané vzťahom (4.86). Teraz totiž musíme $\grave{\beta}_3$ vypočítať pre vstup $\beta_1 = 0$ (uvažujeme elektrón injektovaný z terminálu 2 a ten sa po prechode za optický hranol už nemá od čoho odraziť späť takže vlna $\beta_1 e^{ikx}$ nevznikne) a pre už spomenuté vstupy $\beta_3 = 0$ a $\alpha_2 = 1$. Je zrejmé, že

$$\beta_2 \;=\; \alpha_2\sqrt{T}e^{i\gamma}e^{ikd} \;=\; \sqrt{T}e^{i\gamma}e^{ikd} \,, \tag{4.92}$$

kde $\sqrt{T}e^{i\gamma}$ je amplitúda pravdepodobnosti prechodu cez prekážku a e^{ikd} je fáza ktorú elektrón získa pri prechode od prekážky k optickému hranolu. Namiesto (4.75) teraz platí

$$\begin{pmatrix}\grave{\beta}_1\\ \grave{\beta}_2\\ \grave{\beta}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13}\\ S_{21} & S_{22} & S_{23}\\ S_{31} & S_{32} & S_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \beta_2\\ 0\end{pmatrix} \,, \tag{4.93}$$

Odtiaľ

$$\grave{\beta}_3 \;=\; S_{32}\beta_2 \;=\; \beta_2\sqrt{\delta}e^{i(\varphi_3+\varphi_2)} \,. \tag{4.94}$$

Dosadíme (4.92) do (4.94) a dostávame, že

$$T_{32} \;=\; T\delta \,. \tag{4.95}$$

Chemický potenciál terminálu 3 vypočítame zo vzťahu (4.67) dosadením za T_{31} a T_{32} a využitím pravidla $T_{13} + T_{23} = T_{31} + T_{32}$. Výsledok je

$$\mu_3 \;=\; \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \;+\; \frac{R + R^{1/2}\cos\chi}{1 + R^{1/2}\cos\chi}\,\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \,, \tag{4.96}$$

kde

$$\chi \;=\; 2kd + \text{konštanta}\,. \tag{4.97}$$

Analogickým spôsobom by sme pre chemický potenciál terminálu 4 našli

$$\mu_4 \;=\; \frac{\mu_1+\mu_2}{2} \;-\; \frac{R+R^{1/2}\cos\Psi}{1+R^{1/2}\cos\Psi}\,\frac{\mu_1-\mu_2}{2}\,, \tag{4.98}$$

kde

$$\Psi \;=\; 2kl + \text{konštanta}\,. \tag{4.99}$$

a l označuje vzdialenosť sondy 4 od prekážky v strede vodiča. Keďže sú sondy 3 a 4 slabo-invazívne, prúd cez vodič je

$$I = \frac{2e}{\hbar}T_{21}(\mu_1-\mu_2) \simeq \frac{2e}{\hbar}T(\mu_1-\mu_2) \tag{4.100}$$

Posledný vzťah a vzťahy (4.96) a (4.98) dosadíme do výrazu pre štvorbodový odpor,

$$R_{12,34} \;=\; \frac{\mu_3-\mu_4}{eI}. \tag{4.101}$$

Dostaneme výsledok

$$R_{12,34} \;=\; \frac{h}{2e^2}\frac{1}{T}\left(\frac{R+R^{1/2}\cos\chi}{1+R^{1/2}\cos\chi} \;+\; \frac{R+R^{1/2}\cos\Psi}{1+R^{1/2}\cos\Psi}\right)\,. \tag{4.102}$$

Tento vzťah sa vôbec nepodobá na výsledok $R_{\text{drôt}} = \frac{h}{2e^2}\frac{R}{T}$, ktorý sme získali v predchádzajúcich odsekoch, keď sme neuvažovali fázovú citlivosť. Odpor (4.102) závisí od polohy sondy 3 a sondy 4. Je oscilujúcou funkciou d a l, dokonca môže byť aj záporný.

Ustrednime chemický potenciál (4.96) cez uhol χ integráciou $1/\pi\ \int_0^\pi d\chi$. Dostaneme

$$\langle\mu_3\rangle \;=\; \frac{\mu_1+\mu_2}{2} \;+\; \left(1-\sqrt{T}\right)\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{2}\right)\,. \tag{4.103}$$

Podobne, keď ustredníme (4.98) cez uhol Ψ, tak

$$\langle\mu_4\rangle \;=\; \frac{\mu_1+\mu_2}{2} \;-\; \left(1-\sqrt{T}\right)\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{2}\right)\,. \tag{4.104}$$

Experimentálne by sa toto ustrednenie realizovalo ustredňovaním cez premenné d a l, teda postupným posúvaním potenciometrov (3) a (4) pozdĺž vodiča. Pre ustrednený odpor

$$\langle R_{12,34}\rangle \;=\; \frac{\langle\mu_3\rangle-\langle\mu_4\rangle}{eI} \tag{4.105}$$

takto dostaneme výsledok

$$\langle R_{12,34}\rangle \;=\; \frac{h}{2e^2}\;\frac{1-\sqrt{T}}{T}\,, \tag{4.106}$$

ktorý sa opäť významne líši od $R_{\text{drôt}} = \frac{h}{2e^2}\frac{1-T}{T}$.

Odpor $\frac{h}{2e^2}\frac{1-T}{T}$ nameriame, ak štvorbodové meranie nie je fázovo citlivé. Kedy však štvorbodové meranie nie je fázovo citlivé? Odpoveď je, že šírka prívodu 3 aj šírka prívodu 4 musia byť oveľa väčšie ako je vlnová dĺžka elektrónov vo vodiči. Vtedy sa totiž v rámci jediného merania (s fixnou polohou sondy) ustredňuje cez uhol χ priamo transmisia (4.88). V tomto prípade dostaneme vzťah

$$T_{31} = \delta(1 + R) , \tag{4.107}$$

ktorý nás v predchádzajúcich odsekoch doviedol k odporu $\frac{h}{2e^2}\frac{1-T}{T}$.

Poznámka na záver. Dôležitým odkazom tejto kapitoly je, že ak mezoskopické meranie nemá ovpyvňovať meraný potenciál, potenciometer musí byť neinvazívny a s dokonale symetrickým pripojením na vodič. V nasledúcej kapitole uvidíme, že existuje zaujímavá výnimka - kvantový Hallov jav. Uvidíme, že v režime kvantového Hallovho javu potenciometre nemusia vôbec byť pripravené ako ideálne a predsa na výsledok merania nemajú žiaden vplyv

Kapitola 5

Kvantový Hallov jav

5.1 Magnetotransport 2D elektrónov: zlyhanie klasickej teórie v silnom magnetickom poli

Definujme tenzory mernej vodivosti a merného odporu pre 2D vzorku. Vzťah medzi prúdovou hustotou $\vec{j}$ a elektrickým poľom $\vec{E}$ možno pre slabé elektrické pole písať v tvare

$$\left.\begin{aligned} j_x &= \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y \\ j_y &= \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y \end{aligned}\right\} \qquad \vec{j} = \bar{\bar{\sigma}}\vec{E}, \tag{5.1}$$

alebo

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \varrho_{xx}j_x + \varrho_{xy}j_y \\ E_y &= \varrho_{yx}j_x + \varrho_{yy}j_y \end{aligned}\right\} \qquad \vec{E} = \bar{\bar{\varrho}}\vec{j}, \tag{5.2}$$

kde σ_{xx}, σ_{xy}, ..., sú zložky tenzora mernej vodivosti $\bar{\bar{\sigma}}$ a ϱ_{xx}, ϱ_{xy}, ..., sú zložky tenzora merného odporu $\bar{\bar{\varrho}}$. Ak predpokladáme, že vzorka je izotrópna, z rovníc (5.1) a (5.2) dostaneme

$$\varrho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xx}^2}, \quad \varrho_{xy} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \tag{5.3a}$$

$$\sigma_{yx} = -\sigma_{xy},\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy}, \quad \varrho_{yx} = -\varrho_{xy},\ \varrho_{xx} = \varrho_{yy}. \tag{5.3b}$$

Na obrázku 5.1 je ukázané typické experimentálne usporiadanie pre meranie $\bar{\bar{\sigma}}$ a $\bar{\bar{\varrho}}$. Keď je kolmo na 2D vzorku aplikované statické homogénne magnetické pole, experiment sa nazýva Hallov experiment, podľa svojho objaviteľa Halla. Merané veličiny sú definované takto. Longitudinálna rezistencia je

$$R_L = \frac{V_2 - V_3}{I_1} = \frac{V_6 - V_5}{I_1} \equiv \frac{V_x}{I_1} \tag{5.4}$$

Pretože

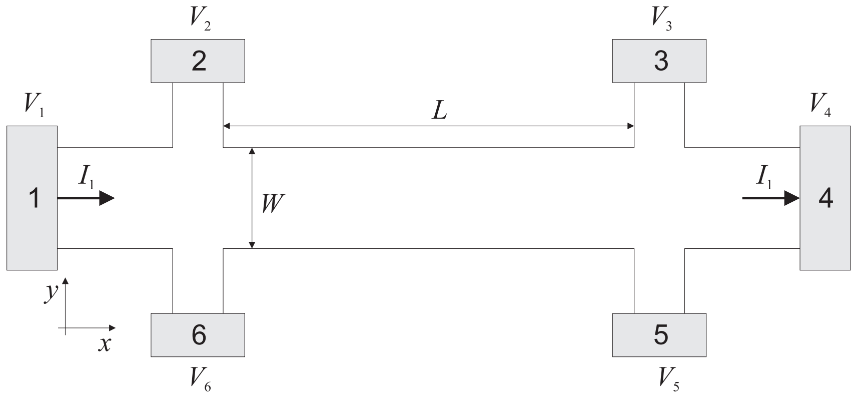
$$V_x = E_x L, \quad I_1 = j_x W, \quad \varrho_{xx} = \frac{E_x}{j_x}, \tag{5.5}$$

platí

$$\varrho_{xx} = \frac{V_x}{I_1}\frac{W}{L}, \quad \text{resp. } \varrho_{xx} = R_L\frac{W}{L}. \tag{5.6}$$

Hallova rezistencia je definovaná ako

$$R_H = \frac{V_2 - V_6}{I_1} = \frac{V_3 - V_5}{I_1} \equiv \frac{U_H}{I_1}. \tag{5.7}$$



Obr. 5.1: Typická geometria vzorky pre meranie kvantového Hallovho javu.

Pretože

$$I_1 = j_x W, \quad U_H = E_y W \equiv E_H W, \quad E_y = \varrho_{yx} j_x, \tag{5.8}$$

platí

$$\varrho_{yx} = \frac{U_H}{I_1} = R_H. \tag{5.9}$$

Všetky tieto vzťahy platia aj pre vzorku, ktorá nie je dostatočne tenká nato aby sa v nej elektrónový plyn choval ako dvojdimenzionálny. My budeme v ďaľšom uvažovať transport 2D plynu, pretože dvojdimenzionalita plynu je nutnou podmienkou pre vznik kvantového Hallovho javu, s ktorým sa chceme oboznámiť.

Najprv zopakujeme, čo predpovedá pre Hallove meranie transportu 2D plynu klasická teória transportu. Vychádzame z klasickej pohybovej rovnice

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\left[\vec{E} + (\vec{v}\times\vec{B})\right] - \frac{m\vec{v}}{\tau}, \quad \vec{v} = (v_x, v_y)\,, \tag{5.10}$$

kde $\vec{v}$ je stredná (alebo driftová) rýchlosť 2D elektrónu a τ je stredná doba medzi dvomi elektrónovými zrážkami (s prímesami prípadne aj s fonónmi), nazývaná aj relaxačný čas elektrónového impulzu. V stacionárnom stave je $d\vec{v}/dt = 0$ a vtedy sa rovnica (5.10) dá pre $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$ a $\vec{B} = (0, 0, B)$ rozpísať pre jednotlivé zložky v tvare

$$v_x = -\frac{e\tau}{m}\left[E_x + v_y B\right], \quad v_y = -\frac{e\tau}{m}\left[E_y - v_x B\right]. \tag{5.11}$$

Prenásobením faktorom $-en$, kde n je koncentrácia 2D elektrónov, dostaneme

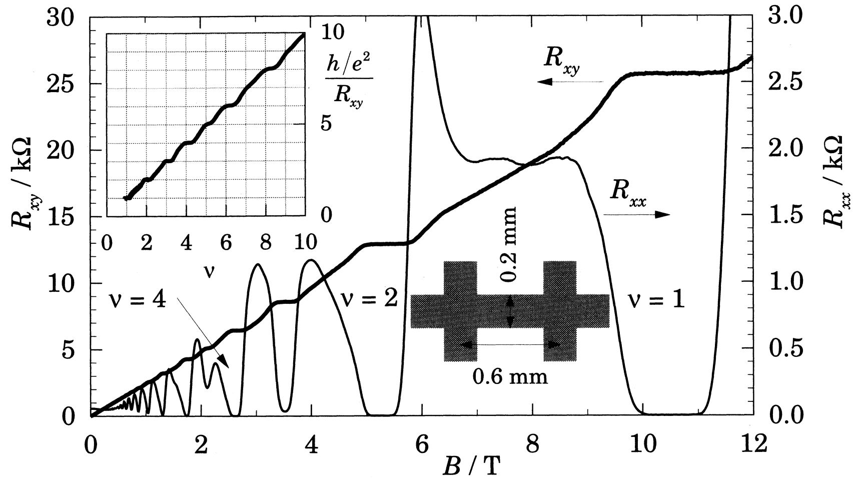
$$j_x = \frac{ne^2\tau}{m}E_x - \frac{eB}{m}\tau j_y, \quad j_y = \frac{ne^2\tau}{m}E_y + \frac{eB}{m}\tau j_x. \tag{5.12}$$

Zo (5.12) dostaneme zložky tenzora vodivosti

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1+(\omega_c\tau)^2}, \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{\sigma_0}{1+(\omega_c\tau)^2}\,(-\omega_c\tau), \tag{5.13}$$

kde

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad \omega_c = \frac{eB}{m}. \tag{5.14}$$



Obr. 5.2: Meranie kvantového Hallovho javu, prevzaté z John H. Davies, 1998. Označenia R_{xx} a R_{xy} na obrázku zodpovedajú našim R_L a R_H.

Dosadením týchto výsledkov do (5.3a) dostaneme

$$\varrho_{xx} = {\sigma_0}^{-1}. \tag{5.15}$$

V Hallovom experimente je $j_y = 0$ a meria sa $E_y \equiv E_H$. Z (5.12) dostaneme

$$E_H = \overbrace{-\frac{B}{en}}^{=\varrho_{yx}=-\varrho_{xy}} j_x, \quad j_x = \overbrace{\frac{ne^2\tau}{m}}^{=\sigma_{xx}=\sigma_0} E_x. \tag{5.16}$$

Meria sa E_H pri známej hodnote j_x a B. Zo (5.16) dostaneme pre Hallov odpor

$$\varrho_{xy} = \frac{B}{en}. \tag{5.17}$$

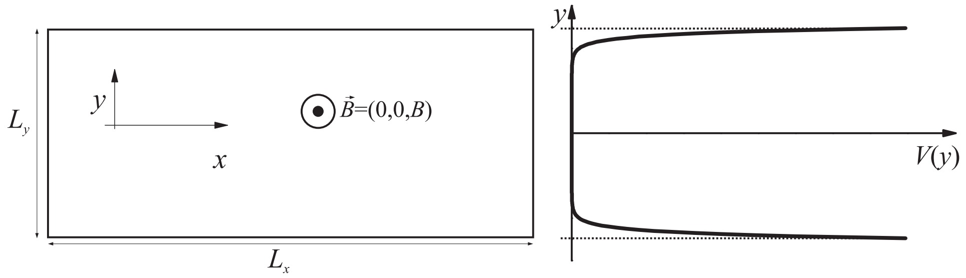
Podľa klasickej teórie teda ϱ_{xy} rastie s B lineárne a ϱ_{xx} od B nezávisí. Obrázok 5.2 ukazuje experimentálny výsledok pre 2D elektróny v heteroštruktúre GaAs/AlGaAs. Experiment potvrdzuje klasickú teóriu len pre malé B. Ako B rastie, závislosť $\varrho_{xy}(B)$ sa mení z lineárnej na stupňovitú, pričom jednotlivé stupne nadobúdajú kvantované hodnoty

$$\varrho_{xy} = \frac{h}{e^2}\frac{1}{i}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.18}$$

v oblasti *plateau*, kde sú stupne perfektne vodorovné. Hodnoty (5.18) sa merajú s presnosťou lepšou ako jedna milióntina. To poskytuje zatiaľ ďaleko najpresnejšie meranie fundamentálnej konštanty h/e^2 a tiež ďaleko najpresnejší odporový normál. Jav sa nazýva kvantový Hallov jav. Z experimentu ďalej vidno, že $\varrho_{xx}(B)$ nezávisí od B len pre veľmi malé B. S rastúcim B vykazuje $\varrho_{xx}(B)$ oscilácie, ktoré dosahujú svoje ideálne minimum

$$\varrho_{xx} = 0 \tag{5.19}$$

vždy, keď $\varrho_{xy}(B)$ nadobudne jednu z kvantovaných hodnôt (5.18). Nazývajú sa Shubnikov-deHaasove oscilácie.



Obr. 5.3: Potenciál definujúci okraje vzorky (schématicky).

Už sme videli, že také isté kvantovanie vykazuje dvojterminálový odpor 1D drôtu, pokiaľ je drôt tak malý, že sa v ňom nevyskytujú žiadne prekážky. Fundamentálne kvantum odporu sa však v balistickom 1D drôte nikdy nemeralo s presnosťou lepšou ako cca 1 percento. Na kvantovom Hallovom jave je okrem veľkej experimentálnej presnosti kvantovania nezvyčajné aj to, že sa pozoruje v makroskopicky veľkých 2D vzorkách (veľkosti rádovo milimetre), v ktorých sa nachádza makroskopicky veľké množstvo prímesí. Elektróny sú pri transporte cez takú vzorku nevyhnutne rozptyľované prímesami, takže balistické odpory $\varrho_{xy} = \frac{h}{e^2}\frac{1}{i}$ a $\varrho_{xx} = 0$ sú z tohto hladiska kontraintuitívne výsledky. Je tiež čudné, že na tieto dokonale balistické výsledky nemajú vplyv makroskopicky veľké meracie sondy, ktoré sú na vzorku pripojené bez snahy o neinvazívnosť. Naopak, sú dokonale invazívne (obr. 5.1).

Najprv uvažujme tieto javy v dvojterminálovej vzorke bez bočných terminálov.

5.2 Landauove hladiny, hranové stavy, lokalizované prímesné stavy

Na obrázku 5.3 je vzorka s 2D plynom v kolmom magnetickom poli. Šírka vzorky (L_y) je veľká v tom zmysle, že oblasť, v ktorej sa "hranový"potenciál $V(y)$ mení s y, je zanedbateľne malá v porovnaní s vnútrom vzorky, kde je $V(y) = const$. Napriek tomu sa pýtame, ako hrany ovlyvňujú elektróny vo vzorke. Riešime Schr. rovnicu

$$\left[\frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A})^2 + V(y)\right]\varphi(x,y) = \mathcal{E}\,\varphi(x,y), \tag{5.20}$$

kde $\hat{\vec{p}} = (-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y})$. Zvolíme Landauovu kalibráciu

$$\vec{A} = (-yB, 0, 0) \tag{5.21}$$

a hľadáme riešenie v tvare

$$\varphi(x,y) = \varphi(y)\,e^{ik_x x}. \tag{5.22}$$

Dosadíme (5.21) a (5.22) do (5.20) a po úpravách dostaneme

$$\left[\frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2(y-Y)^2 + V(y)\right]\varphi(y) = \mathcal{E}\,\varphi(y), \tag{5.23}$$

kde

$$Y = \frac{\hbar k_x}{eB}, \qquad \omega_c = \frac{eB}{m}. \tag{5.24}$$

Uvažujme najprv nekonečne veľkú 2D vzorku bez okrajov. Nato stačí predpokladať, že $V(y)$ je konštanta, napr. $V(y) = V$. Keďže ďalšie dva členy hamiltoniánu v rovnici (5.23) majú formu hamiltoniánu harmonického oscilátora, riešenie rovnice má známy tvar

$$\mathcal{E}_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) + V, \tag{5.25}$$

$$\varphi_n(y) = \exp\left[-\frac{(y-Y)^2}{2l_B^2}\right] H_n\left(\frac{y-Y}{l_B}\right), \tag{5.26}$$

kde $n = 0, 1, 2, ...$ Podobne ako v predchádzajúcej kapitole, $H_n(t)$ je Hermitov polynóm n-tého stupňa a $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$ je magnetická dĺžka. Namiesto energie voľného 2D elektrónu, $\hbar^2 k^2/2m$, ktorá sa spojite mení s $\vec{k}$, teda v magnetickom poli dostávame diskrétne spektrum energetických hladín $\mathcal{E}_n$, daných rovnicou (5.25). Nazývajú sa Landauove hladiny.

Teraz predpokladajme, že šírka 2D vzorky je ohraničená potenciálom $V(y)$ ako je ukázané na obr. 5.3. Problém riešime za predpokladu, že $V(y)$ sa mení pomaly. Všimnime si, že vlnová funkcia $\varphi_n(y)$ je nenulová jedine v oblasti $\sim l_B$ v okolí bodu $y = Y$. Stačí teda predpokladať, že pomaly sa meniace $V(y)$ sa dá nahradiť hodnotou $V(Y)$ práve v oblasti $\sim l_B$, v ktorej je $\varphi_n(y)$ nenulová. Potom z (5.25) dostaneme

$$\mathcal{E}_n(k_x) = \mathcal{E}_n(Y) = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) + V(y = Y). \tag{5.27}$$

Vlnová funkcia (5.26) pritom zostane nezmenená a takisto aj celková vlnová funkcia

$$\varphi_n(x, y) = \varphi_n(y)\, e^{ik_x x}. \tag{5.28}$$

Rovnice (5.27) a (5.28) sú semiklasickým riešením rovnice (5.20). Kvantovomechanicky sa člen $V(y = Y)$ v rovnici (5.27) dá získať ako oprava k energii $\hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)$ v prvom ráde poruchovej teorie, teda ako maticový element $< \varphi_n(y)|V(y)|\varphi_n(y) > \simeq V(y = Y)$.

Vlnová funkcia (5.28) je v smere osi y lokalizovaná okolo $y = Y$ na vzdialenosti l_B a v smere osi x je delokalizovaná. Grupová rýchlosť v smere x je

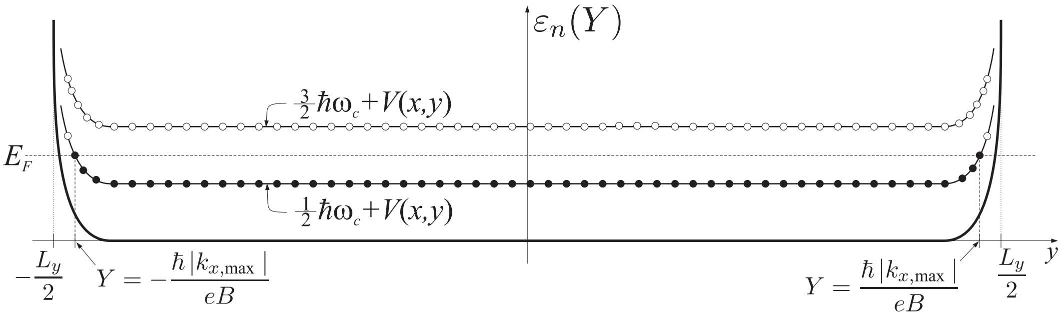
$$v_x = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial}{\partial k_x}\,\mathcal{E}_n(k_x) = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial Y}{\partial k_x}\frac{\partial V(y)}{\partial y}\Big|_{y=Y} = \frac{1}{eB}\frac{\partial V(y)}{\partial y}\Big|_{y=Y}. \tag{5.29}$$

Elektrón sa teda pohybuje po ekvipotenciále.

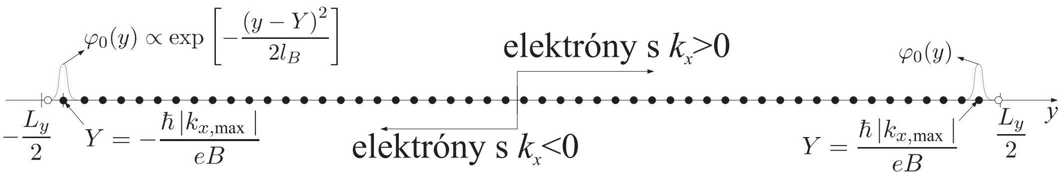
Na obrázku 5.4 uvažujeme situáciu, keď je Fermiho energia v strede medzi prvou a druhou Landauovou hladinou, t.j. keď sú zaplnené v objeme vzorky všetky stavy na prvej Landauovej hladine a voľné všetky stavy na druhej hladine. Obsadené stavy, ktoré sú najbližšie ku hranám vzorky, ležia práve na Fermiho hladine. Nazývame ich *hranové stavy*. Elektrón v ľavom hranovom stave sa pohybuje opačným smerom ako elektrón v pravom hranovom stave, ako vyplýva z rovnice (5.29) a ako znázorňuje aj obrázok 5.5.

Pre všeobecný, pomaly sa meniaci potenciál $V(x, y)$ obsahujúci hranový potenciál $V(y)$ spolu s potenciálom disorderu (prímesí) môžeme (5.29) zovšeobecniť ako

$$|\vec{v}| = \frac{1}{eB}\,|\underbrace{\mathrm{grad}\, V(\vec{r})}_{\text{mikrosk. pole}}| = \frac{|\vec{E}|}{B}, \quad \underbrace{\vec{v} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}}_{\substack{\text{elektrón sa pohybuje po} \\ \text{ekvipotencále kolmo na } \vec{E} \text{ a } \vec{B}}} \quad . \tag{5.30}$$

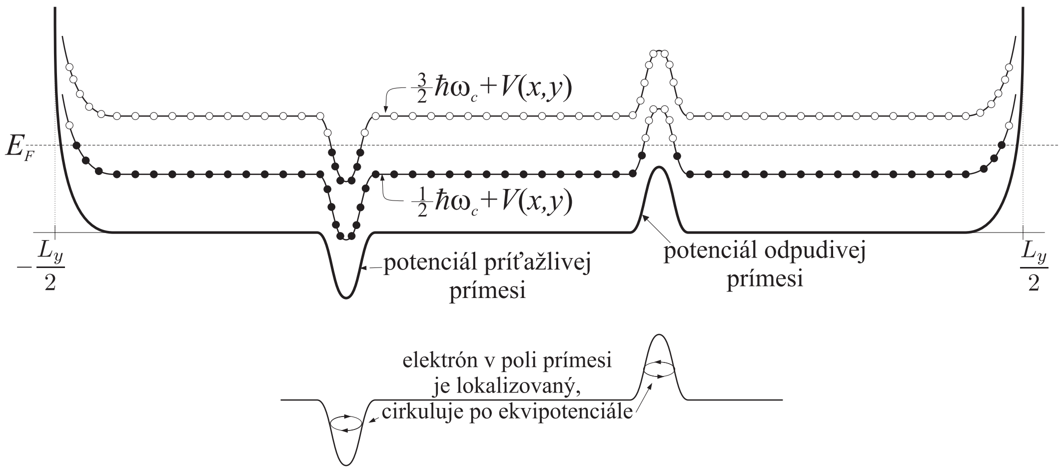


Obr. 5.4: Landauove hladiny $\mathcal{E}_n(Y)$ vo vzorke ohraničnej hranovým potenciálom $V(y)$, ukázaným plnou čiarou. V objeme vzorky je potenciál $V(x, y)$ konštantný (za predpokladu, že absentujú prímesy), takže elektrónové stavy v objeme sú nepohyblivé. Pohybujú sa len elektróny v stavoch v blízkosti hrán, kde má hranový potenciál $V(y)$ nenulový gradient.



Obr. 5.5: Schématické znázornenie priestorovej separácie vlnových funkcií s kladným a záporným znamienkom vlnového vektora k_x. Obrázok je nakreslený pre prípad z predchádzajúceho obrázku, keď je obsadená len najnižšia Landauova hladina.

Z poslednej rovnice vidno, že potenciál prímesi v kombinácii s magnetickým poľom vytvára vo vnútri vzorky elektrónové stavy cirkulujúce okolo prímesí ako je znázornené na obrázku 5.6. Elektrón cirkulujúci okolo prímesi je v lokalizovanom stave a preto nenesie prúd, elektrón v hranovom stave sa pohybuje z jedného konca vzorky na druhý a nesie prúd ev_x.



Obr. 5.6: Lokalizované stavy na odpudivých a príťažlivých prímesiach. Tieto stavy do transportu neprispievajú, bez nich by však kvantový Hallov jav neexistoval. Vytvárajú totiž spojité spektrum stavov medzi Landauovými hladinami, vďaka čomu je experimentálne možné presúvať Fermiho energiu spojite medzi poslednou zaplnenou a prvou nezaplnenou Landauovou hladinou. Práve v dôsledku tohto má zavislosť $\varrho_{xy}(B)$ kvantové hallovské plateau konečnej šírky (pozri nasledujúci text).

5.3 Fermiho energia v systéme Landauových hladín

K pochopeniu kvantového Hallovho javu potrebujeme tiež poznať, ako sa v silnom magnetickom poli správa Fermiho energia. Najprv odvodíme počet elektrónových stavov na jednotku plochy 2D vodiča na jednej Landauovej hladine. Uvažujeme 2D plyn s plochou $L_x \times L_y$. Z Born-vonKarmanovej podmienky $e^{ik_x x} = e^{ik_x(x+L_x)}$ máme, že $k_x = \left(\frac{2\pi}{L_x}\right) j$, kde j je celé číslo. Vlnová funkcia $\varphi(y)$ je lokalizovaná okolo centra

$$Y = \frac{\hbar k_x}{eB} = \frac{\hbar 2\pi j}{eBL_x}. \tag{5.31}$$

Pretože Y musí ležať vo vnútri vzorky, musí platiť

$$\frac{-L_y}{2} < Y < \frac{L_y}{2} \quad \text{resp.} \quad \frac{-L_y}{2} < \frac{\hbar 2\pi j}{eBL_x} < \frac{L_y}{2}. \tag{5.32}$$

Odtiaľ dostaneme, že j môže nadobúdať len hodnoty z intervalu

$$-\frac{eBL_xL_y}{2h} < j < \frac{eBL_xL_y}{2h}. \tag{5.33}$$

Počet stavov v ploche $L_x \times L_y$ (hodnôt, ktoré môže nadobudnúť j-čko) je teda daný číslom $\frac{eB}{h} L_xL_y$ a počet stavov na jednotku plochy je

$$d = \frac{eB}{h}. \tag{5.34}$$

Veličina d sa tiež nazýva degenerácia Landauovej hladiny. Inými slovami, jednej Landauovej hladine prislúcha d stavov s rôznym k_x.

Vo všobecnosti je poloha Fermiho hladiny daná rovnicou

$$n = \int_0^\infty dE\, N(E)\, f(E), \tag{5.35}$$

kde $N(E)$ je hustota stavov, $f(E)$ je Fermiho distribúcia a n je elektrónová koncentrácia (na jednotku plochy v prípade 2D). V prípade $B = 0$ je $E(\vec{k}) = \hbar^2 k^2/2m$ a platí

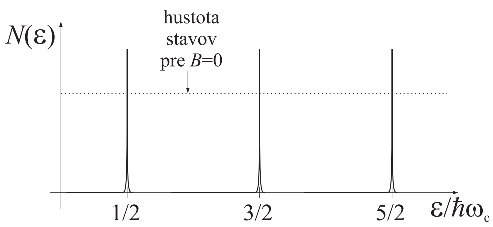
$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int 2\pi\, dk\, k = \int dE\, N(E). \tag{5.36}$$

Odtiaľ $N(E) = \frac{1}{2\pi} k(dk/dE) = m/2\pi\hbar^2$. Hustota stavov voľného 2D plynu je teda od energie nezávislá konštanta. V magnetickom poli máme namiesto spojitého spektra $E(\vec{k}) = \hbar^2 k^2/2m$ diskrétne spektrum Landauových hladín

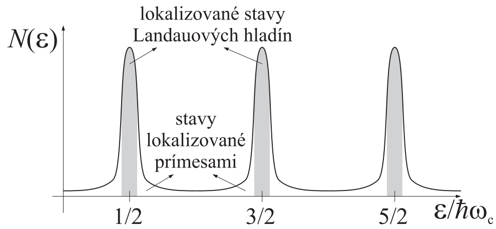
$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{5.37}$$

pričom každá je d krát degenerovaná. Hustota stavov teda musí byť

$$N(E) = \sum_{n=0}^{\infty} d\, \delta(E - E_n). \tag{5.38}$$



Obr. 5.7: Hustota stavov $N(\varepsilon)$ vo vzorke bez prímesí. Keďže medzi dvomi Landauovými hladinami nie sú žiadné stavy, Fermiho hladina sa môže nachádzať jedine na najvyššej obsadenej Landauovej hladine alebo výnimočne presne v strede medzi najvyššou úplne obsadenou a prvou úplne voľnou Landauovou hladinou.



Obr. 5.8: Vďaka prímesným stavom je $N(E)$ nenulové aj mimo Landauových hladín. Preto môže Fermiho energia s meniacim sa B spojite prechádzať cez lokalizované stavy medzi Landauovými hladinami.

Na obrázku 5.7 je tento výsledok (séria ostrých píkov) schématicky porovnaný s hustotou stavov pre $B = 0$. Ako sa výsledok (5.38) zmení za prítomnosti prímesí? Obmedzíme sa na kvalitatívne vysvetlenie. Za prvé, elektrónové stavy na Landauovych hladinách majú v dôsledku zrážok s prímesami konečnú dobu života τ a s ňou spojenú neurčitosť energie $\sim \hbar/\tau$. Landauove hladiny preto nie sú presne diskrétne ale majú konečnú šírku $\sim \hbar/\tau$. Vďaka tomu sa ostré píky hustoty stavov rozšíria, ako je schématicky ukázané na obrázku 5.8. Po druhé, v predchádzajúcom odseku sme ukázali, že vďaka prímesiam existujú v energetických medzerách medzi Landauovými hladinami lokalizované stavy elektrónov cirkulujúcich okolo prímesí. Vďaka týmto prímesným stavom existuje nenulová hustota stavov aj medzi Landauovými hladinami, čo opäť znázorňuje obrázok 5.8.

Teraz budeme diskutovať polohu Fermiho hladiny. Najprv tak urobíme bez vplyvu prímesí. Z rovníc (5.35) a (5.38) dostaneme

$$n = d \sum_{n=0}^{\infty} f(E_n). \tag{5.39}$$

Keď za $f(E)$ dosadíme Fermiho funkciu, dostaneme rovnicu pre E_F,

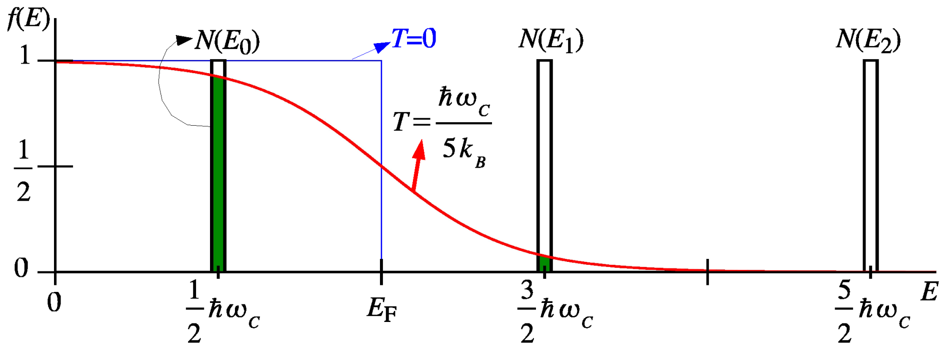
$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\exp\left(\frac{E_n - E_F}{k_B T}\right) + 1}, \quad \nu = \frac{n}{d}, \tag{5.40}$$

kde ν je tzv. faktor zaplnenia. Rovnica sa dá presne riešiť len numericky. V limite $T = 0$ K je však možné polohu Fermiho hladiny ako funkciu poľa B určiť aj bez výpočtov. Pri danom ν je najvyššia Landauova hladina, na ktorej sa nachádzajú elektróny, hladina s kvantovým číslom

$$i = \mathrm{Int}(\nu). \tag{5.41}$$

Ak ν nie je presne rovné celému číslu, Landauova hladina i je zaplnená len čiastočne. Vtedy je Fermiho hladina totožná z Landauovou hladinou i,

$$E_F = \hbar\omega_c \left(i + \frac{1}{2}\right), \tag{5.42}$$



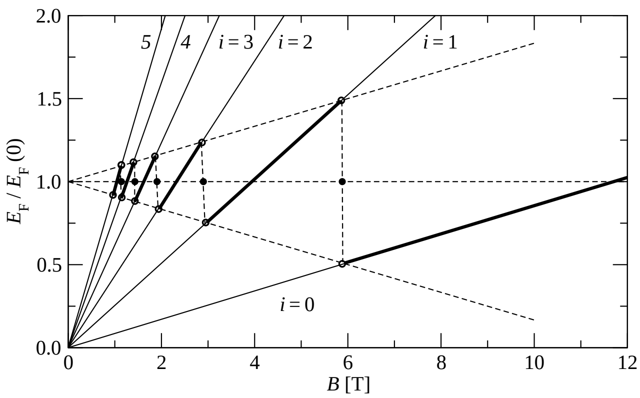
Obr. 5.9: Fermiho funkcia $f(E)$ pre dve rôzne teploty T v prípade $\nu = 1$. V tomto prípade je pri $T = 0$K úplne obsadená hladina $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_c$ a vyššie hladiny sú úplne neobsadené. Pri malom zvýšení teploty ($k_B T \ll \hbar\omega_c$) umožní Fermiho distribúcia veľmi malé obsadenie hladiny $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega_c$. Pritom musí platiť, že $f(\frac{1}{2}\hbar\omega_c) + f(\frac{3}{2}\hbar\omega_c) = 1$, odkiaľ po dosadení Fermiho funkcie hneď dostaneme $E_F = \hbar\omega_c$. Výsledok platí exaktne pre $T \to 0$. Hustoty stavov $N(E)$ sú kvôli jednoduchosti znázornené ako úzke obdĺžniky, v skutočnosti to majú byť δ funkcie.

pretože pri 0K je Fermiho hladina jednoducho najvyššia hladina, na ktorej ešte sú elektróny.

Ak je však ν presne rovné celému číslu, t.j. ak je ν–ta Landauova hladina obsadená do posledného miesta a na $(\nu+1)$-ej nie sú žiadne elektróny, potom Fermiho hladina leží presne v strede medzi ν-tou a $(\nu+1)$-ou hladinou. Na obrázku 5.9 je toto tvrdenie dokázané pre $\nu = 1$, podobne by sa postupovalo pre $\nu = 2, 3, \ldots$. Výsledok sa dá intuitívne chápať aj ako analógia s intrinzickým polovodičom, v ktorom Fermiho hladina takisto leží v strede medzi valenčným pásom (plne zaplneným) a vodivostným pásom (úplne voľným).

Závislosť $E_F(B)$ (pozri obr. 5.10) môžeme teda opísať takto. Ak ν nie je rovné celému číslu, Fermiho energia leží na Landauovej hladine $i = \text{Int}(\nu)$ a jej závislosť od B je

$$E_F = \hbar\omega_c \left(i + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar e B}{m} \left(i + \frac{1}{2}\right).$$



Obr. 5.10: Fermiho hladina elektrónového 2D plynu v magnetickom poli B.

Fermiho energia skočí mimo Landauovu hladinu (presne do stredu medzi plne zaplnenú a úplne voľnú hneď nad ňou) jedine v prípade, keď ν je presne celé číslo, t.j. jedine pri diskrétnych hodnotách magnetického poľa, daných vzťahom $B = \left(\frac{nh}{e}\right)\Big/$celé číslo.

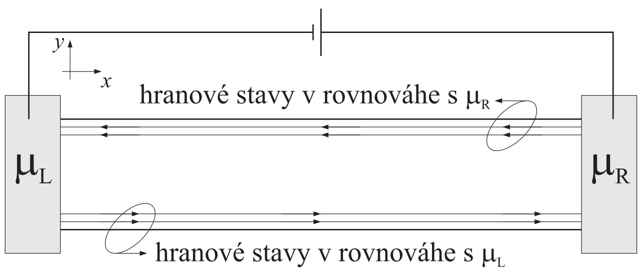
Toto všetko je pravda, pokiaľ predpokladáme, že vo vzorke nie sú prímesi. (Je zrejmé, že keby sme vzali do úvahy aj hranové stavy, tak Fermiho hladina sa v princípe môže nachádzať aj inde ako v strede. Príspevok od hranových stavov je však vo veľkej vzorke zanedbateľný a preto ho pri výpočte polohy Fermiho hladiny netreba uvažovať.) Principiálny dôsledok majú prímesné stavy. Keďže prímesí je makroskopické množstvo, priestor medzi Landauovými hladinami vypĺňa významná nenulová hustota prímesných stavov (viď obr. 5.8). Vďaka tomu môže Fermiho hladina prechádzať spojite od jednej Landauovej hladiny k druhej pre B meniace sa v intervale konečnej šírky (nespojité zmeny funkcie $E_F(B)$ na obrázku 5.10 si treba predstaviť spojite rozmazané). V nasledujúcom odseku uvidíme, že práve vďaka tomuto sa kvantované hodnoty Hallovho odporu pozorujú ako plateau konečnej šírky (bez prímesí by plateau boli nekonečne úzke a teda nepozorovateľné).

5.4 Kvantový Hallov jav v dvojterminálovej vzorke

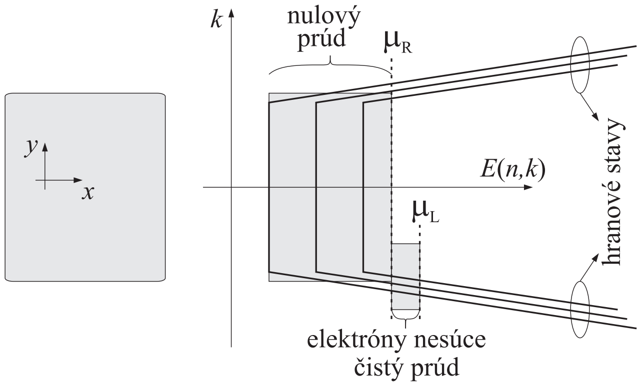
Teraz vysvetlíme kvantový Hallov jav v dvojterminálovej vzorke (obr. 5.11), neskôr vysvetlenie rozšírime na vzorky s bočnými terminálmi. Na obr. 5.11 je na vzorku s 2D plynom aplikované napätie $eV = \mu_L - \mu_R$. Vzorka je v silnom magnetickom poli $(0, 0, B)$, ktoré dá vzniknúť Landauovým hladinám a na hranách hranovým stavom. Všimnite si, že energetické spektrum $\mathcal{E}_n(k_x)$ a vlnová funkcia $\varphi(x, y) = \varphi_n(y - Y(k_x))\, e^{ik_x x}$ majú tie isté vlastnosti ako energetické spektrum a vlnové funkcie v 1D drôte (pozri text o stavoch v 1D). Inými slovami, kombinácia silného magnetického poľa a hranového potenciálu $U(y)$ urobí z 2D plynu 1D plyn. Podobne ako v kvantovom drôte, aj teraz má 1D elektrón rýchlosť v smere x, v tomto prípade

$$v_x = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial}{\partial k_x} E(n, k_x) = \frac{1}{eB}\frac{\partial U(y)}{\partial y}\Big|_{y=Y(k_x)}. \tag{5.43}$$

Principiálny rozdiel v porovnaní s kvantovým drôtom je ten, že stavy s $k_x > 0$ a $k_x < 0$ sú od seba priestorovo oddelené. Sú na opačných stranách vzorky, v prípade hranových stavov sú stavy s $k_x > 0$ a $k_x < 0$ vzdialené od seba o celú šírku vzorky (≈ 1 mm). V dôsledku tohto priestorového oddelenia je prekryv vlnových funkcií hranových stavov s $k_x > 0$ a $k_x < 0$ exponenciálne malý [$\varphi_n(y - Y)$ je lokalizovaná na rozmere $l_B \approx \sqrt{\hbar/(eB)} \approx 10$



Obr. 5.11: Kvantový Hallov jav v dvojterminálovej vzorke.



Obr. 5.12: V stavoch s energiou menšou ako Fermiho energia sa prúdy od stavov k_x presne kompenzujú prúdmi stavov $-k_x$. Čistý prúd nesú len elektróny, ktoré sú injektované z ľavého kontaktu do hranových stavov idúcich zľava do prava s energiou v intervale $[\mu_L, \mu_R]$.

nm], a preto disorder nedokáže rozptýliť elektrón zo stavu k_x do stavu $-k_x$. Ak sa Fermiho hladina nachádza medzi dvoma Landauovými hladinami, nie je možný ani rozptyl v rámci jednej (zaplnenej) Landauovej hladiny. Naviac, nie je možný ani rozptyl na prvú nezaplnenú Landauovu hladinu, pretože $\hbar\omega_c \gg k_B T$. Z týchto dôvodov môžeme uvažovať balistický transport aj napriek milimetrovým až centimetrovým rozmerom 2D vzorky.

Na obrázku 5.12 je ukázané, že čistý prúd nesú len elektróny, ktoré sú injektované z ľavého kontaktu do hranových stavov idúcich zľava do prava s energiou v intervale $[\mu_L, \mu_R]$. V stavoch s energiou menšou ako Fermiho energia sa prúdy od stavov k_x presne kompenzujú prúdmi stavov $-k_x$. Preto môžeme prúd počítať presne ako prúd cez balistický 1D drôt:

$$I = \frac{2}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{k_n(\mu_R)}^{k_n(\mu_L)} dk_x e \frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial k_x} E(n, k_x) = \frac{2e}{h} \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mu_R}^{\mu_L} dE_n = \frac{2e}{h} N(\mu_L - \mu_R). \quad (5.44)$$

Z obrázku 5.11 a 5.12 vidno, že elektróny v hranových stavoch na ľavej strane majú chemický potenciál μ_R pozdĺž celej hrany a podobne, elektróny v hranových stavoch na pravej strane majú chemický potenciál μ_R. Pre spád napätia pozdĺž hrany preto platí

$$eV = 0 \quad (5.45)$$

a spád napätia medzi ľavou a pravou hranou je

$$eV_H = \mu_L - \mu_R. \quad (5.46)$$

Odtiaľ dostaneme

$$R_L = \frac{V_L}{I} = 0, \quad R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{h}{2e^2} \frac{1}{N}. \quad (5.47)$$

Tieto výsledky súhlasia s experimentom na obrázku 5.1.

5.5 Aplikácia Büttikerovej formuly na kvantový Hallov jav

Na obrázku 5.13 je 6-terminálový hallovský kríž v silnom magnetickom poli v situácii, keď na Fermiho hladine existujú dva hranové stavy. Vo všeobecnosti môže byť hranových stavov $N_m = M$ pre každý z m prívodov.

Vidno, že hranové stavy „spájajú“ len dvojice elektród

$$(m \leftarrow n) = (2 \leftarrow 1),\ (3 \leftarrow 2),\ (4 \leftarrow 3),\ (5 \leftarrow 4),\ (6 \leftarrow 5),\ (1 \leftarrow 6), \tag{5.48}$$

pre ostatné dvojice $(m \leftarrow n)$ je $G_{mn} = 0$.

Pre $(m \leftarrow n)$ dané vzťahmi (5.48) máme

$$G_{mn} = \frac{2e^2}{h} T_{mn} = \frac{2e^2}{h} M \equiv G_C, \tag{5.49}$$

čo hneď vyplýva zo sumačného pravidla (4.11) pre $R_m = 0$ (spätný odraz v hranovom stave je krajne nepravdepodobný). Môžeme písať

$$\begin{array}{ccccccc}
G_{mn} & n=1 & n=2 & n=3 & n=4 & n=5 & n=6 \\
m=1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_C \\
m=2 & G_C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m=3 & 0 & G_C & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m=4 & 0 & 0 & G_C & 0 & 0 & 0 \\
m=5 & 0 & 0 & 0 & G_C & 0 & 0 \\
m=6 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_C & 0
\end{array} \tag{5.50}$$

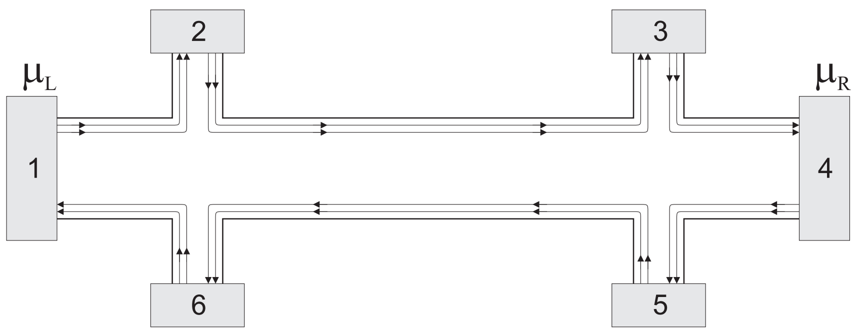
Büttikerove rovnice (4.16b) môžeme rozpísať ako

$$I_1 = (G_{12} + G_{13} + \cdots + G_{16})V_1 - G_{12}V_2 - G_{13}V_3 - G_{14}V_4 - G_{15}V_5 - G_{16}V_6, \tag{5.51a}$$

$$I_2 = -G_{21}V_1 + (G_{21} + G_{23} + \cdots + G_{26})V_2 - G_{23}V_3 - G_{24}V_4 - G_{25}V_5 - G_{26}V_6, \tag{5.51b}$$

$$\vdots$$

$$I_6 = -G_{61}V_1 - G_{62}V_2 - G_{63}V_3 - G_{64}V_4 - G_{65}V_5 + (G_{61} + G_{62} + \cdots + G_{65})V_6. \tag{5.51c}$$



Obr. 5.13:

Keď do týchto vzťahov dosadíme za G_{mn} vzťahy platné pre hranové stavy (viď vyššie), dostaneme

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_C & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_C \\ -G_C & G_C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_C & G_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_C & G_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_C & G_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -G_C & G_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix}. \tag{5.52}$$

V tejto sérii rovníc je jedna nadbytočná, pretože zároveň platí

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 0. \tag{5.53}$$

Naviac, jedno z napätí môžeme vziať za referenčné a môžeme ho položiť rovné nule. Bez újmy na všeobecnosti vyberieme $V_4 = 0$ a vynecháme 4. riadok a 4. stĺpec. Potom

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_C & 0 & 0 & 0 & -G_C \\ -G_C & G_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_C & G_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_C & G_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix}. \tag{5.54}$$

V Hallovom experimente platí $I_2 = I_3 = I_5 = I_6 = 0$, čím sa sústava (5.54) značne zjednoduší a okamžite z nej vypadnú riešenia

$$V_2 = V_3 = V_1, \qquad V_5 = V_6 = 0, \tag{5.55a}$$

$$I_1 = G_C V_1. \tag{5.55b}$$

Konečne longitudálna rezistencia je

$$R_L = \frac{V_2 - V_3}{I_1} = \frac{V_6 - V_5}{I_1} = 0, \tag{5.56}$$

Hallova rezistencia je

$$R_H = \frac{V_2 - V_6}{I_1} = \frac{V_3 - V_5}{I_1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{G_C} = \frac{h}{2e^2}\frac{1}{M} \tag{5.57}$$

a rezistencia na prúdových elektródach je

$$R_{4\leftarrow 1} = \frac{V_1 - V_4}{I_1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{h}{2e^2}\frac{1}{M}. \tag{5.58}$$

Na záver poznamenajme, že v našich úvahách sme analyzovali len vplyv magnetického poľa na orbitálny pohyb elektrónov. Magnetické pole však interaguje aj s elektrónovým spinom a spôsobuje Zeemanov jav, v dôsledku ktorého majú elektróny so spinom v smere magnetického poľa nižšiu celkovú energiu ako elektróny so spinom proti smeru poľa. Pôvodne jeden elektrónový subpás sa tak štiepi na dva subpásy s rôznymi spinmi, subpásové dno pre spiny v smere poľa je znížené o Zeemanovu energiu vzhľadom subpásové dno spinov proti poľu. Vtedy v poslednom vzťahu nedostaneme v menovateli dvojku a M-ko čísluje posledný obsadený subpás s danou orientáciou spinu. Inými slovami, kvantový schod v závislosti $R_{4\leftarrow 1}(B)$ sa rozdelí na dva schody s dvomi rôznymi orientáciami spinov.

5.6 Umelý spätný rozptyl v kvantovom Hallovom jave

Uvažujme Hallov kríž s dvojitým hradlom z obr. 5.14. Keď je napätie na hradle nulové, po obvode kríža cirkuluje M (=2) hranových stavov. Záporným napätím na hradle môžeme dosiahnuť, že cez škrtiacu prekážku prechádza len N (=1) hranových stavov, zatiaľ čo zostávajúcich $M-N$ (=1) hranových stavov sa od prekážky odrazí naspäť.

Pre situáciu na obrázku 5.14 môžeme Büttikerovu maticu G_{mn} rozpísať analogickým postupom ako v (5.50), musíme však vziať do úvahy, že časť $p=\frac{M-N}{M}$ hranových stavov sa odrazí od prekážky späť:

$$\begin{array}{ccccccc}
G_{mn} & n=1 & n=2 & n=3 & n=4 & n=5 & n=6 \\
m=1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_C \\
m=2 & G_C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m=3 & 0 & (1-p)G_C & 0 & 0 & p\,G_C & 0 \\
m=4 & 0 & 0 & G_C & 0 & 0 & 0 \\
m=5 & 0 & 0 & 0 & G_C & 0 & 0 \\
m=6 & 0 & p\,G_C & 0 & 0 & (1-p)G_C & 0
\end{array} \tag{5.59}$$

Potom úplne analogickým postupom, ako sme dostali rovnice (5.54), dostaneme rovnice

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_C & 0 & 0 & 0 & -G_C \\ -G_C & G_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-p)G_C & G_C & -p\,G_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_C & 0 \\ 0 & -p\,G_C & 0 & -(1-p)G_C & G_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix}, \tag{5.60}$$

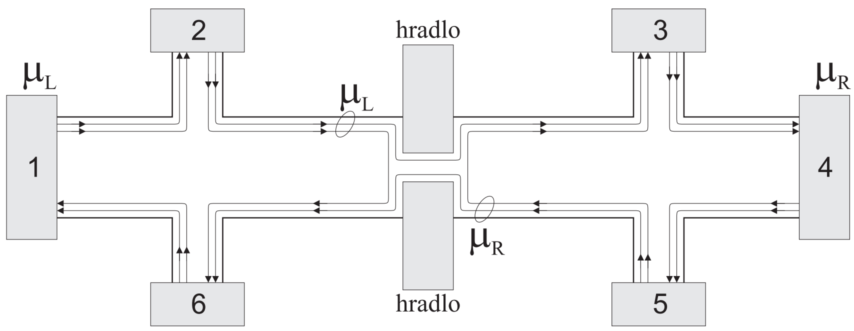
z ktorých po využití $I_2=I_3=I_5=I_6=0$ okamžite dostávame riešenia

$$V_2=V_1, \quad V_5=0, \quad V_3=(1-p)V_1, \quad V_6=p\,V_1 \tag{5.61a}$$

$$I_1=(1-p)G_C V_1. \tag{5.61b}$$

Konečne longitudálna rezistencia je

$$R_L=\frac{V_2-V_3}{I_1}=\frac{V_6-V_5}{I_1}=\frac{p}{1-p}\frac{1}{G_C}=\frac{h}{2e^2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{M}\right), \tag{5.62}$$



Obr. 5.14: Hallov kríž s dvojitým hradlom.

Hallova rezistencia je

$$R_H = \frac{V_2 - V_6}{I_1} = \frac{V_3 - V_5}{I_1} = \frac{1}{G_C} = \frac{h}{2e^2}\,\frac{1}{M} \tag{5.63}$$

a rezistencia na prúdových elektródach je

$$R_{4\leftarrow 1} = \frac{V_1 - V_4}{I_1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{1-p}\,\frac{1}{G_C} = \frac{h}{2e^2}\,\frac{1}{N}\,. \tag{5.64}$$

Tieto výsledky pre R_L, R_H a $R_{4\leftarrow 1}$ sa jasne odlišujú od analogických výsledkov získaných v predchádzajúcej stati pre Hallov kríž bez hradla. Boli overené experimentálne, čo dokazuje „silu“ Büttikerovho formalizmu.

Teraz odvodíme výsledky pre R_L, R_H a $R_{4\leftarrow 1}$ intuitívne. Čistý prúd z ľava doprava je

$$I_1 = \frac{2e}{h}\,N(\mu_L - \mu_R) = \frac{2e^2}{h}\,N\,V_1, \tag{5.65}$$

pretože prekážka prepúšťa len N hranových stavov. Túto rovnicu môžeme písať ako

$$I_1 = \frac{2e^2}{h}\,M\,V_1(1-p), \tag{5.66}$$

kde $p = \frac{M-N}{M}$. Elektróda 2 „vidí“ len kanály vychádzajúce z elektródy 1, tieto kanaly nastavia vo 2-ke a v 5-ke chemické potenciály na

$$\mu_2 = eV_1 \quad \text{a} \quad \mu_5 = 0. \tag{5.67}$$

Elektróda 6 „vidí“ $M - N$ kanálov prichádzajúcich z 2-ky s chemickým potenciálom μ_2 a N kanálov prichádzajúcich z 5-ky s chemickým potenciálom μ_5. Preto

$$\mu_6 = \frac{M-N}{M}\,\mu_L + \frac{N}{M}\,\mu_R = e\,V_1\,p. \tag{5.68}$$

Analogicky dostaneme pre elektródu 3

$$\mu_3 = \frac{N}{M}\,\mu_L + \frac{M-N}{M}\,\mu_R = e\,V_1\,(1-p). \tag{5.69}$$

Zo vzťahov (5.66) – (5.69) už ľahko skonštruujeme vzťahy pre R_L, R_H a $R_{4\leftarrow 1}$.

Kapitola 6

Mezoskopický transport v neusporiadanom vodiči s jedným kanálom: Andersonova 1D lokalizácia

6.1 Odpor 1D vodiča so slabým disorderom

Dvojterminálový odpor R_0 sústavy rezervoár – jednokanálový vodič – rezervoár môžeme podľa kapitoly 3 vyjadriť Landauerovou formulou

$$R_0 = \frac{h}{2e^2}\,\frac{1}{T}, \tag{6.1}$$

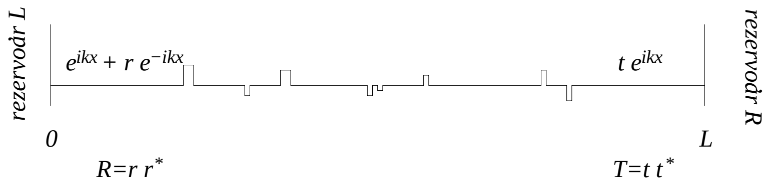
kde $T \equiv T(\varepsilon_F)$ je pravdepodobnosť prechodu elektrónovej vlny cez prekážky vo vodiči. Na obrázku 6.1 je ukázaný jednokanálový vodič s mnohými náhodne rozloženými prekážkami. Pod prekážkami si môžeme predstaviť napríklad náhodne rozložené prímesné atómy, tzv. prímesný neporiadok alebo jednoducho disorder. Takýto vodič sa zvykne nazývať neusporiadaný vodič. Na výpočet jeho dvojterminálového odporu stačí vypočítať transmisiu T pre konkrétny disorder. Takisto môžeme vypočítať štvorterminálový odpor

$$R_{\text{drôt}} = \frac{h}{2e^2}\,\frac{R}{T}, \tag{6.2}$$

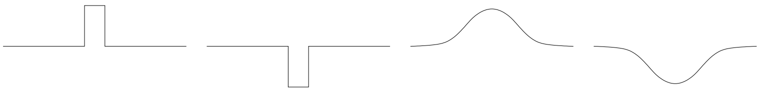
kde $R = 1 - T$ je pravdepodobnosť odrazu. Ideme počítať štvorterminálový odpor (6.2), ale rovnako by sme mohli počítať dvojterminálový odpor (6.1), ktorý by sa so štvorterminálovým odporom očividne zhodoval pre dostatočne dlhý vodič (v dostatočne dlhom vodiči s mnohými prekážkami je $R \to 1$).

Budeme počítať bezrozmerný odpor definovaný ako

$$\varrho \equiv \frac{R_{\text{drôt}}}{\frac{h}{2e^2}} = \frac{R}{T}. \tag{6.3}$$



Obr. 6.1: Jednokanálový vodič dĺžky L obsahuje disorder náhodne rozložených prekážok. Tieto vytvárajú náhodný 1D potenciál zložený z bariér a jám. Z rezervoáru L ide vlna e^{ikx} ($k \equiv k_F$), ktorá sa čiastočne odráža naspäť (s pravdepodobnosťou R) a čiastočne prechádza cez disorder (s pravdepodobnosťou T) až do rezervoáru R.



Obr. 6.2:

Uvažujme najprv jednu prekážku. Môže to byť ľubovolná „dostatočne dobre lokalizovaná“ prekážka, napríklad ako na obr. 6.2. Prekážka je úplne charakterizovaná amplitúdami reflexie (r, r') a transmisie (t, t'), kde r a t sa vzťahujú na vlnu dopadajúcu na prekážku zľava a r' a t' na vlnu dopadajúcu zprava (obrázok 6.3). Platí

$$|r|^2 + |t|^2 = 1, \qquad |r'|^2 + |t'|^2 = 1, \tag{6.4}$$

a tiež

$$|r| = |r'|, \qquad |t| = |t'|. \tag{6.5}$$

Uvažujme ďalej dve prekážky charakterizované amplitúdami r_i, t_i, r'_i, t'_i $(i = 1, 2)$. Ako je ukázané na obrázku 6.4, vzdialenosť prekážok je a a zľava na ne dopadá vlna e^{ikx}. Ideme vyjadriť transmisnú amplitúdu t tejto vlny vpravo od dvojprekážky ako funkciu amplitúd charakterizujúcich jednotlivé prekážky, pričom predpokladáme, že r_i, t_i, r'_i, t'_i $(i = 1, 2)$ poznáme. V oblasti medzi prekážkami je možné vlnovú funkciu písať všeobecne ako

$$\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \tag{6.6}$$

kde A a B sú konštanty. Pre x vpravo od prekážky 2 platí (pri zanedbaní konečného rozmeru prekážky) vzťah

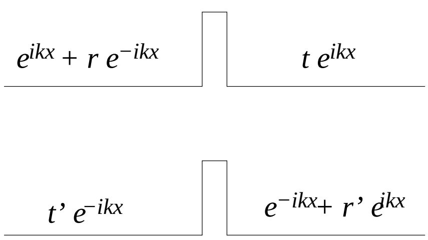
$$te^{ikx} = t_2 Ae^{ika}e^{ik(x-a)}, \tag{6.7}$$

Odtiaľ

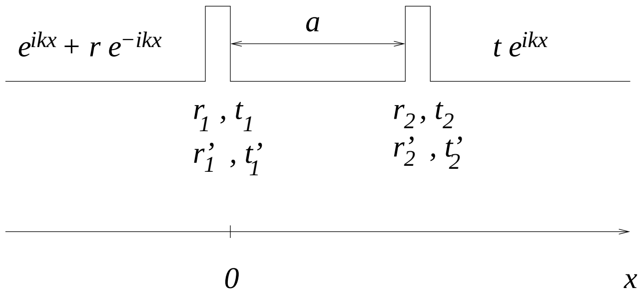
$$t = t_2 A, \tag{6.8}$$

takže potrebujeme nájsť konštantu A. Vlnovú funkciu pre x v oblasti medzi prekážkami môžeme nájsť napríklad metódou parciálnych vĺn tak, že postupne sčítame vlny vytvorené mnohonásobným odrazom medzi prekážkami :

$$\begin{aligned}\psi(x) &= t_1e^{ikx} + r_2t_1e^{i2ka}e^{-ikx} + r'_1r_2e^{i2ka}t_1e^{ikx} + r_2r'_1e^{i2ka}r_2t_1e^{2ika}e^{-ikx} \\ &\quad + (r'_1r_2e^{i2ka})^2t_1e^{ikx} + (r_2r'_1e^{i2ka})^2r_2t_1e^{2ika}e^{-ikx} + (r'_1r_2e^{i2ka})^3t_1e^{ikx} + \dots \\ &= \left(e^{ikx}t_1 + e^{-ikx}r_2t_1e^{i2ka}\right)\left[1 + r'_1r_2e^{i2ka} + (r'_1r_2e^{i2ka})^2 + \dots\right].\end{aligned} \tag{6.9}$$



Obr. 6.3:



Obr. 6.4:

Na pravej strane poslednej rovnice spoznávame v hranatej zátvorke geometrický rad s kvocientom $r_1' r_2 e^{i2ka}$, ktorého modul je menší ako jedna. Preto rad môžeme sčítať:

$$\psi(x) = \left(e^{ikx}t_1 + e^{-ikx}r_2t_1e^{i2ka}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(r_1'r_2e^{i2ka})^k = \frac{e^{ikx}t_1 + e^{-ikx}r_2t_1e^{i2ka}}{1 - r_1'r_2e^{i2ka}}. \quad (6.10)$$

Porovnaním pravej strany (6.10) s pravou stranou (6.6) dostaneme vyjadrenia pre A a B. Keď dosadíme A do (6.8), dostaneme

$$t = t_2A = \frac{t_1t_2}{1 - r_1'r_2e^{i2ka}}. \quad (6.11)$$

Dosadíme posledný vzťah do (6.3) a dostávame vzťah pre odpor dvoch prekážok:

$$\varrho = \frac{R}{T} = \frac{1 - |t|^2}{|t|^2} = \frac{1}{|t|^2} - 1 = \frac{|1 - r_1'r_2e^{i2ka}|^2}{|t_1t_2|^2} - 1. \quad (6.12)$$

Odpor jednej prekážky, keď je vo vodiči sama, je

$$\varrho_1 = \frac{1 - |t_1|^2}{|t_1|^2} = \frac{|r_1|^2}{1 - |r_1|^2} \qquad \text{resp.} \qquad \varrho_2 = \frac{1 - |t_2|^2}{|t_2|^2} = \frac{|r_2|^2}{1 - |r_2|^2}. \quad (6.13)$$

Pomocou týchto vzťahov a vzťahov (6.4, 6.5) sa vzťah (6.12) dá ľahko upraviť na tvar

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + 2\varrho_1\varrho_2 - 2[\varrho_1\varrho_2(1 + \varrho_1)(1 + \varrho_2)]^{1/2}\cos\phi, \quad (6.14)$$

kde

$$\phi = \arg(r_1'r_2) + 2ka \quad (6.15)$$

je fáza. Vidíme, že odpor dvoch prekážok nie je jednoduchým sériovým súčtom ich individuálnych odporov, pretože za súčtom $\varrho_1 + \varrho_2$ nasledujú ešte dva ďaľšie členy. Tieto dva členy vznikli interferenciou mnohonásobne odrazených vĺn v oblasti medzi prekážkami.

Uvažujme teraz štatistický súbor vodičov, v ktorom sa vzdialenosť medzi prekážkami mení od vzorky k vzorke náhodne. Vďaka poslednému členu na pravej strane vzťahu (6.14) fluktuuje od vzorky k vzorke aj koherentný odpor. Očividne, vo všeobecnosti *koherentný odpor neusporiadaného systému musí fluktuovať od vzorky k vzorke preto, že disorder je od vzorky k vzorke mikroskopicky odlišný: od vzorky k vzorke je preto iný aj interferenčný príspevok k odporu.* Pravdaže, pri klasickom (nekoherentnom) transporte fluktuácie tohto typu neexistujú. Keďže koherentný odpor fluktuuje, zdá sa rozumné počítať jeho strednú hodnotu. Nech sa teda a mení od vzorky k vzorke náhodne s určitým pravdepodobnostným rozdelením $p(a)$. Môžeme definovať stredný odpor

$$\langle \varrho \rangle = \int \varrho(\phi(a))\, p(a)\, da, \tag{6.16}$$

kde $\varrho(\phi)$ je dané vzťahom (6.14) a $\phi(a)$ vzťahom (6.15). V realistických vzorkách typické hodnoty a zvyčajne veľmi dobre spĺňajú nerovnosť $a \gg \frac{1}{k}$, čo stredovanie odporu veľmi zjednodušuje. Ak je totiž $a \gg \frac{1}{k}$, potom fáza $\phi(a) \approx 2ka$ fluktuuje od vzorky k vzorke v rozsahu rádove väčšom ako rozsah $(0, 2\pi)$, vďaka čomu funkcia $cos(\phi)$ vo vzťahu (6.14) fluktuuje náhodne v intervale $(-1, 1)$. Preto je stredná hodnota člena $\propto cos(\phi)$ rovná nule. Inak povedané, stredovanie stačí urobiť podľa vzťahu

$$\langle \varrho \rangle = \int_0^{2\pi} \varrho(\phi)\, \mathcal{P}(\phi)\, d\phi, \tag{6.17}$$

kde $\mathcal{P}(\phi) = \frac{1}{2\pi}$ je homogénne rozdelenie náhodnej premennej ϕ v intervale $(0, 2\pi)$. Pretože $\int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi = 0$, dostávame

$$\langle \varrho \rangle = \varrho_1 + \varrho_2 + 2\varrho_1\varrho_2. \tag{6.18}$$

Ak sa menia náhodne od vzorky k vzorke aj individuálne odpory ϱ_1 a ϱ_2, môžeme vystredovať aj cez ϱ_1 a ϱ_2 a máme

$$\langle \varrho \rangle = \langle \varrho_1 \rangle + \langle \varrho_2 \rangle + 2\langle \varrho_1 \rangle \langle \varrho_2 \rangle. \tag{6.19}$$

Aj po vystredovaní teda zostáva faktom, že $\langle \varrho \rangle$ nie je sériový súčet $\langle \varrho_1 \rangle + \langle \varrho_2 \rangle$, pretože stredovanie prežil interferenčný člen $2\langle \varrho_1 \rangle \langle \varrho_2 \rangle$.

Doposiaľ sme analyzovali odpor dvoch prekážok. Teraz diskusiu zobecníme na vodič s veľkým množstvom prekážok. Predpokladajme, že odpor ϱ_1 je odpor jednej konfigurácie N náhodne rozmiestnených prekážok a zaveďme označenie $\varrho_N \equiv \varrho_1$. Na obrázku 6.4 si túto N-ticu prekážok môžeme predstaviť zoradenú vľavo od prekážky č. 2. Pridajme k týmto N prekážkam do polohy x_{N+1} ďalšiu prekážku. Na obrázku 6.4 by touto prekážkou bola prekážka č. 2, ktorej odpor ϱ_2 preznačíme na $\varrho_I \equiv \varrho_2$. S týmito označeniami môžeme rovnicu (6.14) prepísať do tvaru

$$\varrho_{N+1} = \varrho_N + \varrho_I + 2\varrho_N\varrho_I - 2[\varrho_N\varrho_I(1+\varrho_N)(1+\varrho_I)]^{1/2}\cos\phi_N, \tag{6.20}$$

kde ϱ_{N+1} teraz predstavuje odpor jednej konfigurácie $N+1$ prekážok,

$$\phi_N = \arg[r'_N r_I] + 2ka \tag{6.21}$$

je fáza (vo vzťahu 6.15 sme preznačili r'_1 na r'_N a r_2 na r_I) a

$$a = x_{N+1} - x_N \tag{6.22}$$

je vzdialenosť medzi $N+1$-vou a N-tou prekážkou. Všimnime si, že $\varrho_{N=2}$ je funkciou ϕ_1, $\varrho_{N=3}$ je funkciou ϕ_2 a ϕ_1, a tak ďalej, takže ϱ_{N+1} je funkciou fáz ϕ_N, ϕ_{N-1}, ..., ϕ_2 a ϕ_1.

Znovu vezmime štatistický súbor vodičov a tak ako v prípade dvoch prekážok stredujme

$$\langle \varrho_{N+1} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varrho_N(\phi_N)\, d\phi_N. \tag{6.23}$$

Keď takto vystredujeme rovnicu (6.20), člen $\propto cos\phi_N$ sa vynuluje. Keď ju potom vystredujeme cez ϕ_{N-1}, ..., ϕ_2, ϕ_1, dostaneme rovnicu

$$\langle \varrho_{N+1} \rangle = \langle \varrho_N \rangle + \langle \varrho_I \rangle + 2\langle \varrho_N \rangle \langle \varrho_I \rangle, \tag{6.24}$$

kde $\langle \varrho_I \rangle$ je stredná hodnota odporu jedinej prekážky, keďže vo všeobecnosti aj tento fluktuuje. V nasledujúcej diskusii symbol $\langle\ \rangle$ kvôli jednoduchosti vynecháme, takže

$$\varrho_{N+1} = \varrho_N + \varrho_I + 2\varrho_N \varrho_I. \tag{6.25}$$

Posledná rovnica je rekurzívna rovnica. Najprv ju vyriešime pre prípad slabých prekážok spôsobom, ktorý použil Anderson et al.

Urobme priradenie

$$\varrho_{N+1} \equiv \varrho(L + dL), \quad \varrho_N \equiv \varrho(L), \quad \varrho_I \equiv \varrho(dL). \tag{6.26}$$

Inými slovami, namiesto odporu N prekážok hovoríme o odpore $\varrho(L)$ vodiča dĺžky L, ku ktorému pridáme veľmi krátky úsek dL s odporom $\varrho(dL)$. Nech pre malé dL je

$$\varrho(dL) \propto dL \quad \text{resp.} \quad \varrho(L) = \varrho_{\text{clas}}\, dL, \tag{6.27}$$

kde ϱ_{clas} je klasický merný odpor 1D vodiča. Vzťah (6.27) je Taylorov rozvoj $\varrho(dL)$ do prvého rádu v dL. Zdôraznime, že aproximácia (6.27) platí, ak sú všetky prekážky slabé, t.j. $|r_I|^2 \ll 1$. V opačnom prípade sa v úseku dL nevyhnutne vyskytne aj silná (napríklad perfektne odrážajúca) prímes, kedy je $\varrho(dL) \gg 1$ aj pre $dL \to 0$. Analýzu pre silné prekážky urobíme v ďalšom odseku.

Z posledných troch rovníc dostaneme

$$\varrho(L + dL) = \varrho(L) + \varrho_{\text{clas}}\, dL + 2\varrho(L)\, \varrho_{\text{clas}}\, dL, \tag{6.28}$$

čo dá

$$\frac{\varrho(L + dL) - \varrho(L)}{1 + 2\varrho(L)} = \varrho_{\text{clas}}\, dL. \tag{6.29}$$

Rozvojom $\varrho(L + dL) \approx \varrho(L) + \frac{d\varrho(L)}{dL}\, dL$ získame diferenciálnu rovnicu pre $\varrho(L)$. Obidve jej strany zintegrujeme cez premennú L:

$$\int_0^L \frac{\frac{d\varrho(L)}{dL}}{1 + 2\varrho(L)}\, dL = \int_0^L \varrho_{\text{clas}}\, dL. \tag{6.30}$$

Odtiaľ

$$\int_0^{\varrho(L)} \frac{d\varrho}{1 + 2\varrho} = \varrho_{\text{clas}}\, L. \tag{6.31}$$

Po elementárnej integrácii dostávame

$$\varrho(L) = \frac{1}{2}\, (e^{2\varrho_{\text{clas}}\, L} - 1). \tag{6.32}$$

Stredný koherentný odpor neusporiadaného jednokanálového vodiča teda vzrastá s dĺžkou vodiča exponenciálne. Exponenciálny nárast je dôsledok interferencie vĺn generovaných mnohonásobným odrazom od mnohých prekážok. Ohmov zákon $\varrho(L) = \varrho_{clas} L$ sa realizuje len pre malé L.

6.2 Odpor 1D vodiča so silným disorderom

Odvodenie vzťahu (6.32) bolo obmedzené na slabé prekážky ($|r_I|^2 \ll 1$). Teraz chceme rozobrať prípad, kedy sú prekážky ľubovolne silné. Pre jednoduchosť nech sú všetky prekážky rovnako silné, t.j.

$$|r_1|^2 = |r_2|^2 = \cdots = |r_N|^2 = R. \tag{6.33}$$

Zapíšeme rovnicu (6.25) v tvare

$$\varrho_N = \varrho_{N-1} + \varrho_I + 2\varrho_{N-1}\varrho_I, \tag{6.34}$$

kde teraz

$$\varrho_I = \frac{R}{1-R}. \tag{6.35}$$

Zavedieme označenia $\alpha \equiv R/(1-R)$ a $\beta \equiv (1+R)/(1-R)$ a prepíšeme (6.34) ako

$$\varrho_N = \alpha + \beta\varrho_{N-1}. \tag{6.36}$$

Rekurentný vzťah (6.36) rozpíšeme:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \alpha + \beta\varrho_0 \\ \varrho_2 &= \alpha + \beta\varrho_1 = \alpha + \alpha\beta + \beta^2\varrho_0 \\ \varrho_3 &= \alpha + \beta\varrho_2 = \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3\varrho_0 \\ &\vdots \\ \varrho_N &= \alpha + \beta\varrho_{N-1} = \alpha(1+\beta+\cdots+\beta^{N-1}) + \beta^N\varrho_0\,. \end{aligned} \tag{6.37}$$

Po sčítaní geometrického radu $1+\beta+\cdots+\beta^{N-1} = (1-\beta^N)/(1-\beta)$ a dosadení za $\varrho_0 = 0$ dostávame

$$\varrho_N = \frac{\alpha}{\beta-1}\left[\beta^N - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+R}{1-R}\right)^N - 1\right]. \tag{6.38}$$

Výsledok platí pre ľubovolné $R < 1$. Ako prvý ho odvodil Landauer zložitejším postupom, ktorý s ohľadom na jeho historickú dôležitosť prepočítavame v Dodatku D.

Porovnajme výsledok (6.38) s klasickým ohmickým odporom

$$\varrho_N = N\,\frac{R}{1-R}, \tag{6.39}$$

teda so sériovým súčtom odporov $\frac{R}{1-R}$ jednotlivých prekážok. Rozdiel je zrejmý a podstatný: koherentný odpor (6.38) rastie s N exponenciálne zatiaľčo ohmický odpor lineárne.

Pre $R \ll 1$ je $\ln\frac{1+R}{1-R} \simeq 2R$ a koherentný odpor (6.38) sa dá aproximovať vzťahom

$$\varrho_N = \frac{1}{2}\,(e^{2NR} - 1). \tag{6.40}$$

Ak vyjadríme N ako $N = N_I L$, kde N_I je koncentrácia prekážok a L je dĺžka drôtu, potom

$$\varrho_N \equiv \varrho(L) = \frac{1}{2}\,(e^{2N_I RL} - 1). \tag{6.41}$$

Posledná rovnica je totožná s rovnicou (6.32). Naozaj, pre $R \ll 1$ sa klasický odpor (6.39) dá prepísať v tvare

$$\varrho_N \simeq N\,R = N_I\,RL \equiv \varrho_{\text{clas}} L, \tag{6.42}$$

z ktorého vidno, že súčin $N_I R$ je totožný s klasickým merným odporom ϱ_{clas}.

6.3 Distribúcia odporov v súbore neusporiadaných mezoskopických vodičov: DMPK rovnica pre jeden kanál

Vo veľkom súbore makroskopicky rovnakých vodičov je neusporiadanosť od vzorky k vzorke mikroskopicky rôzna, v dôsledku čoho odpor fluktuuje od vzorky k vzorke. Preto bolo rozumné počítať strednú hodnotu odporu. Aká je však veľkosť fluktuácií odporu? Alebo detailnejšia otázka, aká je pravdepodobnosť namerať určitú hodnotu odporu? V tomto odseku odvodíme rovnicu pre pravdepodobnostnú distribúciu odporu v súbore neusporiadaných vodičov s jedným kanálom.

Najprv uvažujme štatistický súbor 1D vodičov, v ktorom každý vodič obsahuje dve prekážky. Pre odpor dvoch prekážok sme odvodili vzťah

$$\varrho(\varrho_1, \varrho_2, \phi) = \varrho_1 + \varrho_2 + 2\varrho_1\varrho_2 - 2[\varrho_1\varrho_2(1+\varrho_1)(1+\varrho_2)]^{1/2}\cos\phi, \tag{6.43}$$

kde $\phi = \arg(r_1' r_2) + 2ka$. Predpokladajme, že poznáme distribúciu $\mathcal{P}_1(\varrho_1)$ odporu ϱ_1 a distribúciu $\mathcal{P}_2(\varrho_2)$ odporu ϱ_2, kde

$$\int_0^\infty \mathcal{P}_j(\varrho_j)\,d\varrho_j = 1, \qquad \bar{\varrho}_j = \int_0^\infty \varrho_j\,\mathcal{P}_j(\varrho_j)\,d\varrho_j \qquad j = 1, 2. \tag{6.44}$$

Predpokladajme znovu, že $a >> 1/k$. Vtedy sa ϕ mení od drôtu k drôtu náhodne v intervale $< 0, 2\pi >$ a distribúcia premennej ϕ je $\frac{1}{2\pi}$. Pýtame sa, aká je pravdepodobnosť $\mathcal{P}(\varrho)d\varrho$ nájsť v súbore vzorku s odporom ϱ z intervalu $< \varrho, \varrho + d\varrho >$. Je zrejmé, že hľadaný odpor ρ bude mať každá vzorka, ktorej parametre ϱ_1, ϱ_2 a ϕ spĺňajú rovnicu $\varrho = \varrho(\varrho_1, \varrho_2, \phi)$, kde $\varrho(\varrho_1, \varrho_2, \phi)$ je dané vzťahom (6.43). Pravdepodobnosť, že vzorka má parametre ϱ_1, ϱ_2 a ϕ z intervalov $< \varrho_1, \varrho_1 + d\varrho_1 >$, $< \varrho_2, \varrho_2 + d\varrho_2 >$ a $< \phi, \phi + d\phi >$, je daná súčinom príslušných pravdepodobností, teda

$$d\phi\,\frac{1}{2\pi}\,d\varrho_1\,\mathcal{P}_1(\varrho_1)\,d\varrho_2\,\mathcal{P}_2(\varrho_2). \tag{6.45}$$

Keď túto pravdepodobnosť integrujeme cez všetky ϱ_1, ϱ_2 a ϕ, ktoré vyhovujú rovnici $\varrho = \varrho(\varrho_1, \varrho_2, \phi)$, dostaneme práve pravdepodobnosť $\mathcal{P}(\varrho)$. Môžeme to zapísať ako

$$\mathcal{P}(\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty d\varrho_1 \int_0^\infty d\varrho_2\,\mathcal{P}_1(\varrho_1)\,\mathcal{P}_2(\varrho_2)\,\delta(\varrho - \varrho(\varrho_1, \varrho_2, \phi)), \tag{6.46}$$

kde integrujeme cez všetky ϱ_1, ϱ_2 a ϕ bez obmedzenia, avšak integrand násobíme δ-funkciou $\delta(\varrho - \varrho(\varrho_1, \varrho_2, \phi))$, vďaka ktorej integrand prispieva len keď $\varrho(\varrho_1, \varrho_2, \phi) = \varrho$.

Vďaka δ-funkcii môžeme na pravej strane (6.46) integrovať napríklad cez premenú ϱ_2. Tento krok, technicky trochu zložitý, je urobený v Dodatku E. Dostaneme

$$\mathcal{P}(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\phi \int_0^\infty d\varrho_1\,\mathcal{P}_1(\varrho_1)\,\mathcal{P}_2(u), \tag{6.47}$$

kde

$$u(\varrho, \varrho_1, \phi) = \varrho + \varrho_1 + 2\varrho\varrho_1 + 2[\varrho\varrho_1(1+\varrho)(1+\varrho_1)]^{1/2}\cos\phi. \tag{6.48}$$

Zobecnime vzťah (6.47) na $N+1$ prekážok. Nech ϱ_2 je odpor N prekážok a ϱ_1 odpor jednej prekážky. Potom

$$\mathcal{P}_{N+1}(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\phi \int_0^\infty d\varrho_1\,\mathcal{P}_1(\varrho_1)\,\mathcal{P}_N(u). \tag{6.49}$$

Integrály v (6.49) vypočítame v limite slabých prekážok, teda pre $\varrho_1 \ll 1$. Najprv rozvinieme vo vzťahu (6.48) faktor $(1+\varrho_1)^{1/2}$ pre malé ϱ_1. Dostaneme

$$u(\varrho, \varrho_1, \phi) \approx \varrho + \Delta, \tag{6.50}$$

kde

$$\Delta = \varrho_1 + 2\varrho\varrho_1 + 2[\varrho(1+\varrho)]^{1/2}\varrho_1^{1/2}(1 + \frac{1}{2}\,\varrho_1)\cos\phi. \tag{6.51}$$

Pre $\varrho_1 \ll 1$ je $\Delta \ll \varrho$. Rozviňme teda $\mathcal{P}_N(u)$ pre malé Δ ako

$$\mathcal{P}_N(u) \approx \mathcal{P}_N(\varrho) + \Delta\,\frac{\partial \mathcal{P}_N(\varrho)}{\partial\varrho} + \frac{1}{2}\,\Delta^2\,\frac{\partial^2\mathcal{P}_N(\varrho)}{\partial\varrho^2} \tag{6.52}$$

a dosaďme to do (6.49). Dostaneme

$$\mathcal{P}_{N+1}(\varrho) \approx \mathcal{P}_N(\varrho) + J_1\,\frac{\partial \mathcal{P}_N(\varrho)}{\partial\varrho} + J_2\,\frac{\partial^2\mathcal{P}_N(\varrho)}{\partial\varrho^2}, \tag{6.53}$$

kde

$$J_k = \frac{1}{\pi k!}\int_0^\pi d\phi \int_0^\infty d\varrho_1\,\mathcal{P}_1(\varrho_1)\,\Delta^k, \quad k = 1, 2. \tag{6.54}$$

Pri výpočte integrálu J_k najprv integrujeme cez ϕ, pričom využijeme elementárne integrály $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\phi = 1$, $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\phi\, d\phi = 0$ a $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\phi\, d\phi = \frac{1}{2}$. Dostaneme

$$J_1 = \int_0^\infty d\varrho_1\,\mathcal{P}_1(\varrho_1)\,(\varrho_1 + 2\varrho\varrho_1) = \bar{\varrho}_1(1+2\varrho), \tag{6.55}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2}\int_0^\infty d\varrho_1\,\mathcal{P}_1(\varrho_1)\,[(\varrho_1 + 2\varrho\varrho_1)^2 + 2\varrho(1+\varrho)\varrho_1(1+\frac{1}{2}\,\varrho_1)^2] \\ &\approx \int_0^\infty d\varrho_1\,\mathcal{P}_1(\varrho_1)\,\varrho(1+\varrho)\varrho_1 = \varrho\bar{\varrho}_1(1+\varrho), \end{aligned} \tag{6.56}$$

kde sme pri integrovaní cez ϱ_1 využili vzťahy (6.44) a pri výpočte J_2 sme v druhom kroku ponechali len príspevky do prvého rádu v ϱ_1. Rovnica (6.53) nadobudne tvar

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{N+1}(\varrho) &\approx \mathcal{P}_N(\varrho) + \bar{\varrho}_1\Big[(1+2\varrho)\,\frac{\partial\mathcal{P}_N(\varrho)}{\partial\varrho} + \varrho(1+\varrho)\,\frac{\partial^2\mathcal{P}_N(\varrho)}{\partial\varrho^2}\Big] \\ &= \mathcal{P}_N(\varrho) + \bar{\varrho}_1\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\Big[\varrho(1+\varrho)\,\frac{\partial\mathcal{P}_N(\varrho)}{\partial\varrho}\Big]. \end{aligned} \tag{6.57}$$

Ako v prvom odseku tejto kapitoly, aj teraz urobme priradenie

$$N+1 \to L + \Delta L, \quad N \to L, \quad \bar{\varrho}_1 \to \bar{\varrho}(\Delta L), \quad \lim_{\Delta L\to 0}\frac{\varrho(\Delta L)}{\Delta L} = \text{const} \equiv \frac{1}{\xi}, \tag{6.58}$$

kde ξ je tzv. lokalizačná dĺžka. (V predošlom odseku sme miesto $1/\xi$ použili symbol ϱ_{clas}. Význam pojmu ξ vysvetlíme v ďalšom odseku.) Z (6.57) dostaneme

$$\mathcal{P}(\varrho, L+\Delta L) \approx \mathcal{P}(\varrho, L) + \frac{1}{\xi}\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\Big[\varrho(1+\varrho)\,\frac{\partial\mathcal{P}(\varrho, L)}{\partial\varrho}\Big], \tag{6.59}$$

a odtiaľ

$$\frac{\partial\mathcal{P}(\varrho, L)}{\partial L} = \frac{1}{\xi}\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\Big[\varrho(1+\varrho)\,\frac{\partial\mathcal{P}(\varrho, L)}{\partial\varrho}\Big]. \tag{6.60}$$

Posledná rovnica je rovnica Dorokhova-Mella-Pereyru-Kumara (DMPK) pre jednokanálový vodič. Určuje, aké je rozdelenie odporov v súbore makroskopicky rovnakých 1D vodičov dĺžky L, ktorých disorder vykazuje lokalizačnú dĺžku ξ. Odvodenie podobnej rovnice pre mnohokanálový vodič je oveľa ťažšie a zostáva za rámcom tohto textu.

6.4 Výpočet stredných hodnôt, obrovské fluktuácie odporu

Vypočítajme najprv stredný odpor $\bar{\varrho}(L) = \int_0^\infty d\varrho\, \varrho\, \mathcal{P}(\varrho, L)$. Násobme rovnicu (6.60) odporom ϱ a integrujme cez ϱ metódou per partes. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial L} &= \frac{1}{\xi} \int_0^\infty d\varrho\, \varrho\, \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[\varrho(1+\varrho)\, \frac{\partial \mathcal{P}(\varrho, L)}{\partial \varrho} \right] \\
&= \frac{1}{\xi} \underbrace{\left[\varrho^2 (1+\varrho)\, \frac{\partial \mathcal{P}(\varrho, L)}{\partial \varrho} \right]_0^\infty}_{=0} - \frac{1}{\xi} \int_0^\infty d\varrho\, \varrho(1+\varrho)\, \frac{\partial \mathcal{P}(\varrho, L)}{\partial \varrho} \\
&= -\frac{1}{\xi} \underbrace{[\varrho(1+\varrho)\mathcal{P}(\varrho, L)]_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{\xi} \int_0^\infty d\varrho\, (1+2\varrho)\mathcal{P}(\varrho, L) = \frac{1 + 2\bar{\varrho}(L)}{\xi},
\end{aligned} \tag{6.61}$$

teda

$$\frac{d\bar{\varrho}}{1 + 2\bar{\varrho}} = \frac{dL}{\xi}. \tag{6.62}$$

Integrovaním tejto rovnice dostaneme

$$\bar{\varrho}(L) = \frac{1}{2}\, (e^{2L/\xi} - 1), \tag{6.63}$$

čo je výsledok zhodný s výsledkom (6.32). Podobne vypočítame $\overline{\varrho^2}(L) = \int_0^\infty d\varrho\, \varrho^2\, \mathcal{P}(\varrho, L)$. Násobíme rovnicu (6.60) kvadrátom ϱ^2 a integrujeme cez ϱ metódou per partes. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\varrho^2}}{\partial L} &= \frac{1}{\xi} \int_0^\infty d\varrho\, \varrho^2\, \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[\varrho(1+\varrho)\, \frac{\partial \mathcal{P}(\varrho, L)}{\partial \varrho} \right] \\
&= \frac{1}{\xi} \underbrace{\left[\varrho^3 (1+\varrho)\, \frac{\partial \mathcal{P}(\varrho, L)}{\partial \varrho} \right]_0^\infty}_{=0} - \frac{2}{\xi} \int_0^\infty d\varrho\, \varrho^2(1+\varrho)\, \frac{\partial \mathcal{P}(\varrho, L)}{\partial \varrho} \\
&= -\frac{2}{\xi} \underbrace{[\varrho^2(1+\varrho)\mathcal{P}(\varrho, L)]_0^\infty}_{=0} + \frac{2}{\xi} \int_0^\infty d\varrho\, \varrho(2+3\varrho)\mathcal{P}(\varrho, L) = 2\, \frac{2\bar{\varrho} + 3\overline{\varrho^2}}{\xi},
\end{aligned} \tag{6.64}$$

kde $\bar{\varrho}$ je dané vzťahom (6.63). Máme teda rovnicu

$$\frac{\partial \overline{\varrho^2}}{\partial L} = 2\, \frac{2\bar{\varrho} + 3\overline{\varrho^2}}{\xi}. \tag{6.65}$$

Je to diferenciálna rovnica pre $\overline{\varrho^2}$. Vyriešime ju metódou variácie konštant a dostaneme

$$\overline{\varrho^2}(L) = \frac{1}{6}\, (e^{6L/\xi} - 3e^{2L/\xi} + 2). \tag{6.66}$$

Konečne, pre disperziu odporu dostaneme vzťah

$$\frac{[\, \overline{\varrho^2}(L) - \bar{\varrho}^2(L)]^{1/2}}{\bar{\varrho}(L)} \simeq e^{L/\xi} \qquad \text{pre } L/\xi \gg 1. \tag{6.67}$$

Vidíme, že disperzia odporu rastie s rastúcim L, a to dokonca exponenciálne. Fluktuácie odporu okolo strednej hodnoty sú teda ďaleko väčšie ako stredná hodnota sama. Preto $\bar{\varrho}(L)$ nie je štatisticky reprezentatívna veličina.

Anderson navrhol, že štatisticky reprezentatívna veličina by mohla byť premenná

$$f = \ln(1+\varrho). \tag{6.68}$$

Hľadajme jej strednú hodnotu a disperziu.

Prenásobením (6.60) veličinou f a integrovaním cez ϱ metódou per partes dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{f}}{\partial L} &= \frac{1}{\xi}\int_0^\infty d\varrho\, \ln(1+\varrho)\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\varrho(1+\varrho)\,\frac{\partial\mathcal{P}(\varrho,L)}{\partial\varrho}\right] \\ &= \frac{1}{\xi}\underbrace{\left[\varrho(1+\varrho)\,\ln(1+\varrho)\,\frac{\partial\mathcal{P}(\varrho,L)}{\partial\varrho}\right]_0^\infty}_{=0} - \frac{1}{\xi}\int_0^\infty d\varrho\,\varrho\,\frac{\partial\mathcal{P}(\varrho,L)}{\partial\varrho} \\ &= -\frac{1}{\xi}\underbrace{\left[\varrho\mathcal{P}(\varrho,L)\right]_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{\xi}\int_0^\infty d\varrho\,\mathcal{P}(\varrho,L) = \frac{1}{\xi}.\end{aligned} \tag{6.69}$$

Odtiaľ

$$\bar{f} = L/\xi, \tag{6.70}$$

alebo

$$\overline{\ln(1+\varrho)} = L/\xi. \tag{6.71}$$

Posledný vzťah platí pre ľubovoľné L, pre veľké L máme $\overline{\ln(\varrho)} \simeq L/\xi$. V neusporiadanom mezoskopickom systéme sa teda ohmickým (lineárnym) škálovaním s dĺžkou vodiča vyznačuje logaritmus odporu, nie odpor. Keď spojíme za sebou niekoľko neusporiadaných mezoskopických vodičov, sériovo sa sčítajú logaritmy ich odporov, nie odpory.

Prenásobením (6.60) veličinou f^2 a integrovaním cez ϱ metódou per partes dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{f^2}}{\partial L} &= \frac{1}{\xi}\int_0^\infty d\varrho\, \ln^2(1+\varrho)\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\varrho(1+\varrho)\,\frac{\partial\mathcal{P}(\varrho,L)}{\partial\varrho}\right] \\ &= \frac{1}{\xi}\underbrace{\left[\varrho(1+\varrho)\,\ln^2(1+\varrho)\,\frac{\partial\mathcal{P}(\varrho,L)}{\partial\varrho}\right]_0^\infty}_{=0} - \frac{2}{\xi}\int_0^\infty d\varrho\,\varrho\,\ln(1+\varrho)\,\frac{\partial\mathcal{P}(\varrho,L)}{\partial\varrho} \\ &= -\frac{2}{\xi}\underbrace{\left[\varrho\,\ln(1+\varrho)\,\mathcal{P}(\varrho,L)\right]_0^\infty}_{=0} + \frac{2}{\xi}\int_0^\infty d\varrho\left(\ln(1+\varrho) + \frac{\varrho}{1+\varrho}\right)\mathcal{P}(\varrho,L) \simeq 2\,\frac{\bar{f}+1}{\xi},\end{aligned} \tag{6.72}$$

kde sme v poslednom kroku predpokladali $\rho >> 1$. Z rovnice

$$\frac{\partial \overline{f^2}}{\partial L} = 2\,\frac{\bar{f}+1}{\xi} \tag{6.73}$$

dostaneme

$$\overline{f^2}(L) = \frac{L^2}{\xi^2} + 2\,\frac{L}{\xi} = \bar{f}^2 + 2\bar{f}. \tag{6.74}$$

Pre disperziu dostávame výsledok

$$\frac{(\overline{f^2} - \bar{f}^2)^{1/2}}{\bar{f}} = \left(\frac{\bar{f}}{2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{L}{2\xi}\right)^{-1/2}. \tag{6.75}$$

Vidíme, že disperzia premennej f sa zmenšuje s rastúcou dĺžkou L. Experimentálne je teda vhodné merať strednú hodnotu premennej f. Meranie strednej hodnoty odporu je prakticky nemožné v dôsledku obrovských fluktuácií odporu.

6.5 Asymptotické riešenie DMPK rovnice, typický odpor

Zapíšme distribúciu $\mathcal{P}(\varrho, L)$ v tvare

$$\mathcal{P}(\varrho, L) = \frac{1}{1+\varrho}\, g(\ln(1+\varrho), L), \tag{6.76}$$

kde g je distribúcia premennej $f = \ln(1+\varrho)$. V limite $L/\xi >> 1$ dominujú v súbore odpory $\varrho \gg 1$. Keď (6.76) dosadíme do (6.60) a vezmeme $\varrho \gg 1$, dostaneme

$$\xi \frac{\partial}{\partial L} \frac{1}{\varrho}\, g(\ln\varrho, L) = \frac{\partial}{\partial \varrho}\Big[\varrho^2 \frac{\partial}{\partial \varrho}\frac{1}{\varrho}\, g(\ln\varrho, L)\Big] = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \ln\varrho}\Big[-g(\ln\varrho, L) + \frac{\partial}{\partial \ln\varrho}\, g(\ln\varrho, L)\Big], \tag{6.77}$$

čiže

$$\xi \frac{\partial}{\partial L}\, g(\ln\varrho, L) = \frac{\partial}{\partial \ln\varrho}\Big[-g(\ln\varrho, L) + \frac{\partial}{\partial \ln\varrho}\, g(\ln\varrho, L)\Big]. \tag{6.78}$$

Posledná rovnica má z matematického hladiska tvar zhodný s difúznou rovnicou, ktorej riešenie je dobre známe. Toto riešenie,

$$g(\ln\varrho, L) = \frac{1}{(4\pi L/\xi)^{1/2}}\, \exp\Big[-\frac{(\ln\varrho - L/\xi)^2}{4L/\xi}\Big], \tag{6.79}$$

je gaussián centrovaný okolo bodu

$$\bar{f} = \overline{\ln(1+\varrho)} = \frac{L}{\xi} \tag{6.80}$$

s varianciou

$$\overline{f^2} - \bar{f}^2 = \frac{2L}{\xi}. \tag{6.81}$$

Anderson definoval typický odpor ϱ_t vzťahom $\ln(1+\varrho_t) \equiv \bar{f}$, ktorý pre $\bar{f} = L/\xi$ dáva

$$\varrho_t = e^{\bar{f}} - 1 = e^{L/\xi} - 1. \tag{6.82}$$

Vidíme, že typický odpor rastie s L exponenciálne, avšak oveľa pomalšie ako stredný odpor (6.63). Názov typický odpor vystihuje, že distribúcia (6.79) má pík práve v $\varrho = \varrho_t$.

Keď (6.79) dosadíme do (6.76), v limite $\varrho >> 1$ máme

$$\mathcal{P}(\varrho, L) \simeq \frac{1}{\varrho}\frac{1}{(4\pi L/\xi)^{1/2}}\, \exp\Big[-\frac{(\ln\varrho - L/\xi)^2}{4L/\xi}\Big]. \tag{6.83}$$

Porovnajme distribúciu premennej ϱ s distribúciou premennej $\ln\varrho$. Distribúcia $\mathcal{P}(\varrho, L)$ nemá narozdiel od $g(\ln\varrho, L)$ žiadne význačné centrum. Všimnime si, že $\mathcal{P}(\varrho, L)$ nie je vôbec centrovaná okolo hodnoty stredného odporu; za tým účelom odporúčame čitateľovi, aby si distribúciu (6.83) vyniesol do grafu ako funkciu ϱ pre určité $L/\xi >> 1$. Tiež si všimnime, že $\mathcal{P}(\varrho, L)$ klesá pre $\varrho \to \infty$ iba ako mocninná funkcia ϱ; zvykne sa hovoriť, že $\mathcal{P}(\varrho, L)$ má dlhý vysokoodporový chvost. Preto sme v predchádzajúcom odseku našli obrovské fluktuácie odporu a preto stredný odpor nie je štatisticky reprezentatívna veličina.

Na záver diskutujme fyzikálny význam lokalizačnej dĺžky ξ. Pretože $\varrho = R/T$, platí

$$\ln(1+\varrho) = -\ln T = -\ln|t|^2, \tag{6.84}$$

kde t je amplitúda vlny prepustenej cez disorder. Definujme vzťahom $-\ln|t_t|^2 \equiv \ln(1+\varrho_t)$ typickú amplitúdu t_t. Pomocou (6.82) dostaneme, že $|t_t| \simeq \exp(-L/2\xi)$. Disorder teda typickú vlnu exponenciálne tlmí na škále 2ξ. Keby sme elektrón vložili medzi dva polonekonečné disordery, vlnová funkcia by bola utlmená z obidvoch strán, čiže lokalizovaná. Jav sa nazýva Andersonova lokalizácia a exponenciálne rastúci odpor je jej prejavom.

6.6 Stredná vodivosť

Doposiaľ sme sa zaujímali o štatistické vlastnosti štvorterminálového odporu $\varrho = R/T$. Teraz nás bude zaujímať, aké štatistické vlastnosti má štvorterminálová vodivosť $g = T/R$. Vráťme sa najprv k výsledku pre odpor dvoch prekážok,

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + 2\varrho_1\varrho_2 - 2[\varrho_1\varrho_2(1+\varrho_1)(1+\varrho_2)]^{1/2}\cos\phi, \tag{6.85}$$

a skúsme stredovať cez fázu ϕ jeho prevrátenú hodnotu, teda vodivosť dvoch prekážok

$$g = \frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2 + 2\varrho_1\varrho_2 - 2[\varrho_1\varrho_2(1+\varrho_1)(1+\varrho_2)]^{1/2}\cos\phi}. \tag{6.86}$$

Označíme $a \equiv \varrho_1 + \varrho_2 + 2\varrho_1\varrho_2$ a ešte $b \equiv -2[\varrho_1\varrho_2(1+\varrho_1)(1+\varrho_2)]^{1/2}$ a stredujeme:

$$\begin{aligned}\langle g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\cos\phi}\,d\phi &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{(a^2-b^2)^{1/2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{(a^2-b^2)^{1/2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}}{a+b}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{(a^2-b^2)^{1/2}} = \frac{1}{|\varrho_1-\varrho_2|},\end{aligned} \tag{6.87}$$

kde sme pri výpočte integrálu využili substitúciu $x = \mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}$ a fakt, že $a^2 \geq b^2$. Vidíme, že

$$\frac{1}{\langle g\rangle} = \frac{1}{\langle 1/\varrho\rangle} = |\varrho_1 - \varrho_2|. \tag{6.88}$$

Keďže $\langle\varrho\rangle = \varrho_1+\varrho_2+2\varrho_1\varrho_2$, neplatí vzťah $\langle\varrho\rangle \simeq 1/\langle 1/\varrho\rangle$, typický pre náhodnú premennú s rozumnou disperziou. Znovu, $\langle\varrho\rangle$ nie je štatisticky reprezentatívna veličina.

Neplatnosť vzťahu $\langle\varrho\rangle \simeq 1/\langle g\rangle$ najlepšie vidno, ak máme dve prekážky s rovnakými odpormi $\varrho_1 = \varrho_2$. Ich stredný odpor $\langle\varrho\rangle$ má očividne konečnú hodnotu, ale $\langle g\rangle \to \infty$. Dôvod, prečo stredná vodivosť dvoch rovnakých prekážok diverguje, vidno zo vzťahu (6.86). Ak v ňom položíme $\varrho_1 = \varrho_2$, menovateľ nadobúda nulovú hodnotu pre $\phi = 0$ a $\phi = 2\pi$. Dvojprekážka je v tomto prípade perfektne priepustná, tento jav je známy ako rezonančné tunelovanie. V štatistickom súbore vodičov s dvomi prekážkami sa nevyhnutne nájde aj taký, ktorý je perfektne priepustný. Keďže jeho vodivosť je nekonečná, diverguje aj vodivosť stredovaná cez súbor, i keď sú vodivosti ostatných vzoriek konečné.

Diskusiu ľahko rozšírime na neusporiadaný vodič s mnohými prekážkami. Strednú hodnotu štvorterminálovej vodivosti $g = 1/\rho$ takého vodiča môžeme vypočítať zo vzťahu

$$\langle g\rangle = \int_0^{\infty} d\varrho\,\frac{1}{\varrho}\,\mathcal{P}(\varrho, L)\,, \tag{6.89}$$

kde $\mathcal{P}(\varrho, L)$ je distribúcia daná DMPK rovnicou (6.60). Pre $\varrho \ll 1$ sa (6.60) upraví na tvar

$$\xi\,\frac{\partial\mathcal{P}(\varrho, L)}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\varrho\,\frac{\partial\mathcal{P}(\varrho, L)}{\partial\varrho}\right], \tag{6.90}$$

ktorému vyhovuje riešenie

$$\mathcal{P}(\varrho, L) = \frac{\xi}{L}\,e^{-\varrho/(L/\xi)}. \tag{6.91}$$

Podľa posledného vzťahu nadobúda $\mathcal{P}(\varrho, L)$ pre $\rho \to 0$ konečnú hodnotu. Preto je podintegrálna funkcia vo vzťahu (6.89) pre malé ρ úmerná $1/\rho$. Integrál z takejto funkcie nevyhnutne diverguje v dôsledku nulovej dolnej medze, takže znovu máme $\langle g\rangle = \infty$.

Nakoniec sa pýtajme, aká je stredná hodnota dvojterminálovej vodivosti $G = (2e^2/h)T$. Pretože $\varrho = (1 - T)/T$, transmisiu T môžeme vyjadriť ako $T = 1/(1 + \varrho)$ a jej strednú hodnotu môžeme vyjadriť vzťahom

$$\langle T \rangle = \int_0^\infty d\varrho \, \frac{1}{1+\varrho} \, \mathcal{P}(\varrho, L) \,. \tag{6.92}$$

Integrál v tomto vzťahu je opäť treba počítať pomocou DMPK rovnice. Toto sa dá urobiť analyticky iba v limite $L/\xi \gg 1$ a výpočet (prvý krát ho urobil Abrikosov) je technicky náročný a zdĺhavý. Preto len uvedieme konečný výsledok:

$$\langle T \rangle \simeq (L/\xi)^{-3/2} \exp\left(-L/4\xi\right) . \tag{6.93}$$

Exponenciálny pokles strednej transmisie sa dal intuitívne očakávať ako prejav Andersonovej lokalizácie - exponenciálneho tlmenia vlny disorderom. Na výsledku (6.93) je prekvapujúci faktor $1/4$ v exponente, pretože odhad typickej amplitúdy v predchádzajúcom odseku ukázal pokles $\exp(-L/2\xi)$. Odtiaľ by sa na prvý pohľad zdalo, že pre transmisiu musíme dostať pokles $\exp(-L/\xi)$, správny je však výsledok (6.93). V literatúre sa semtam vyskytne vzťah $\langle G \rangle \propto \exp(-L/\xi)$, má však byť $\langle G \rangle \propto \exp(-L/4\xi)$.

Vlastnosti koherentného odporu mezoskopického jednokanálového vodiča s disorderom, tak ako sme ich diskutovali v tejto kapitole, čakajú na experimentálne pozorovanie. Zatiaľ existujú len experimenty, v ktorých sa tieto vlastnosti prejavujú nepriamo, spolu s inými efektami. S ohľadom na rýchly vývoj je však meranie čisto koherentného transportu cez 1D disorder len otázkou času.

Kapitola 7

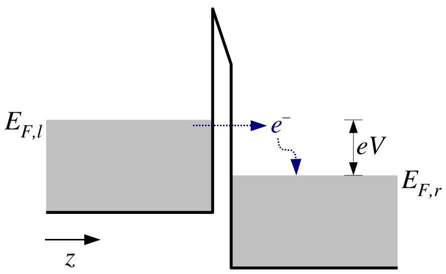
Jednoelektrónové tunelovanie a coulombovská blokáda.

7.1 Úvodné poznámky

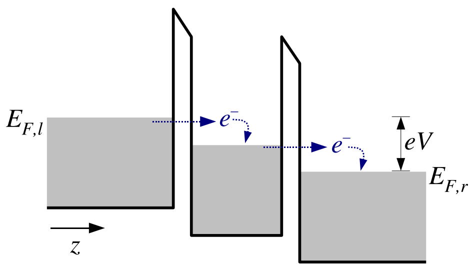
Medzi elementárne príklady kvantovej mechaniky patrí výpočet pravdepodobnosti tunelovania elektrónu cez potenciálovú bariéru. V príklade sa uvažuje tunelovanie jedného elektrónu. V pevnolátkových systémoch je možné študovať tunelovanie mnohých neinteragujúcich elektrónov (kvázičastíc) napríklad meraním I-V charakteristiky systému hrubá vrstva kovu - tenká vrstva dielektrika - hrubá vrstva kovu. V tomto systéme kovové vrstvy hrajú úlohu elektród (emitora a kolektora), pričom elektróny prechádzajú z emitora do kolektora tunelovaním cez dielektrikum (viď. obr. 7.1).

Podobne je možné študovať transport elektrónov cez kovovú vrstvu odizolovanú od kovových elektród dvomi dielektrickými bariérami (viď. obr. 7.2). Elektrón pri ceste z emitora do kolektora najprv pretuneluje cez ľavú bariéru. Za predpokladu, že medzi bariérami jeho energia zrelaxovala v dôsledku nepružných zrážok, tento (alebo iný) elektrón potom pretuneluje cez pravú bariéru do kolektora tak, že obidva tunelovacie procesy sú vzájomne nezávislé (nekoherentné resp. sekvenčné). Opačná limita, ktorú v ďalšom neuvažujeme, je koherentné tunelovanie cez dvojitú bariéru, keď je vzdialenosť medzi bariérami oveľa menšia ako elektrónová stredná voľná dráha.

V nasledujúcom odseku odvodíme I-V charakteristiku systémov na obrázkoch 7.1 a 7.2 pre neinteragujúce elektróny. Uvidíme, že I(V) je spojitá funkcia V, takže tunelovací prúd môže v princípe byť nesený ľubovoľným (aj neceločíselným) počtom elektrónov.



Obr. 7.1: Tunelovacia bariéra kov - dielektrikum - kov pod napätím.



Obr. 7.2: Tunelovacia dvojbariéra. Predpokladáme sekvenčné tunelovanie, ktoré sa realizuje, ak je vzdialenosť medzi bariérami väčšia ako stredná voľná dráha medzi dvomi zrážkami.

Neprejavuje sa diskrétnosť elektrónového náboja.

V ďalšom odseku potom ukážeme, že interakcia medzi elektrónmi sa môže pri dostatočne nízkych teplotách prejaviť tzv. coulombovskou blokádou, vďaka ktorej systémom tuneluje s narastajúcim napätím 0 elektrónov, 1 elektrón, 2 elektróny, atď. Prúd ako funkcia napätia vykazuje schodovitý nárast, pričom každý schod zodpovedá prúdu nesenému práve jedným elektrónom. Vtedy hovoríme o jednoelektrónovom tunelovaní.

V poslednom odseku bude opísaný tzv. jednoelektrónový tranzistor, založený na jave coulombovskej blokády.

7.2 Tunelovanie neinteragujúcich elektrónov

Počítajme I-V charakteristiku systému na obr. 7.3. Vyberieme si ako nulovú hladinu energie dno vodivostného pása na ľavej strane, $E_{C,l} = 0$. Potom (predpokladajúc parabolický disperzný zákon) môžeme energiu elektrónu naľavo od bariéry vyjadriť ako

$$E = E_z + E_t = \frac{\hbar^2 k_{z,l}^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_{t,l}^2}{2m} \tag{7.1}$$

a napravo od bariéry ako

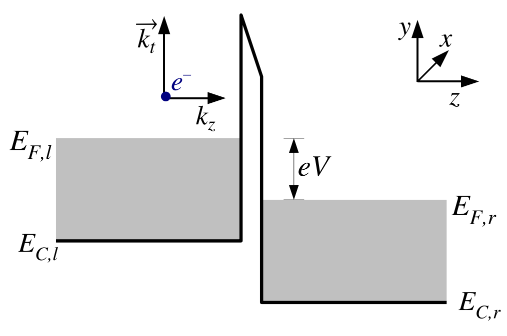
$$E = \frac{\hbar^2 k_{z,r}^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_{t,r}^2}{2m} + E_{C,r}, \tag{7.2}$$

kde k_z je zložka vlnového vektora $\vec{k}$ kolmá na rozhranie kov - bariéra, $\vec{k}_t$ je priečna (na os z kolmá) zložka a $E_{C,r} = -eV$ je dno vodivostného pása napravo od bariéry. Pri tunelovaní sa priečna zložka vlnového vektora zachováva, t.j. $\vec{k}_{t,l} = \vec{k}_{t,r}$, $E_{t,l} = E_{t,r}$. Preto

$$E_z = \frac{\hbar^2 k_{z,l}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_{z,r}^2}{2m} + E_{C,r}. \tag{7.3}$$

Prúdovú hustotu elektrónov s vlnovými vektormi $\vec{k}_l$ z intervalu $(\vec{k}_l, \vec{k}_l + d\vec{k}_l)$, dopadajúcu na bariéru zľava, môžeme vyjadriť ako

$$j_i = -e\frac{2}{(2\pi)^3}\, f_l(\vec{k}_l)\, v_z(\vec{k}_l)\, d\vec{k}_l, \tag{7.4}$$



Obr. 7.3: Model tunelovacej dvojbariéry v systéme kov - dielektrikum - kov.

kde f_l je distribučná funkcia na ľavej strane bariéry a

$$v_z(\vec{k}_l) = \frac{1}{\hbar}\,\frac{\partial E(\vec{k}_l)}{\partial k_{z,l}} = \frac{\hbar k_{z,l}}{m} \tag{7.5}$$

je zložka rýchlosti kolmá na bariéru. Na druhú stranu bariéry pretuneluje prúdová hustota

$$j_l = -e\,\frac{2}{(2\pi)^3}\,T(k_{z,l})\,f_l(k_t, k_{z,l})\,\frac{\hbar k_{z,l}}{m}\,dk_{z,l}\,d\vec{k}_t, \tag{7.6}$$

kde $T(k_{z,l})$ je transmisný koeficient (pravdepodobnosť pretunelovania cez bariéru), ktorý je len funkciou kolmej zložky vlnového vektora ($k_{z,l}$) resp. energie $E_{z,l}$.

Podobne môžeme písať pre prúdovú hustotu, ktorá pretunelovala zprava doľava, že

$$j_r = -e\,\frac{2}{(2\pi)^3}\,T(k_{z,r})\,f_r(k_t, k_{z,r})\,\frac{\hbar k_{z,r}}{m}\,dk_{z,r}\,d\vec{k}_t. \tag{7.7}$$

Pre danú kolmú energiu E_z je transmisný koeficient symetrický, t.j.

$$T(E_{z,l}) = T(E_{z,r}). \tag{7.8}$$

Platí tiež, že

$$k_{z,l}dk_{z,l} = k_{z,r}dk_{z,r} = \frac{m}{\hbar^2}\,dE_z, \tag{7.9}$$

ak diferencujeme obe strany rovnice (7.3). Výsledná prúdová hustota j v smere napäťového spádu je potom rozdielom prúdových hustôt j_l a j_r integrovaných cez všetky $\vec{k}$:

$$j = e\,\frac{2}{(2\pi)^3\hbar}\int_0^\infty dE_z \int_0^\infty dk_t\,k_t \int_0^{2\pi} d\phi\,T(E_z)\left[f_l(E_z,k_t) - f_r(E_z,k_t)\right], \tag{7.10}$$

kde integrácia cez E_z ide od nuly po nekonečno, pretože tunelovanie zprava doľava pre $E_z < 0$ nie je možné.

Distribučné funkcie f_l a f_r sú Fermiho funkcie

$$f_l(E_z,E_t) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_z+E_t-E_{F,l}}{k_BT}\right)+1}, \quad f_r(E_z,E_t) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_z+E_t-E_{F,r}}{k_BT}\right)+1}, \tag{7.11}$$

kde $E_{F,l}$ a $E_{F,r}$ sú Fermiho energie naľavo resp. napravo od bariéry, pričom

$$E_{F,l} = E_{F,r} + eV. \tag{7.12}$$

Pre parabolický disperzný zákon sa rovnica (7.10) ľahko upraví na tvar

$$j = e\,\frac{4\pi m}{(2\pi)^3\hbar^3}\int_0^\infty dE_z\,T(E_z)\int_0^\infty dE_t\,\Big[f_l(E_z,E_t) - f_r(E_z,E_t)\Big]. \tag{7.13}$$

Pri dostatočne nízkych teplotách je možné distribučné funkcie (7.11) nahradiť jednotkou pre $E_z + E_t \leq E_F$ a nulou pre $E_z + E_t > E_f$. To nám umožní upraviť (7.13) na tvar

$$j = \frac{em}{2\pi^2\hbar^3}\left[\int_0^{E_{F,l}} dE_z\,T(E_z)\int_0^{E_{F,l}-E_z} dE_t - \int_0^{E_{F,r}} dE_z\,T(E_z)\int_0^{E_{F,r}-E_z} dE_t\right] =$$

$$\frac{em}{2\pi^2\hbar^3}\left[\int_0^{E_F} dE_z\,T(E_z)(E_F - E_z) - \int_0^{E_F-eV} dE_z\,T(E_z)(E_F - eV - E_z)\right], \tag{7.14}$$

kde sme využili (7.12) a preznačili $E_{F,l}$ na E_F. Z (7.14) dostaneme pre $eV \ll E_F$ vzťah

$$j \simeq \frac{em}{2\pi^2\hbar^3}\left[\int_0^{E_F} dE_z\, T(E_z)\right] eV, \tag{7.15}$$

teda lineárnu I-V charakteristiku. Po vynásobení plochou S dostaneme, že prúd je

$$I = jS \propto SV. \tag{7.16}$$

Prúd je teda spojitá funkcia plochy a napätia. Tieto výsledky platia aj pre sekvenčné tunelovanie cez dvojbariéru na obr. 7.2. Presnejšie, platia pre každú z bariér osobitne, len napätie V sa rozdelí medzi bariéry úmerne ich odporom.

7.3 Podstata coulombovskej blokády

Dvojbariérová štruktúra na obr. 7.2 modeluje experimenty, v ktorých sa meria tunelovanie cez kovový ostrovček. Na obr. 7.4 je ukázaná štruktúra na meranie transportu cez kovové zrniečka zlata, zaliate v dielektrickej matrici Al_2O_3 medzi dvomi hliníkovými elektródami. Pri transporte naprieč štruktúrou je nutné, aby elektrón najprv pretuneloval z elektródy na kovové zrniečko a potom zo zrniečka na druhú elektródu. Podľa vzťahov (7.15) a (7.16) stačí priložiť ľubovolne malé napätie, aby tiekol nenulový tunelovací prúd. Nie je to však nevyhnutne pravda. Uvažujme najjednoduchší prípad, keď sú obidve elektródy na nulovom potenciáli a polomer zlatej guličky (a) je malý v porovnaní so vzdialenosťou guličky od elektród. Vtedy pre potenciál guličky nabitej nábojom Q platí

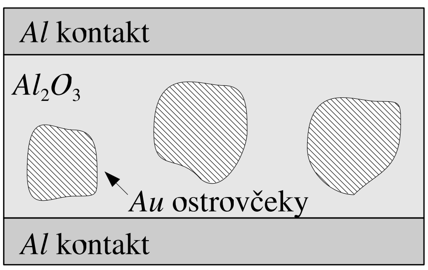
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon a}, \tag{7.17}$$

kde ϵ je permitivita dielektrika. Vzťah môžeme prepísať ako

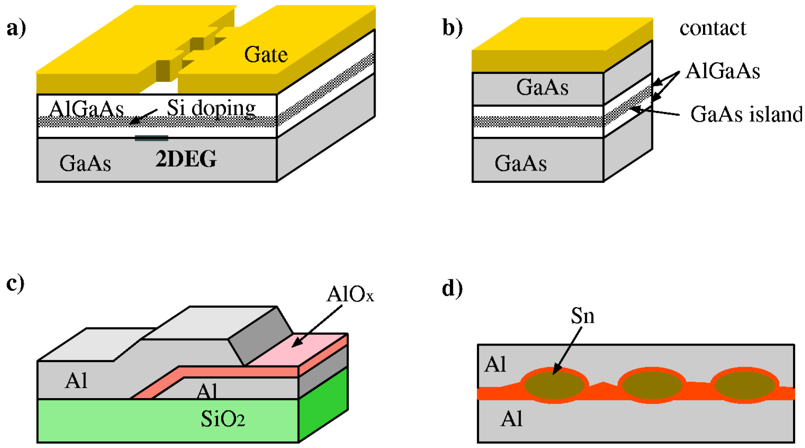
$$V = \frac{Q}{C} \quad , \quad C = 4\pi\epsilon a \quad , \tag{7.18}$$

kde C je kapacita guličky. Nabitím gulička získala elektrostatickú energiu

$$E_s = \frac{Q^2}{2C}. \tag{7.19}$$



Obr. 7.4: Prierez štruktúrou so zlatými zrniečkami zaliatymi v dielektriku Al_2O_3.



Obr. 7.5: Rôzne metódy, ako definovať malé ostrovčeky v polovodičovej alebo kovovej štruktúre. (a) Planárny ostrovček v dvojrozmernom plyne (2DEG) na rozhraní GaAs-AlGaAs, vytvorený pomocou dvoch hradiel. (b) Vertikálny GaAs ostrovček medzi dvomi AlGaAs bariérami a dvomi GaAs elektródami. (c) Príklad jednobariérovej tunelovej štruktúry s hliníkovými elektródami. (d) Zrniečka cínu obalené dielektrickou vrstvičkou, umiestnené medzi hliníkovými elektródami.

Ak $Q = -e$, potom $E_s = e^2/2C$ je práca, ktorú treba vynaložiť aby elektrón mohol pretunelovať na ostrovček. Tú istú úvahu môžeme urobiť pre tunelovanie elektrónu z (neutrálneho) ostrovčeka na elektródu. Vtedy $Q = e$ a práca E_s je taká istá. Keďže prácu musí konať zdroj, je zrejmé, že tunelovací prúd potečie až vtedy, keď napätie zdroja dosiahne hodnotu potrebnú na vykonanie práce $e^2/2C$. Ak bude napätie zdroja menšie ako táto hodnota, prúd nepotečie a hovoríme o Coulombovskej blokáde.

Ak položíme $e^2/2C = k_BT$, pre $T = 300K$ dostaneme $C \sim 3x10^{-18}F$. Tejto kapacite zodpovedá polomer guličky $a \sim 28nm$ pre $\epsilon \sim 1$. Intuitívne je zrejmé, že ak chceme pozorovať coulombovskú blokádu, tak $e^2/2C$ musí aspoň niekoľko násobne prevyšovať k_BT. Pre $T = 300K$ to znamená, že gulička musí byť menšia než $10nm$. Pravdaže, ak sa meranie urobí pri veľmi nízkej teplote, Coulombovská blokáda bude pozorovateľná aj pre guličky s odpovedajúco vačším polomerom.

Na obr.7.5 sú iné príklady tunelovacích štruktúr používaných v meraniach Coulombovskej blokády. Pre tieto štruktúry (s výnimkou štruktúry c) možno použiť dvojbariérový model z obr.7.2 a aj jednoduché úvahy z tohoto odseku.

Poznamenajme, že kapacita $C = 4\pi\epsilon a$ platí presne pre guličku, na ktorú bol náboj prenesený z nekonečna. Keby sme vzali do úvahy, že jedna z elektród sa nachádza v konečnej vzdialenosti l od guličky, dostali by sme

$$C = 4\pi\epsilon a \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \dots\right) \quad , \quad \alpha = \frac{a}{2l}, \tag{7.20}$$

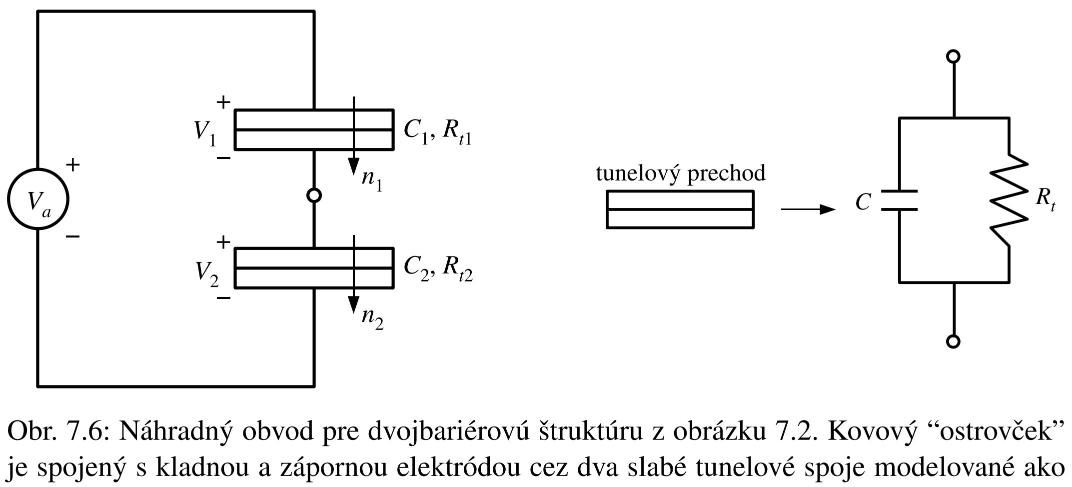
kde členy obsahujúce α pochádzajú od zrkadlových nábojov. Pre $l \simeq a$ by sa naše odhady trochu zmenili, ale rádove by ostali v platnosti. Podobné odhady vyjdú, keď namiesto guličky budeme uvažovať napr. tenký kovový disk s polomerom a, umiestnený paralelne s vodivými elektródami. Pre $a \ll l$ dáva elektrostatika pre kapacitu disku vzťah $C = 8\epsilon a$.

7.4 Fenomenologická teória coulombovskej blokády.

Tunelovanie pod vplyvom coulombovskej blokády budeme teraz študovať na dvojbariérovom modeli z obr. 7.2. Obmedzíme sa na jednoduchú teóriu, ktorá popisuje transport cez štruktúru na obr. 7.2 pomocou náhradného elektrického obvodu na obr. 7.6.

Niekoľko poznámok k obr. 7.6. V kovových tunelových prechodoch sú tunelové bariéry typicky veľmi vysoké a veľmi tenké a hustota elektrónov v kove je veľmi vysoká. Vďaka tomu je spád napätia lokalizovaný výlučne na bariérach (obr. 7.2) a tunelovacie odpory R_t a kapacity C sú v dobrom priblížení od napäťového spádu nezávislé. Ďalej, v nasledujúcej analýze robíme ten istý implicitný predpoklad ako na obr. 7.2, totiž že tunelovanie je sekvenčné (tunelovanie cez prechod 1 je nezávislé od tunelovania cez prechod 2, pretože elektrón po pretunelovaní na ostrovček najprv zrelaxuje svoju nadbytočnú energiu emisiou fonónov resp. zrážkami s inými elektrónmi).

Treba tiež rozlišovať tunelový odpor R_t od zvyčajného ohmického rezistora. V obyčajnom rezistore je tok náboja kvázispojitý a reaguje takmer okamžite na zmenu vonkajšieho elektrického poľa. Tunelovanie však predstavuje injekciu jednotlivých častíc, charakterizovanú niekoľkými rôznymi časovými škálami. V teórii tunelovania sa ukazuje, že tunelovací čas (čas, za ktorý elektrón pretuneluje z jednej strany bariéry na druhú) sa v prípade jednej bariéry dá odhadnúť jednoducho ako podiel hrúbky bariéry a rýchlosti dopadu na bariéru. Pre nami uvažované bariéry dá tento odhad cca 10^{-14} s, zatiaľ čo skutočný čas medzi dvoma tunelovacími udalosťami (čas strávený na ostrovčeku) sa dá odhadnúť empiricky ako e/I, čo pre typické prúdy v nanoampérovej oblasti dáva niekoľko sto pikosekúnd. Preto uvažujeme obidva tunelové prechody v režime medzi dvomi tunelovacími udalosťami ako ideálne kondenzátory.



Obr. 7.6: Náhradný obvod pre dvojbariérovú štruktúru z obrázku 7.2. Kovový "ostrovček" je spojený s kladnou a zápornou elektródou cez dva slabé tunelové spoje modelované ako doskové kondenzátory s kapacitami C_1 a C_2. R_t sú odpory tunelových spojov a n_1 resp. n_2 označuje počet elektrónov, ktoré na ostrovček pretunelovali cez spoj 1 resp. 2.

Náboje na kondenzátoroch 1 a 2 sú

$$Q_1 = C_1 V_1, \quad Q_2 = C_2 V_2. \tag{7.21}$$

Náboj na ostrovčeku je $Q = Q_2 - Q_1$. Bez tunelovania by platilo $Q_1 = Q_2$ a ostrovček by bol neutrálny. Tunelovanie spôsobí, že na ostrovčeku sa nahromadí celočíselný počet elektrónov. Vtedy

$$Q = Q_2 - Q_1 = -ne, \tag{7.22}$$

kde $n = n_1 - n_2$ je počet elektrónov na ostrovčeku. Číslo n môže byť kladné alebo záporné, pričom n_1 a n_2 sú na obr. 7.6 definované tak, že nárast n_1 a n_2 znamená nárast Q_1 a Q_2.

Z rovníc (7.21) a (7.22) a z rovnice

$$V_a = V_1 + V_2 \tag{7.23}$$

môžeme vyjadriť napätia na kondenzátoroch 1 a 2 ako

$$V_1 = \frac{1}{C_{eq}} \left(C_2 V_a + ne \right), \tag{7.24a}$$

$$V_2 = \frac{1}{C_{eq}} \left(C_1 V_a - ne \right), \tag{7.24b}$$

kde $C_{eq} = C_1 + C_2$ je kapacita ostrovčeka. Elektrostatická energia dvoch kondenzátorov je

$$E_s = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2}. \tag{7.25}$$

Z (7.25) po použití rovníc (7.21), (7.22) a (7.24) dostaneme

$$E_s = \frac{1}{2C_{eq}} \left(C_1 C_2 V_a^2 + Q^2 \right). \tag{7.26}$$

Naviac musíme ešte vypočítať aj prácu, ktorú zdroj vykonal potom, ako cez prechod 1 resp. 2 pretunelovalo n_1 resp. n_2 elektrónov. Túto prácu vypočítame nasledovne.

Ak tečie obvodom prúd, zdroj vykonáva prácu

$$W_s = \int dt\, V_a I(t) = V_a \Delta Q, \tag{7.27}$$

kde ΔQ je celkový prenesený náboj. Zahrňuje elektróny, ktoré pretunelovali do/z ostrovčeka, a tiež aj polarizačný náboj, ktorý sa vytvorí ako odozva na zmenu náboja na ostrovčeku spôsobenú tunelovaním.

Uvažujme jeden elektrón, ktorý pretuneluje cez prechod 2 von z ostrovčeka. Náboj na ostrovčeku a počet elektrónov na ostrovčeku sa zmenia na

$$Q' = Q + e, \tag{7.28a}$$

$$n' = n - 1. \tag{7.28b}$$

V dôsledku toho sa napätia na kondenzátoroch 1 a 2 zmenia na

$$V_1' = V_1 - \frac{e}{C_{eq}}, \quad V_2' = V_2 + \frac{e}{C_{eq}}, \tag{7.29}$$

a náboj na kondenzátore 1 sa zmení o hodnotu

$$\Delta Q_1 = -\frac{e}{C_{eq}}\,C_1 \tag{7.30}$$

Túto zmenu náboja musel zdroj kompenzovať dodaním polarizačného náboja tej istej veľkosti, pričom podľa rovníc (7.27) a (7.30) vykonal prácu $-eC_1V_a/C_{eq}$. Tú istú úvahu môžeme urobiť pre všetkych n_2 elektrónov a dostaneme prácu

$$W_s(n_2) = -n_2eV_a\frac{C_1}{C_{eq}}. \tag{7.31}$$

K tomuto výsledku prídeme, aj keď úvahu zopakujeme tak, že vyjadríme zmenu náboja na prechode 2. Naozaj,

$$\Delta Q_2 = -e + \frac{e}{C_{eq}}\,C_2 = -\frac{e}{C_{eq}}\,C_1, \tag{7.32}$$

kde sme okrem zmeny polarizačného náboja $\frac{e}{C_{eq}}\,C_2$ uvážili aj zmenu náboja spôsobenú pretunelovaním elektrónu cez prechod. Pre n_2 elektrónov znovu dostaneme (7.31).

Úplne analogicky dostaneme, že práca, ktorú zdroj vykonal v dôsledku pretunelovania n_1 elektrónov cez prechod 1, je

$$W_s(n_1) = -n_1eV_a\frac{C_2}{C_{eq}}. \tag{7.33}$$

Teraz môžeme vyjadriť celkovú energiu obvodu na obr. 7.6 ako

$$E(n_1,n_2) = E_s - W_s = \frac{1}{2C_{eq}}\,\left(C_1C_2{V_a}^2 + Q^2\right) + \frac{eV_a}{C_{eq}}\,\left(C_1n_2 + C_2n_1\right). \tag{7.34}$$

Vyjadrime zmenu energie, ktorá nastane pri jednoelektrónových prechodoch:

$$\Delta E_2^{\pm} = E(n_1,n_2) - E(n_1,n_2\pm 1) = \frac{e}{C_{eq}}\,\left[-\frac{e}{2} \pm (en - V_aC_1)\right], \tag{7.35}$$

$$\Delta E_1^{\pm} = E(n_1,n_2) - E(n_1\pm 1,n_2) = \frac{e}{C_{eq}}\,\left[-\frac{e}{2} \mp (en + V_aC_2)\right]. \tag{7.36}$$

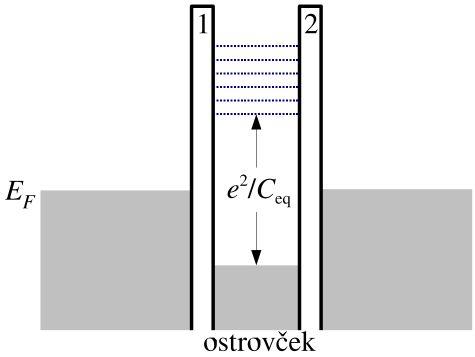
Tieto prechody sú možné len vtedy, keď vyššie vyjadrená zmena energie je kladná, t.j. $\Delta E_j > 0$, pretože pri nulovej teplote je možný len prechod systému zo stavu s vyššou energiou do stavu s nižšou energiou.

Uvažujme teraz systém, ktorý má neutrálny ostrovček, t.j. $n = 0$. Rovnice (7.35) a (7.36) sa zjednodušia a podmienka $\Delta E_j > 0$ nadobudne tvar

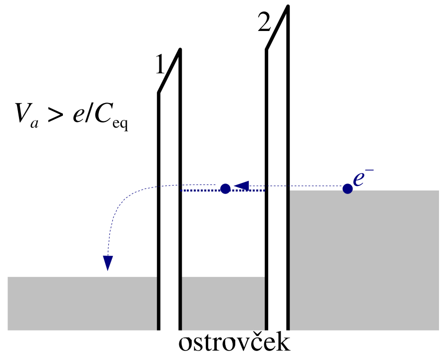
$$\Delta E_{1,2}^{\pm} = -\frac{e^2}{2C_{eq}} \mp \frac{eV_aC_{2,1}}{C_{eq}} > 0. \tag{7.37}$$

Vzťah (7.37) hovorí, že jeden elektrón nemôže tunelovať do/z ostrovčeka cez ani jeden z prechodov 1 resp. 2, pokiaľ je V_a príliš malé. Člen $-e^2/2C_{eq}$, ktorý predstavuje nabíjaciu energiu ostrovčeka, je totiž záporný. ΔE sa stane kladné len pre dostatočne veľké $|V_a|$. Uvažujme napríklad $C_1 = C_2 = C$. Vtedy z rovnice (7.37) dostaneme, že tunelovanie jedného elektrónu z / do ostrovčeka je možné len ak

$$|V_a| > \frac{e}{C_{eq}}. \tag{7.38}$$



Obr. 7.7: Kovový ostrovček s coulombovskou blokádou. Coulombovská medzera e^2/C_{eq} znemožňuje elektrónové tunelovanie do/z ostrovčeka.



Obr. 7.8: Ostrovček pod napätím. Napätie $> e/C_{eq}$ umožňuje tunelovanie.

V opačnom prípade je tunelovanie zakázané a prúd je nulový napriek nenulovému napätiu. Tento režim voláme coulombovská blokáda, zdroj nie je totiž schopný vykonať prácu rovnú nabíjacej energii ostrovčeka e^2/C_{eq}. Samozrejme, pre tunelové prechody s makroskopicky veľkou plochou je C_{eq} obrovské a energia e^2/C_{eq} je zanedbateľne malá. Vtedy sa coulombovská blokáda neuplatňuje a transport determinuje výlučne tunelový odpor R_t.

Na obr. 7.7 je coulombovská blokáda interpretovaná ako dôsledok energetickej medzery e^2/C_{eq} na ostrovčeku. Na obr. 7.8 vidno, že elektrón môže na ostrovček pretunelovať ak $V_a > e/C_{eq} = e/2C$. Ak sa tento elektrón už nachádza na ostrovčeku, z rovnice (7.35) vidíme, že druhý elektrón môže na ostrovček vtunelovať len ak

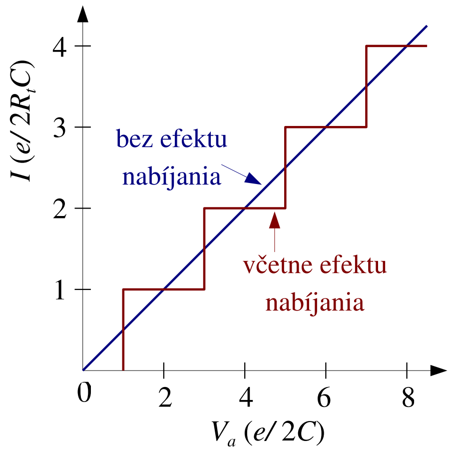
$$V_a > \frac{3e}{2C}. \tag{7.39}$$

Podobne, ak sú na ostrovčeku dva elektróny, tretí sa tam dostane len ak

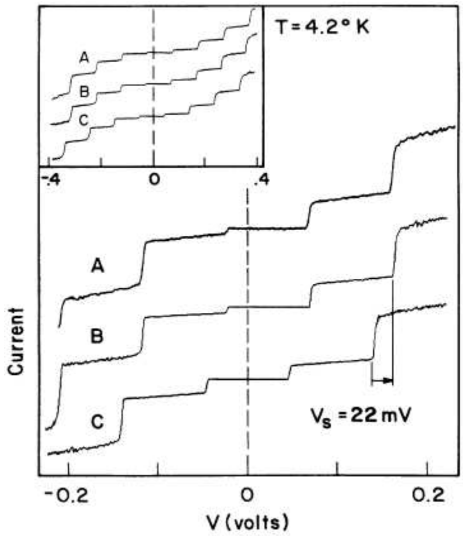
$$V_a > \frac{5e}{2C}, \tag{7.40}$$

atď. Ako vyzerá I-V charakteristika? Z uvedeného je zrejmé, že $I \propto n$, kde $n = 0$ pre $V_a < e/2C$, $n = 1$ pre $V_a < 3e/2C$, $n = 2$ pre $V_a < 5e/2C$, atď. Môžeme teda písať $I = n\Delta I$, kde ΔI by ideálne nemalo závisieť od V_a resp. od n. Odhadnime ΔI pre ideálny prípad $R_{t1} \gg R_{t2}$.

V tejto situácii elektrón vtuneluje na ostrovček cez prechod 2 (viď obr. 7.8) a čaká na ostrovčeku relatívne dlhý čas, kým odíde cez prechod 1. Keď odíde cez prechod 1, ostrovček sa vráti do stavu $n = 0$. Avšak, pretože $R_{t2} \ll R_{t1}$, cez prechod 2 okamžite vtuneluje na ostrovček ďalší elektrón a vráti ho do stavu $n = 1$. Preto je oprávnená predstava, že ostrovček je takmer kontinuálne v stave $n = 1$, až na krátke okamihy, keď elektrón odíde cez prechod 1 a obvodom pretečie prúdový pulz. (Stacionárny prúd I sú vlastne tieto pulzy ustrednené v čase.) Vďaka $R_{t1} \gg R_{t2}$ je rozumné predpokladať, že prúd je determinovaný najmä napäťovým spádom na prechode 1. Z rovnice (7.24) dostaneme pre $C_1 = C_2 = C$ vzťah $V_1 = V_a/2 + ne/C_{eq}$. Z tohto vzťahu vidno, že napätie cez prechod 1 sa mení skokom o hodnotu e/C_{eq} vždy, keď sa n zmení o hodnotu 1. Prúdová zmena zodpovedajúca



Obr. 7.9: Ideálna teoretická I-V charakteristika v režime coulombovskej blokády pre $C_1 = C_2 = C$ a $R_t = R_{t1} \gg R_{t2}$.



Obr. 7.10: Experimentálne zmerané (A) a vypočítané (B, C) coulombovské schodište pre 10−nanometrovú kvapku In v dielektrickej matrici. Jednou elektródou je vodivý substrát, druhou je hrot STM mikroskopu. (Wilkins et al., 1989)

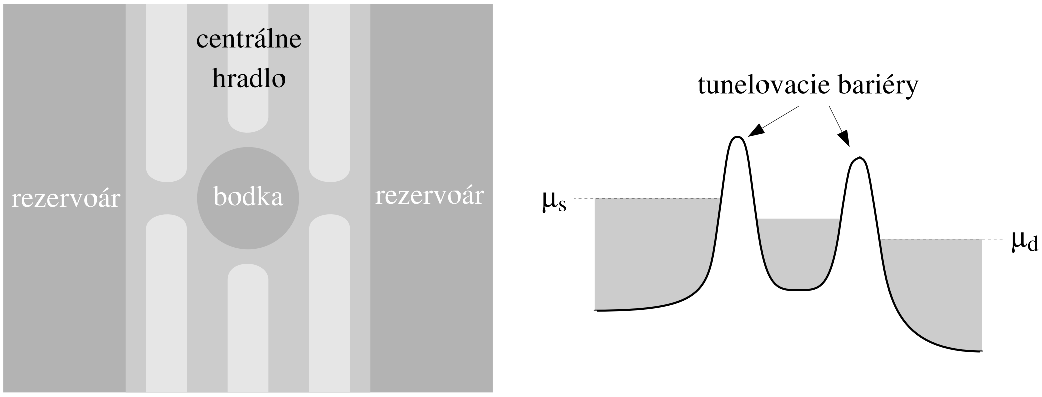
tejto skokovej zmene je

$$\Delta I \approx \frac{\Delta V_1}{R_{t1}} = \frac{e}{C_{eq}R_{t1}} = \frac{e}{2CR_{t1}}. \tag{7.41}$$

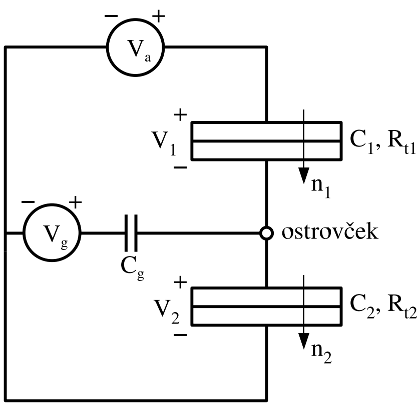
Výsledkom je schodovitá I-V charakteristika na obr. 7.9. Tento typ I-V charakteristiky sa zvykne volať aj coulombovské schodište.

Experimentálny výsledok na obr. 7.10 sa od tejto ideálnej I-V charakteristiky trochu líši. Predovšetkým, krivka A by mala byť symetrická vzhľadom na počiatok súradnej sústavy. Odchýľka od symetrie (posun krivky o 22 mV doprava) je spôsobená parazitnými nábojmi, ktoré prispievajú k nabíjacej energii ostrovčeka a nie sú započítané v teórii (krivka C). Vplyv týchto nábojov je od vzorky k vzorke iný a preto je vážnou prekážkou pri realizácii reprodukovateľných jednoelektrónových súčiastok. Krivka B, ktorá dobre súhlasí s A, bola získaná posunom krivky C o 22 mV. Konečne, coulombovské schody na obr. 7.10 nie sú rovnako vysoké, keďže predpoklady idealizovanej teórie nie sú v experimente splnené ideálne.

Aké podmienky sú potrebné na pozorovanie coulombovského schodišťa? Predovšetkým, teplota musí spĺňať nerovnosť $k_BT \ll e^2/C_{eq}$, pretože inak sú elektróny termálne excitované ponad coulombovskú medzeru a blokáda sa nerealizuje. Ďalej je dôležité, aby neurčitosť energie elektrónu, $h/\Delta t$, bola malá v porovnaní s e^2/C_{eq}, kde Δt je čas potrebný na prechod elektrónu na ostrovček a na odchod z ostrovčeka. Odhadneme Δt zhruba ako RC konštantu $\Delta t \sim R_tC_{eq}$, kde R_t je menší z oboch odporov. Z nerovnosti $h/\Delta t \ll e^2/C_{eq}$ dostaneme podmienku $R_t \gg h/e^2 = 25.813\ k\Omega$.



Obr. 7.11: Planárna štruktúra pre jednoelektrónové tunelovanie a coulombovskú blokádu. Štruktúra funguje ako jednoelektrónový tranzistor, pretože potenciál ostrovčeka je možné riadiť napätím na centrálnom hradle.



Obr. 7.12: Náhradná schéma pre jednoelektrónový tranzistor.

7.5 Jednoelektrónový tranzistor

Na obr. 7.11 je ukázaný jednoelektrónový tranzistor, definovaný planárne v elektrónovom 2D plyne v GaAs vrstve na rozhraní n-AlGaAs/GaAs. Na kovové hradlá nanesené na povrchu AlGaAs vrstvy sa priloží záporné napätie, ktoré spod nich vyčerpá 2D plyn. V oblasti medzi hradlami zostane ostrovček nevyčerpaného 2D plynu, spojený s 2D rezervoármi (elektródami) prostredníctvom slabých tunelových spojov. Vznikne tak štruktúra, v ktorej sa vďaka malým rozmerom ostročeka (vďaka jeho veľkej kapacite) uplatňuje coulombovská blokáda ako sme ju popísali v predchádzajúcom odseku. Naviac, štruktúra môže fungovať ako tranzistor, ak sa hradlá umiestnené v strede napájajú osobitným zdrojom napätia. Túto situáciu popisuje náhradný obvod na obr. 7.12. Ide o ten istý obvod ako na obr. 7.6, pridaný je však kondenzátor s kapacitou C_g a zdroj s napätím V_g. Kondenzátor modeluje kapacitné spojenie medzi centrálnymi hradlami a ostrovčekom, takže napätím V_g je možné riadiť potenciál ostrovčeka nezávisle na napätí V_a.

Nasledujúca analýza ukáže, že pomocou tejto "tranzistorovej akcie"je možné nastaviť coulombovskú blokádu tak, že existuje nielen pre $n = 0$, ale v princípe pre ľubovolné celé číslo n. Tiež sa ukáže, že coulombovská blokáda v ohmickej limite ($V_a \to 0$) vymizne pre určité kvázidiskrétne hodnoty V_g.

Postupuje sa podobne ako v predchádzajúcom odseku. Náboje na kondenzátoroch sú

$$Q_1 = C_1 V_1, \quad Q_2 = C_2 V_2, \quad Q_g = C_g V_3 = C_g (V_g - V_2). \tag{7.42}$$

Pre napätia platí

$$V_a = V_1 + V_2, \quad V_a - V_g = V_1 - V_3, \quad V_3 = V_g - V_2. \tag{7.43}$$

Náboj na ostrovčeku je $Q = Q_2 - Q_1 - Q_g$. Ak sa neuplatňuje tunelovanie, tak $Q = 0$. Ak na ostrovček pretunelovalo n elektrónov, potom

$$Q = Q_2 - Q_1 - Q_g = -ne, \tag{7.44}$$

kde $n = n_1 - n_2$. Z rovníc (7.42), (7.43) a (7.44) môžeme vyjadriť napätia na kondenzátoroch 1 a 2 ako

$$V_1 = \frac{1}{C_{eq}} \left[C_2 V_a - C_g (V_g - V_a) + ne \right], \tag{7.45a}$$

$$V_2 = \frac{1}{C_{eq}} \left[C_1 V_a + C_g V_g - ne \right], \tag{7.45b}$$

kde $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_g$ je kapacita ostrovčeka. Pre celkovú elektrostatickú energiu

$$E_s = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{Q_2^2}{C_2} + \frac{Q_g^2}{C_g} \right) \tag{7.46}$$

dostaneme využitím rovníc (7.42), (7.45), (7.43) a (7.44) po zdĺhavej úprave vzťah

$$E_s = \frac{1}{2C_{eq}} \left[Q^2 + C_g C_2 V_g^2 + C_1 C_2 V_a^2 + C_1 C_g (V_a - V_g)^2 \right]. \tag{7.47}$$

Taktiež potrebujeme vypočítať prácu, ktorú zdroj vykonal po pretunelovaní n_1 resp. n_2 elektrónov cez prechody 1 resp. 2.

Najprv uvažujme situáciu, že jeden elektrón pretuneluje cez prechod 2 von ostrovčeka. Náboj a počet elektrónov na ostrovčeku sa zmenia na

$$Q' = Q + e, \tag{7.48a}$$

$$n' = n - 1. \tag{7.48b}$$

Napätia na kondenzátoroch sa preto zmenia na

$$V_1' = V_1 - \frac{e}{C_{eq}}, \tag{7.49a}$$

$$V_2' = V_2 + \frac{e}{C_{eq}}, \tag{7.49b}$$

$$(V_g - V_2') \equiv V_3' = V_3 - \frac{e}{C_{eq}} \equiv (V_g - V_2) - \frac{e}{C_{eq}}, \tag{7.49c}$$

V súlade so vzťahmi (7.42), nové náboje na kondenzátoroch sú

$$Q_1' = Q_1 - \frac{e}{C_{eq}} C_1 \tag{7.50a}$$

$$Q_2' = Q_2 + \frac{e}{C_{eq}} C_2 \tag{7.50b}$$

$$Q_g' = Q_g - \frac{e}{C_{eq}} C_g \tag{7.50c}$$

a príslušné zmeny nábojov na kondenzátoroch sú

$$\Delta Q_1 = -\frac{e}{C_{eq}} C_1 \tag{7.51a}$$

$$\Delta Q_2 = \frac{e}{C_{eq}} C_2 \tag{7.51b}$$

$$\Delta Q_g = -\frac{e}{C_{eq}} C_g \tag{7.51c}$$

Práca, ktorú vykonajú zdroje V_a a V_g je

$$W_s(n_2 = 1) = \int dt\, V_a I(t) + \int dt\, V_g I(t) = V_a \Delta Q_1 + V_g \Delta Q_g, \tag{7.52}$$

čiže po dosadení (7.51)

$$W_s(n_2 = 1) = -\left[eV_a \frac{C_1}{C_{eq}} + eV_g \frac{C_g}{C_{eq}} \right]. \tag{7.53}$$

Keď ten istý postup použijeme pre všetkych n_2 elektrónov, dostaneme prácu

$$W_s(n_2) = -n_2 \left[eV_a \frac{C_1}{C_{eq}} + eV_g \frac{C_g}{C_{eq}} \right]. \tag{7.54}$$

Teraz vypočítame prácu, ktorú musia dodať zdroje, keď n_1 elektrónov pretuneluje na ostrovček cez prechod 1. Najprv zase predpokladáme, že pretuneluje jeden takýto elektrón. Náboj a počet elektrónov na ostrovčeku sa zmení na

$$Q' = Q - e, \tag{7.55a}$$

$$n' = n + 1. \tag{7.55b}$$

Napätia na kondenzátoroch sa preto zmenia na

$$V_1' = V_1 + \frac{e}{C_{eq}}, \tag{7.56a}$$

$$V_2' = V_2 - \frac{e}{C_{eq}}, \tag{7.56b}$$

$$(V_g - V_2') \equiv V_3' = V_3 + \frac{e}{C_{eq}} \equiv (V_g - V_2) + \frac{e}{C_{eq}}. \tag{7.56c}$$

Konečne, podľa (7.42) nové náboje na kondenzátoroch sú

$$Q_1' = Q_1 + \frac{e}{C_{eq}}\, C_1 \tag{7.57a}$$

$$Q_2' = Q_2 - \frac{e}{C_{eq}}\, C_2 \tag{7.57b}$$

$$Q_g' = Q_g + \frac{e}{C_{eq}}\, C_g. \tag{7.57c}$$

Príslušné zmeny nábojov na jednotlivých kondenzátoroch sú

$$\Delta Q_1 = +\frac{e}{C_{eq}}\, C_1 \tag{7.58a}$$

$$\Delta Q_2 = -\frac{e}{C_{eq}}\, C_2 \tag{7.58b}$$

$$\Delta Q_g = +\frac{e}{C_{eq}}\, C_g \tag{7.58c}$$

Zdroj V_a musí teda vynaložiť prácu, aby vykompenzoval polarizačný náboj ΔQ_1 a jeden pretunelovaný elektrón. Táto práca je

$$V_a(\Delta Q_1 - e) = V_a\left(\frac{e}{C_{eq}}\, C_1 - e\right) = eV_a\frac{C_2}{C_{eq}} + eV_a\frac{C_g}{C_{eq}} \tag{7.59}$$

Zdroj V_g musí zase vynaložiť prácu, aby vykompenzoval polarizačný náboj ΔQ_g. Táto práca je

$$V_g\Delta Q_g = eV_g\frac{C_g}{C_{eq}} \tag{7.60}$$

Potom

$$W_s(n_1 = 1) = -\left[\frac{C_2}{C_{eq}}eV_a + \frac{C_g}{C_{eq}}e(V_a - V_g)\right]. \tag{7.61}$$

Keď postup aplikujeme na všetkych n_1 elektrónov, dostaneme

$$W_s(n_1) = -n_1\left[\frac{C_1}{C_{eq}}eV_a + \frac{C_g}{C_{eq}}e(V_a - V_g)\right]. \tag{7.62}$$

Celková energia obvodu je

$$E(n_1, n_2) = E_s - W_s(n_1) - W_s(n_2) \tag{7.63}$$

Vyjadrime zmenu energie, ktorá nastane pri jednoelektrónových prechodoch:

$$\Delta E_1^{\pm} = E(n_1, n_2) - E(n_1 \pm 1, n_2), \tag{7.64}$$

$$\Delta E_2^{\pm} = E(n_1, n_2) - E(n_1, n_2 \pm 1). \tag{7.65}$$

Dostaneme

$$\Delta E_1^{\pm} = \frac{e}{C_{eq}}\,\left[-\frac{e}{2} \mp [en + (C_g + C_2)V_a - C_gV_g)]\right], \tag{7.66}$$

$$\Delta E_2^{\pm} = \frac{e}{C_{eq}}\,\left[-\frac{e}{2} \pm [en - C_1V_a - C_gV_g]\right]. \tag{7.67}$$

Podmienka $\Delta E^{\pm}_{1,2} > 0$ teraz umožňuje coulombovskú blokádu aj pre $n \neq 0$, ak sa na hradlo priloží vhodné napätie V_g.

Kvôli jednoduchosti teraz uvažujme prípad $C_g = C_2 = C$, $C_1 = 2C$.

$$-\frac{e}{2} \geq \pm \left[en + (C_g + C_2)V_a - C_g V_g)\right], \tag{7.68a}$$

$$-\frac{e}{2} \geq \mp \left[en - C_1 V_a - C_g V_g\right], \tag{7.68b}$$

Pre $n = 0$ a s využitím $C_g + C_2 = 2C$ a $C_{eq} = 4C$ sa vzťahy (7.68) zjednodušia na

$$-\frac{e}{2} > \pm \left(2CV_a - C_g V_g)\right), \tag{7.69a}$$

$$-\frac{e}{2} > \mp \left(-2CV_a - C_g V_g\right), \tag{7.69b}$$

čo sú vlastne 4 nerovnice

$$V_a \left(\frac{4C}{e}\right) < \frac{2}{e} C_g V_g - 1, \tag{7.70a}$$

$$V_a \left(\frac{4C}{e}\right) > \frac{2}{e} C_g V_g + 1, \tag{7.70b}$$

$$V_a \left(\frac{4C}{e}\right) < -\frac{2}{e} C_g V_g - 1, \tag{7.70c}$$

$$V_a \left(\frac{4C}{e}\right) > -\frac{2}{e} C_g V_g + 1. \tag{7.70d}$$

Podobne, napríklad pre $n = 1$ dostaneme sadu nerovníc

$$\left(\frac{4C}{e}\right) V_a < \frac{2}{e} C_g V_g - 3, \tag{7.71a}$$

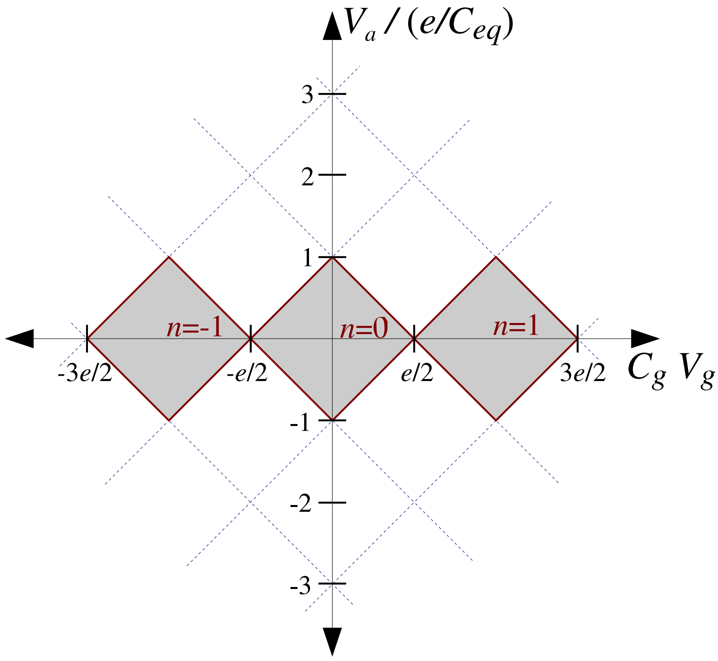
$$\left(\frac{4C}{e}\right) V_a > \frac{2}{e} C_g V_g - 1, \tag{7.71b}$$

$$\left(\frac{4C}{e}\right) V_a < -\frac{2}{e} C_g V_g + 1, \tag{7.71c}$$

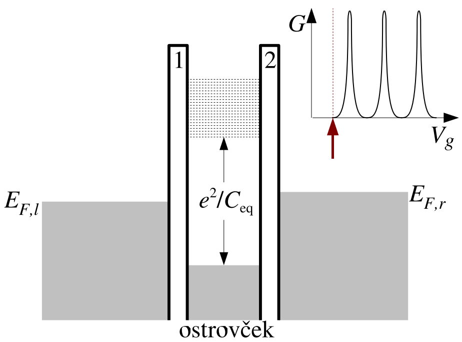
$$\left(\frac{4C}{e}\right) V_a > -\frac{2}{e} C_g V_g + 3. \tag{7.71d}$$

Riešenia týchto nerovníc sú graficky znázornené na obr.7.13 ako šedé oblasti. V týchto oblastiach je tunelovanie zakázané. Každej z oblastí zodpovedá rôzne n a oblasť sa nazýva oblasť stability, pretože ostrovček je nabitý fixovaným celočíselným počtom elektrónov, ktorý sa v rámci oblasti nemení s V_a a V_g. Čiary reprezentujú hraničné hodnoty V_g a V_a, pri ktorých nastáva jednoelektrónové tunelovanie a n sa mení o jednotku. Napätie V_g umožňuje prechádzať medzi rôznymi stabilnými režimami pričítaním alebo odčítaním jediného elektrónu.

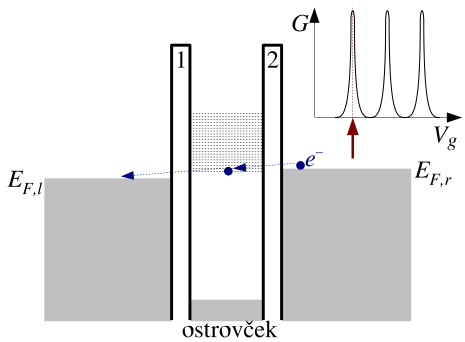
Z obr. 7.13 tiež vidno, že ohmická vodivosť (meraná pre veľmi malé hodnoty V_a) musí pri určitých hodnotách V_g vykazovať ostré píky. Závislosť vodivosti na V_g a zodpovedajúce energetické diagramy dvojbariérovej štruktúry sú schématicky ukázané na obrázkoch 7.14 a 7.15. Všetky tieto výsledky sú v literatúre zdokumentované experimentálne.



Obr. 7.13: Diagram stability pre jednoelektrónový tranzistor v prípade $C_g = C_2 = C$, $C_1 = 2C$. Tmavé oblasti zodpovedajú hodnotám V_a a V_g, pre ktoré je tunelovanie na ostrovček zakázané pri rôznych hodnotách n. Oblasti teda reprezentujú stabilné režimy pre rôzne celočíselné počty elektrónov na ostrovčeku. Mimo týchto oblastí jednoeletrónové tunelovanie funguje štandartným spôsobom.



Obr. 7.14: Píky konduktancie a energetický diagram dvojbariérovej štruktúry pre V_g mimo rezonanciu.



Obr. 7.15: Píky konduktancie a energetický diagram dvojbariérovej štruktúry pre V_g v rezonancii.

Kapitola 8

Dodatky

8.1 Dodatok A: Odvodenie jednoelektrónového prúdu (3.15)

Odvodíme vzťah (3.15). Keď dosadíme (3.13) do (3.14), máme

$$J \;=\; e\frac{\hbar}{2im}\int_0^W dy\;\left(\Psi^*\frac{d}{dx}\Psi-\Psi\frac{d}{dx}\Psi^*\right)\;. \tag{8.1}$$

Do (8.1) dosadíme vlnovú funkciu

$$\Psi_n^+ \;=\; \sum_{n'=1}^{\infty}\sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}t_{n'n}(k_n)\frac{1}{\sqrt{L}}\,e^{ik_{n'}x}\chi_{n'}(y)\;. \tag{8.2}$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} J_n^+ \;=\;& \frac{e\hbar}{2imL}\sum_{n'=1}^{\infty}\sum_{n''=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{v_n}{v_{n''}}}\right)^* t^*_{n''n}\left(e^{ik_{n''}x}\right)^*\sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\;t_{n'n}\left\{\frac{d}{dx}e^{ik_{n'}x}\right\}\delta_{n'',n'} \\ &-\frac{e\hbar}{2imL}\sum_{n'=1}^{\infty}\sum_{n''=1}^{\infty}\sqrt{\frac{v_n}{v_{n''}}}\;t_{n''n}\;e^{ik_{n''}x}\left(\sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\right)^* t^*_{n'n}\left\{\frac{d}{dx}\left(e^{ik_{n'}x}\right)^*\right\}\delta_{n'',n'}\;, \end{aligned} \tag{8.3}$$

kde

$$\delta_{n'',n'} \;\equiv\; \int_0^W dy\;\chi_{n''}(y)\;\;\chi_{n'}(y) \tag{8.4}$$

je Kroneckerov symbol, pretože vlnové funkcie $\chi_n(y)$ sú ortogonálne. Vysumujeme cez n'' a dostaneme

$$J_n^+ \;=\; \frac{e\hbar}{2imL}\sum_{n'=1}^{\infty}|t_{n'n}|^2\left|\sqrt{\frac{v_n}{v_{n'}}}\right|^2\left[\left(e^{ik_{n'}x}\right)^*\;\left\{\frac{d}{dx}e^{ik_{n'}x}\right\}-e^{ik_{n'}x}\left\{\frac{d}{dx}\left(e^{ik_{n'}x}\right)^*\right\}\right]\;. \tag{8.5}$$

Pripomenieme, že pre $n' > N$ je $k_{n'} \;=\; iK_{n'}$ kde $K_{n'}$ je pozitívne reálne číslo. Preto je na pravej strane posledného vzťahu člen v hranatej zátvorke nulový pre všetky $n' > N$. Po malej úprave nám zostane výsledok

$$J_n^+ \;=\; \frac{e}{L}\,\frac{\hbar k_n}{m}\sum_{n'=1}^{N}\;|\;t_{n'n}(k_n)\;|^2\;, \tag{8.6}$$

kde k_n je pozitívny reálny vlnový vektor. Výsledok (8.6) je totožný s (3.15).

8.2 Dodatok B: Hermitovsky združený súčin dvoch matíc

Chceme ukázať platnosť vzťahu (3.64): $(\mathbf{CD})^+ = \mathbf{D}^+\mathbf{C}^+$.
Nech matica $\mathbf{E}$ označuje súčin matíc $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$, potom jej prvky sú

$$(\mathbf{E})_{ij} \equiv e_{ij} = \sum_k c_{ik} d_{kj} \ . \tag{8.7}$$

Hermitovsky združená matica

$$\mathbf{E}^+ = (\mathbf{CD})^+ \tag{8.8}$$

má podľa definície (3.63)prvky

$$(\mathbf{E}^+)_{ij} \equiv e^*_{ji} = \left((\mathbf{CD})^+\right) = \left[\sum_k c_{jk} d_{ki}\right]^* = \sum_k d^*_{ki} c^*_{jk} \ . \tag{8.9}$$

Použijeme definíciu hermitovskej matice (3.63) aj pre $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$

$$c^*_{jk} = (\mathbf{C}^+)_{kj} \qquad d^*_{ki} = (\mathbf{D}^+)_{ik} \tag{8.10}$$

a pokračujeme v úprave vzťahu (8.9)

$$(\mathbf{E}^+)_{ij} = \sum_k (\mathbf{D}^+)_{ik} (\mathbf{C}^+)_{kj} = (\mathbf{D}^+\mathbf{C}^+)_{ij} \quad \text{čiže} \quad \mathbf{E}^+ = \mathbf{D}^+\mathbf{C}^+ \ . \tag{8.11}$$

Z porovnania (8.8) a (8.11) priamo vyplýva platnosť vzťahu (3.64).

8.3 Dodatok C: Závislosť matice rozptylu na polohe prekážky: Formálna matematická analýza

Nech je známa rozptylová matica

$$\mathbb{S}_0 \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 & \mathbf{t}'_0 \\ \mathbf{t}_0 & \mathbf{r}'_0 \end{pmatrix} \tag{8.12}$$

pre rozptyl na prekážke danej potenciálom $V_0(x,y)$. (Prekážka je lokalizovaná na x-ovej osi v $x = 0$.) Matica $\mathbb{S}_0$ spája amplitúdy dopadajúcej a rozptýlenej vlny

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^0 \\ \mathbf{a}_2^0 \end{pmatrix} = \mathbb{S}_0 \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^0 \\ \mathbf{b}_2^0 \end{pmatrix} \ , \tag{8.13}$$

vlnová funkcia riešenia príslušnej Schrödingerovej rovnice má tvar

$$\psi^0(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^N a_1^{0(n)} \phi_n^+(x,y) + \sum\limits_{n=1}^N b_1^{0(n)} \phi_n^-(x,y), & x < 0 \\ \sum\limits_{n=1}^N a_2^{0(n)} \phi_n^+(x,y) + \sum\limits_{n=1}^N b_2^{0(n)} \phi_n^-(x,y), & x > L \end{cases} \tag{8.14}$$

a

$$\phi_n^\pm(x,y) = \frac{1}{\sqrt{v_n}} e^{\pm i k_n x} \chi_n(y), \quad v_n = \frac{\hbar k_n}{m} \ . \tag{8.15}$$

Nech $\mathbb{S}$ je rozptylová matica *rovnakej* prekážky, ale lokalizovanej v polohe $x = x_1$ a teda danej potenciálom:

$$V(x,y) \equiv V_0(x - x_1, y)\ . \tag{8.16}$$

Hľadajme teraz vyjadrenie rozptylovej matice $\mathbb{S}$ pomocou $\mathbb{S}_0$. Matica $\mathbb{S}$ spája amplitúdy dopadajúcej a rozptýlenej vlny

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \mathbb{S} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \tag{8.17}$$

pre riešenia príslušnej Schrödingerovej rovnice s potenciálom $V(x,y)$:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{N} a_1^{(n)} \phi_n^+(x,y) + \sum\limits_{n=1}^{N} b_1^{(n)} \phi_n^-(x,y), & x < x_1 \\ \sum\limits_{n=1}^{N} a_2^{(n)} \phi_n^+(x,y) + \sum\limits_{n=1}^{N} b_2^{(n)} \phi_n^-(x,y), & x > x_1\ , \end{cases} \tag{8.18}$$

Vzhľadom na (8.16) platí pre riešenia $\psi(x,y)$ a $\psi^0(x,y)$

$$\psi(x,y) \equiv \psi^0(x - x_1, y) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{N} a_1^{0(n)} \phi_n^+(x - x_1, y) + \sum\limits_{n=1}^{N} b_1^{0(n)} \phi_n^-(x - x_1, y), & x < 0 \\ \sum\limits_{n=1}^{N} a_2^{0(n)} \phi_n^+(x - x_1, y) + \sum\limits_{n=1}^{N} b_2^{0(n)} \phi_n^-(x - x_1, y), & x > L\ . \end{cases} \tag{8.19}$$

Keď si uvedomíme, že

$$\phi_n^{\pm}(x,y) = e^{\pm i k_n x} \phi_n^{\pm}(x - x_1, y). \tag{8.20}$$

a porovnáme (8.18) s (8.19), tak pre amplitúdy vlnových funkcií platí:

$$\begin{aligned} a_1^{0(n)} &= e^{i k_n x_1} a_1^{(n)} & \qquad b_1^{0(n)} &= e^{-i k_n x_1} b_1^{(n)} \\ b_2^{0(n)} &= e^{-i k_n x_1} b_2^{(n)} & \qquad a_2^{0(n)} &= e^{i k_n x_1} a_2^{(n)}\ . \end{aligned} \tag{8.21}$$

V kompaktnej forme maticoveho zápisu dostaneme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^0 \\ \mathbf{b}_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{X} & 0 \\ 0 & \mathbb{X}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}\ , \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^0 \\ \mathbf{a}_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{X}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}\ , \tag{8.22}$$

kde diagonálna submatica $\mathbb{X}$ s rozmerom $N \times N$ je daná ako

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} e^{i k_1 x_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{i k_2 x_1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}, \quad (\mathbb{X})_{m,n} = e^{i k_m x_1} \delta_{m,n}. \tag{8.23}$$

Do (8.13) dosadíme za amplitúdy vlnových funkcií vzťahy z (8.22). Vzniknutú rovnicu prenásobíme maticou $\begin{pmatrix} \mathbb{X} & 0 \\ 0 & \mathbb{X}^{-1} \end{pmatrix}$, využijeme, že

$$\begin{pmatrix} \mathbb{X} & 0 \\ 0 & \mathbb{X}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{X}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{X} \end{pmatrix} = \mathbf{I} \tag{8.24}$$

a dostaneme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{X} & 0 \\ 0 & \mathbb{X}^{-1} \end{pmatrix} \mathbb{S}_0 \begin{pmatrix} \mathbb{X} & 0 \\ 0 & \mathbb{X}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} . \tag{8.25}$$

Nakoniec porovnaním (8.25) a (8.17) a využitím definície (8.12) nájdeme pre $\mathbb{S}$ maticu prekážky v mieste $x = x_1$ vzťah

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \mathbb{X}\mathbf{r}_0\mathbb{X} & \mathbb{X}\mathbf{t}_0'\mathbb{X}^{-1} \\ \mathbb{X}^{-1}\mathbf{t}_0\mathbb{X}^{-1} & \mathbb{X}^{-1}\mathbf{r}_0'\mathbb{X} \end{pmatrix} . \tag{8.26}$$

ktorý je totožný so vzťahom (3.90).

8.4 Dodatok E: Tunelovanie cez asymetrickú pravouhlú potenciálovú bariéru

Študujme pohyb častice v poli s potenciálnou energiou $V(x)$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x < a \\ V_0 & \text{pre} \quad x \in (-a, a) \\ -(V_1 - V_0) & \text{pre} \quad x > a \end{cases} , \tag{8.27}$$

kde $V_0 > 0$ a $V_1 > V_0$.
Jej vlnová funkcia $\psi(x)$ je riešením jednorozmernej Schrödingerovej rovnice

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi(x) \; = \; E\, \Psi(x) \quad . \tag{8.28}$$

Zaujímajme sa o situáciu, keď na takúto bariéru (hrúbky $2a$) dopadá zľava elektrón s energiou $0 < E < V_0$ a hľadajme jeho amplitúdu pravdepodobnosti pretunelovania (t) a odrazu (r) na bariére. Riešenia Schrödingerovej rovnice (8.28) majú v jednotlivých oblastiach určených vo vzťahu (8.27) tvar

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= A_1\, e^{ik_1x} + A_2\, e^{-ik_1x} , & k_1 &= \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ \Psi_2(x) &= B_1\, e^{ik_2x} + B_2\, e^{-ik_2x} , & k_2 &= \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} \\ \Psi_3(x) &= C_1\, e^{ik_1x} , & k_3 &= \sqrt{\frac{2m\,(E + (V_1 - V_0))}{\hbar^2}} . \end{aligned} \tag{8.29}$$

Ak $E < V_0$, potom $ik_2 = \kappa_2 = \sqrt{(2m(V_0 - E))/\hbar^2}$.
Z požiadavky spojitosti riešenia $\Psi(x)$ a jeho derivácie v bodoch $x = \pm a$ dostaneme 4 rovnice pre 5 koeficientov A_1, A_2, B_1, B_2 a C_1.
Zo spojitosti $\Psi(x)$ v $x = -a$ vyplýva

$$A_1 e^{-ik_1a} + A_2 e^{ik_1a} = B_1 e^{-ik_2a} + B_2 e^{ik_2a} , \tag{8.30}$$

zo spojitosti $\Psi(x)$ v bode $x = a$

$$B_1 e^{ik_2a} + B_2 e^{-ik_2a} = C_1 e^{ik_3a} , \tag{8.31}$$

zo spojitosti derivácie funkcie $\Psi(x)$ v bode $x = -a$

$$k_1\left(A_1e^{-ik_1a} - A_2e^{ik_1a}\right) = k_2\left(B_1e^{-ik_2a} - B_2e^{ik_2a}\right) \tag{8.32}$$

a konečne zo spojitosti derivácie funkcie $\Psi(x)$ v bode $x = a$

$$k_2\left(B_1e^{ik_2a} - B_2e^{-ik_2a}\right) = k_3\, C_1e^{ik_3a} \ . \tag{8.33}$$

Z rovníc (8.30), (8.31), (8.32) a (8.33) najprv vylúčime koeficienty B_1 a B_2, potom vyjadríme A_2 a C_1 len pomocou A_1, aby sme nakoniec dostali amplitúdu pravdepodobnosti transmisie $t = C_1/A_1$ a reflexie $r = A_2/A_1$.
Postupujeme nasledovne. Najprv rovnicu (8.30) vynásobíme k_2 a sčítame s rovnicou (8.32) a dostaneme

$$A_1e^{-ik_1a}(k_2 + k_1) + A_2e^{ik_1a}(k_2 - k_1) = 2k_2B_1e^{-ik_2a} \ ; \tag{8.34}$$

keď rovnicu (8.30) vynásobenú k_2 od (8.32) odčítame, dostaneme

$$A_1e^{-ik_1a}(k_2 - k_1) + A_2e^{ik_1a}(k_2 + k_1) = 2k_2B_2e^{ik_2a} \ . \tag{8.35}$$

Potom vynásobíme (8.31) faktorom k_3 a skombinujeme s (8.33), až prídeme ku vzťahom

$$(k_2 + k_3)\, C_1e^{ik_3a} = 2k_2B_1e^{ik_2a} \tag{8.36}$$

a

$$(k_2 - k_3)\, C_1e^{ik_3a} = 2k_2B_2e^{-ik_2a} \ . \tag{8.37}$$

Ďalej vynásobím (8.36) faktorom $exp(-2ik_2a)$ a porovnaním s (8.34) dostaneme

$$(k_2 + k_3)\, C_1e^{ik_3a}\, e^{-2ik_2a} = A_1e^{-ik_1a}(k_2 + k_1) + A_2e^{ik_1a}(k_2 - k_1) \ . \tag{8.38}$$

Podobne vynásobíme (8.37) faktorom $exp(+2ik_2a)$ a porovnaním s (8.35) získame

$$(k_2 - k_3)\, C_1e^{ik_3a}\, e^{+2ik_2a} = A_1e^{-ik_1a}(k_2 - k_1) + A_2e^{ik_1a}(k_2 + k_1) \ . \tag{8.39}$$

Z rovníc (8.38) a (8.39) už ľahko určíme $t = C_1/A_1$ keď vylúčime A_2 tak, že od rovnice (8.38) vynásobenej $(k_2 + k_1)$, odčítame rovnicu (8.39)) vynásobenú $(k_2 - k_1)$.
Amplitúda pravdepodobnosti transmisie cez asymetrickú bariéru hrúbky $2a$ bude:

$$t = \frac{4k_1k_2e^{-ia(k_1+k_3)}}{(k_2 + k_3)(k_2 + k_1)e^{-2ik_2a} - (k_2 - k_3)(k_2 - k_1)e^{+2ik_2a}} \ . \tag{8.40}$$

Rovnako môžeme určiť $r = A_2/A_1$, keď z tých istých rovníc (8.38) a (8.39) vylúčime C_1. Rovnicu (8.38) vynásobíme $(k_2 - k_3)$, rovnicu (8.39) vynásobíme $(k_2 + k_3)$ a odčítame ich od seba.
Amplitúda pravdepodobnosti reflexie na asymetrickej bariére hrúbky $2a$ bude:

$$r = e^{-i(k_1+k_2)a}\frac{(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)e^{+2ik_2a} - (k_1 - k_2)(k_2 + k_3)e^{-2ik_2a}}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)e^{+2ik_2a} - (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)e^{-2ik_2a}} \ . \tag{8.41}$$

V prípade symetrickej ($V_1 = V_0$) pravouhlej bariéry hrúbky $2a$ a výšky V_0 budú vlnové vektory k_1 a k_3 rovnaké , takže z (8.40) a (8.41) dostaneme

$$t = \frac{2k_1 k_2 e^{-2ik_1 a}}{2k_1\, k_2 \cos(2k_2 a) - i(k_1^2 + k_2^2)\sin(2k_2 a)} \tag{8.42}$$

a

$$r = \frac{(k_1^2 - k_2^2)\sin(2k_2 a)}{2ik_1 k_2 \cos(2k_2 a) + (k_1^2 + k_2^2)\sin(2k_2 a)} \,. \tag{8.43}$$

Užitočným teoretickým zjednodušením pravouhlej bariéry, ktoré budeme často používať, je delta bariéra. Výška delta bariéry V_0 ide do nekonečna, zatiaľ čo jej hrúbka $2a$ ide k nule, takže súčin $U_0 = 2aV_0$, ktorý charakterizuje silu bariéry, ostáva konštantný. Vo formule pre transmisiu (8.42)

$$t = \frac{k_1 e^{-2ik_1 a}}{k_1 \cos(2k_2 a) - i(k_1^2 + k_2^2) a \frac{\sin(2k_2 a)}{2k_2 a}} \,, \tag{8.44}$$

využijeme v limite delta bariéry nasledovné vzťahy:

$$ik_2 = 2m/\hbar^2 \sqrt{(V_0 - E)} \to \infty, \quad \text{zatiaľ čo súčin} \quad iak_2 \to 0 \,,$$

ďalej:

$$\lim_{(iak_2)\to 0} \frac{\sin(2k_2 a)}{2k_2 a} = 1 \quad , \quad \lim_{a \to 0} \exp(-ik_1 a) = 1$$

a

$$(k_1^2 + k_2^2) = \frac{2m}{\hbar^2}(2E - V_0) \,, \quad \text{teda} \quad \lim_{a\to 0}(k_1^2 + k_2^2) a = -\frac{mU_0}{\hbar^2} \,,$$

až nakoniec dostaneme

$$t = \frac{k_1}{k_1 + i\Gamma} \quad , \quad \Gamma = \frac{mU_0}{\hbar^2} \tag{8.45}$$

Obdobne, z formuly pre reflexiu (8.43)

$$r = \frac{a(k_1^2 - k_2^2)\frac{\sin(2k_2 a)}{2ak_2}}{ik_1 \cos(2k_2 a) + a(k_1^2 + k_2^2)\frac{\sin(2k_2 a)}{2k_2 a}} \,. \tag{8.46}$$

dostaneme

$$r = \frac{-i\Gamma}{k_1 + i\Gamma} \,. \tag{8.47}$$

Vzťahy (8.45) a (8.47) pre transmisiu a reflexiu na δ-bariére sú totožné so vzťahmi (3.159) a (3.160), ktoré sme odvodili metódou rozptylových matíc.

8.5 Dodatok D: Koherentný odpor neusporiadaného 1D vodiča podľa Landauera

Pomocou vzťahu (6.11) ľahko získame vzťahy

$$\frac{1}{|t|^2} \equiv \frac{1}{1 - R_t} = \frac{1 + R_1 R_2 + 2(R_1 R_2)^{1/2}\cos\phi}{(1 - R_1)(1 - R_2)} \tag{8.48}$$

a

$$\frac{1-|t|^2}{|t|^2} \equiv \frac{R_t}{1-R_t} = \frac{R_1 + R_2 + 2(R_1R_2)^{1/2}\cos\phi}{(1-R_1)(1-R_2)}, \tag{8.49}$$

kde $\phi = \arg(r_1' r_2) + 2ka$, $R_1 = |r_1|^2$, $R_2 = |r_2|^2$ a symbol R_t označuje celkový reflexný koeficient dvoch prekážok. Urobme nasledovné priradenie:

$R_1 \equiv R_{n-1}$ nech je reflexný koeficient $n-1$ prekážok,

$R_2 \equiv R$ nech je reflexný koeficient pridanej n-tej prekážky,

$R_t \equiv R_n$ nech je reflexný koeficient všetkých n prekážok.

Rovnice (8.48) a (8.49) prepíšeme pomocou týchto označení a vystredujeme cez ϕ integrovaním $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \ldots$ obidvoch strán. Dostaneme

$$\frac{1}{1-R_n} = \frac{1+RR_{n-1}}{(1-R)(1-R_{n-1})}, \tag{8.50}$$

a

$$\frac{R_n}{1-R_n} = \frac{R+R_{n-1}}{(1-R)(1-R_{n-1})}. \tag{8.51}$$

Cieľom je odvodiť $\frac{R_n}{1-R_n}$ ako funkciu R a n. V hlavnom texte sme toto odvodenie zvládli iba s využitím rovnice (8.50). Landauer vo svojom pionierskom článku postupoval zložitejším spôsobom, ktorý potrebuje rovnicu (8.50) aj rovnicu (8.51). S ohľadom na historický význam jeho odvodenia teraz jeho (stručne opísaný) postup podrobne prepočítame.

Zavedieme označenia

$$x_n = \frac{1}{1-R_n}, \quad x = \frac{1}{1-R}, \quad y_n = \frac{R_n}{1-R_n}, \quad y = \frac{R}{1-R}, \tag{8.52}$$

ktoré nám umožňujú prepísať rovnice (8.50) a (8.51) v tvare

$$x_n = xx_{n-1} + yy_{n-1}, \qquad y_n = yx_{n-1} + xy_{n-1}. \tag{8.53}$$

Posledné dve rovnice môžeme prepísať v maticovom tvare ako

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{8.54}$$

resp. ako

$$z_n = Az_{n-1}, \tag{8.55}$$

kde

$$z_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}. \tag{8.56}$$

Zo vzťahu (8.55) plynie

$$z_n = AAz_{n-2} = AAAz_{n-3} = \cdots = A^{n-1}z_1, \tag{8.57}$$

kde

$$z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{8.58}$$

Rovnica pre vlastné hodnoty λ a vlastné vektory ζ matice A je

$$A\zeta = \lambda\zeta, \qquad \zeta = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{8.59}$$

Charakteristická rovnica pre vlastné hodnoty λ je

$$\mathrm{Det}(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} x-\lambda & y \\ y & x-\lambda \end{vmatrix} = (x-\lambda)^2 - y^2 = 0. \tag{8.60}$$

Vlastné hodnoty sú teda $\lambda_\pm = x \pm y$. Pre vlastné vektory teda máme

$$\begin{aligned}(A - \lambda_\pm\mathbb{I})\zeta = \begin{pmatrix} x-\lambda_\pm & y \\ y & x-\lambda_\pm \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= y\begin{pmatrix} \mp 1 & 1 \\ 1 & \mp 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= y\begin{pmatrix} \mp u_1 + u_2 \\ u_1 \mp u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{8.61}$$

Teda

$$\zeta_+ = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \zeta_- = C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{8.62}$$

kde C je konštanta. Zvoľme $C = 1$. Ľubovolný vektor $\left(\begin{smallmatrix} v \\ w \end{smallmatrix}\right)$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu vlastných vektorov ζ_+ a ζ_-. Špeciálne

$$z_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_+\zeta_+ + a_-\zeta_- = \begin{pmatrix} a_+ + a_- \\ a_+ - a_- \end{pmatrix}. \tag{8.63}$$

Z toho $a_\pm = \frac{x \pm y}{2} = \frac{\lambda_\pm}{2}$, takže

$$\begin{aligned} z_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^{n-1}z_1 = a_+A^{n-1}\zeta_+ + a_-A^{n-1}\zeta_- &= a_+\lambda_+^{n-1}\zeta_+ + a_-\lambda_-^{n-1}\zeta_- \\ &= \frac{1}{2}\left(\lambda_+^n\zeta_+ + \lambda_-^n\zeta_-\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_+^n + \lambda_-^n \\ \lambda_+^n - \lambda_-^n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8.64}$$

Odtiaľ a zo (8.52) dostávame

$$\varrho_n \equiv \frac{R_n}{1 - R_n} = y_n = \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{2} = \frac{(x+y)^n - (x-y)^n}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+R}{1-R}\right)^n - 1\right], \tag{8.65}$$

čo je výsledok totožný s (6.38).

8.6 Dodatok E: Pomocné výpočty k odvodeniu DMPK rovnice

Ukážeme, že vzťah (6.46) môžeme upraviť na vzťah (6.47). Priame integrovanie cez premennú ϱ_2 vedie k značným technickým ťažkostiam. Postupujme preto inak. Prepíšme

(6.46) ako

$$\mathcal{P}(\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \cdots = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\phi \cdots = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} \int_0^\infty d\varrho_1 \int_0^\infty d\varrho_2$$
$$\times\, \mathcal{P}_1(\varrho_1)\, \mathcal{P}(\varrho_2)\, \delta\big(\underbrace{\varrho - \varrho_1 - \varrho_2 - 2\varrho_1\varrho_2}_{=A} + \underbrace{2[\varrho_1\varrho_2(1+\varrho_1)(1+\varrho_2)]^{1/2}}_{=-B}\, t\big)$$
$$= \int_0^\infty d\varrho_1 \int_0^\infty d\varrho_2\, \mathcal{P}_1(\varrho_1)\, \mathcal{P}(\varrho_2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vartheta(B^2 - A^2)\, \delta(A - Bt)}{\pi(1-t^2)^{1/2}}\, dt$$
$$= \int_0^\infty d\varrho_1 \int_0^\infty d\varrho_2\, \mathcal{P}_1(\varrho_1)\, \mathcal{P}(\varrho_2) \frac{\vartheta(B^2 - A^2)}{\pi(B^2 - A^2)^{1/2}}, \quad (8.66)$$

kde $\vartheta(x)$ je skoková funkcia, t.j. $\vartheta(x) = 1$ pre $x > 0$ a $\vartheta(x) = 0$ pre $x < 0$. Argument $B^2 - A^2$ upravíme takto:

$$B^2(\varrho_1, \varrho_2) - A^2(\varrho; \varrho_1, \varrho_2) = 4\varrho_1\varrho_2(1+\varrho_1)(1+\varrho_2) - (\varrho - \varrho_1 - \varrho_2 - 2\varrho_1\varrho_2)^2$$
$$= \underbrace{4\varrho\varrho_1\varrho_2 + 2(\varrho_1\varrho_2 + \varrho\varrho_1 + \varrho\varrho_2) - (\varrho^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)}_{\text{nemení sa zámenou } \varrho \leftrightarrow \varrho_2}$$
$$= B^2(\varrho_1, \varrho) - A^2(\varrho_2; \varrho_1, \varrho) = [B(\varrho_1, \varrho) - A(\varrho_2; \varrho_1, \varrho)]\, [B(\varrho_1, \varrho) + A(\varrho_2; \varrho_1, \varrho)]$$
$$= \{2[\varrho_1\varrho(1+\varrho_1)(1+\varrho)]^{1/2} - (\varrho_2 - \varrho_1 - \varrho - 2\varrho_1\varrho)\}$$
$$\times \{2[\varrho_1\varrho(1+\varrho_1)(1+\varrho)]^{1/2} + \varrho_2 - \varrho_1 - \varrho - 2\varrho_1\varrho\}$$
$$= (\varrho_+ - \varrho_2)(\varrho_2 - \varrho_-), \quad (8.67)$$

kde $\varrho_\pm = \varrho + \varrho_1 + 2\varrho\varrho_1 \pm 2[\varrho\varrho_1(1+\varrho)(1+\varrho_1)]^{1/2}$. Pretože $(\varrho_+ - \varrho_2)(\varrho_2 - \varrho_-) = B^2 - A^2 \geq 0$, tak $\varrho_- \leq \varrho_2 \leq \varrho_+$. To umožňuje prepísať (8.66) ako

$$\mathcal{P}(\varrho) = \int_0^\infty d\varrho_1\, \mathcal{P}_1(\varrho_1) \int_{\varrho_-}^{\varrho_+} d\varrho_2\, \mathcal{P}(\varrho_2)\, \frac{1}{\pi[(\varrho_+ - \varrho_2)(\varrho_2 - \varrho_-)]^{1/2}}. \quad (8.68)$$

Nakoniec ukážme, že vzťah (8.68) je totožný so vzťahom (6.47). Vyjdime z (6.47):

$$\mathcal{P}(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\phi \int_0^\infty d\varrho_1\, \mathcal{P}_1(\varrho_1)\, \mathcal{P}_2\big(\varrho + \varrho_1 + 2\varrho\varrho_1 + 2[\varrho\varrho_1(1+\varrho)(1+\varrho_1)]^{1/2}\cos\phi\big)$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\pi(1-t^2)^{1/2}} \int_0^\infty d\varrho_1\, \mathcal{P}_1(\varrho_1)\, \mathcal{P}_2\big(\underbrace{\varrho + \varrho_1 + 2\varrho\varrho_1 + 2[\varrho\varrho_1(1+\varrho)(1+\varrho_1)]^{1/2} t}_{=\varrho_2}\big)$$
$$= \int_0^\infty d\varrho_1\, \mathcal{P}_1(\varrho_1) \int_{\varrho_-}^{\varrho_+} d\varrho_2\, \frac{1}{\pi[(\varrho_+ - \varrho_2)(\varrho_2 - \varrho_-)]^{1/2}}\, \mathcal{P}(\varrho_2), \quad (8.69)$$

čo je naozaj to isté ako vzťah (8.68).