Príklady z Modernej fyziky.

1. Ukážte, že vlna
$$u_k(r) = konst \times \frac{e^{ikr}}{r} \tag{1}$$
je sféricky symetrické riešenie vlnovej rovnice. Konštantu určte tak, aby podľa Huygensovho princípu príspevok od nekonečnej roviny vĺn s rovnakou fázou dal spolu rovinnú vlnu.(Δ v sférických súradniciach, pre symetrický problém, t.j. $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, je $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$. Použite paraxiálnu aproximáciu, kde $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \approx z\left(1+\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$ pre nekonečnú rovinu $z=0$.)

   [$konst = \frac{k}{2\pi i}$]

2. Uvažujte kruhovú štrbinu s polomerom r_0. Ako sa závisí intenzina vlnenia na osi prechádzajúcej otvorom od vzdialenosti od otvora (v rámci paraxiálnej approx.)? Nakreslite obrázok. (Frenelove zóny.)

   [$I(z) = 4sin^2\left(\frac{kr_0^2}{4z}\right)$]

3. Pomocou Huygensovho princípu spočítajte difrakčný obrazec od nekonečne dlhej, štrbiny s šírkou a na tienidle vo vzdialenosti $z \gg a$. Uvážte pritom, že pre veľkú vzdialneosť obrazcu od štrbiny je $z\left(1+\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2z}\right) \approx z\left(1+\frac{x^2+y^2-2(xx'+yy')}{z^2}\right)$.

   [$I \sim \frac{2sin^2(\frac{kax}{2z})}{\frac{kx}{z}}$]

4. Prečo je kov v oblasti viditeľného svetla silne reflektívny? Zdôvodnite kvantitatívnym odhadom ($\mathrm{m_e} = 9.1\times10^{-31}$kg, $\frac{\mathrm{e}^2}{\epsilon_0} = 2.9\times10^{-27}$Jm, n $\approx 10^{22}$cm^{-3}, h/e $= 4.135\times10^{-15}$eV.s). Skúste pouvažovať nad modelom absolútne čierneho telesa zostaveného z dutej kocky z tenkými kovovými stenami. Nakoľko môže hrúbka týchto stien ovplyvniť takýto model? (Skin efekt).

   [Nájdite dielektrickú funkciu elektrónového plynu $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \omega_p = \sqrt{(\frac{ne^2}{m\epsilon})} = ...$ a riešte el.mag. pole v takomto prostredí.]

5. Na Zem prichádza slnečné žiarenie s plošnou hustotou výkonu P = 700 W/m^2. Aká je teplota na Slnku? (Polomer Slnka $\mathrm{R_0}$=600000 km, vzdialenosť Zem - Slnko je 150 miliónov km, $\sigma = 5.67\times10^{-8}$W/m^2.K^4.)

   [6000 K.]

6. Maximum intenzity vyžarovania wolframového vlákna pripadá na λ = 966 nm. Priemer vlákna d = 0.2 mm, dĺžka l=1cm. Za aký čas poklesne teplota na izbovú po jej vypnutí? ($\mathrm{T\lambda_{max}} = \mathrm{b} = 2.9\times10^{-3}$Km, $\sigma = ..., \rho = 19\times10^3\mathrm{kgm^{-3}}, \mathrm{C} = 154\mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$.)

   [$t = \frac{d\rho C}{12\sigma}\left(\frac{1}{T_0^3} - \frac{\lambda^3}{b^3}\right) \approx 34s$.]

7. Wolfrámová žiarovka je kov a nie hypotetické čierne teleso. Za akých podmienok možno použiť model absolúlne čierneho telesa aj v tomto prípade (Skin efekt + hrúbka vlákna)? Pre popis kovu uvažujte dielektrickú konštantu odvodenú v príklade "kov ako zrkadlo".

8. Bude platiť analóg Wienovho zákona aj pre rozpálenú železnú tehlu? Uvážte, že pre elmag. vlny v kove platí disperzný vzťah
$$kc = \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}, \tag{2}$$
kde c je rýchlosť svetla vo vákuu, k veľkosť vlnového vektora, ω uhlová frekvencia elmag. vlny a ω_P plazmová frekvencia kovu (viď. príklad "kov ako zrkadlo").

   [Áno.]

9. Prečo voľný elektrón nedokáže absorbovať fotón?

   [ZZE a ZZH nedajú fyzikálne riešenie - ukázať.]

10. Atóm v pokoji prechádza zo stavu s energiou W_1 do stavu s energiou W_1 a vyžiari pritom fotón s energiou $\hbar\omega$. Ak sa ten istý atóm pohybuje v smere osi z rýchlosťou v_1 a vyžiari pri tom istom prechode fotón pod uhlom θ s osou z. Aká je energia takéhoto fotónu, a ako súvisí s Dopplerovým efektom?

   [$\hbar\omega' = \frac{\hbar\omega}{1-\frac{v_1}{c}\cos(\theta)}$.]

11. Ukážte, že pohybu častice zodpovedá grupová rýchlosť $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ a nie fázová rýchlosť $v_f = \frac{\omega}{k}$. Uvažujte jedno-rozmerný vlnový balík

$$\phi(z,t) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} g(k-k_0) \times e^{i(kz-\omega(k)t)} dk \tag{3}$$

   kde k_0 je klnový vektor dávajúci najvýraznejší príspevok ku sume týchto rovinných vĺn ($g(k-k_0)$ má výrazné maximum pre $k = k_0$). V takomto prípade $g(k-k_0) \approx g(0)$ pre $k \in (k_0-\Delta, k_0+\Delta)$ a pre iné k je celý integrál efektívne nulový. V intervale $(k_0-\Delta, k_0+\Delta)$ možno $\omega(k)$ rozvinúť do taylorovho radu $\omega(k_0+\delta) \approx \omega(k_0) + \frac{\partial\omega}{\partial k}\delta + \ldots$. Po uvážení týchto faktov je integrál (3) vyčísliteľný. Pohyb častice zrejme zodpovedá pohybu maxima tohto balíka.

   [$\phi(z,t) \sim \frac{2sin(z\Delta - \frac{\partial\omega}{\partial k}t\Delta)}{z-\frac{\partial\omega}{\partial k}t}$, čo má polohu maxima danú $z_{max} = \frac{\partial\omega}{\partial k}t$].

12. Rovnice elektromagnetizmu sú relativisticky korektné, nakoľko správne opisujú el.mag. pole, aj keď sa fotóny pohybujú rýchlosťou v = c (vo vákuu). Správna (relativisticky invariantná, t.j. je rovnaká v čiarkovanej aj v nečiarkovanej sústave) je teda aj vlnová rovnica

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(z,t)}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2\phi(z,t)}{\partial^2 z} = 0 \tag{4}$$

   Uvažujte ľubovoľnú *lineárnu* transformáciu súradníc a času

$$\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' \\ t' \end{pmatrix} \tag{5}$$

   s podmienkou, že počiatok čiarkovanej sústavy sa pohybuje vzhľadom na nečiarkovanú rýchlosťou u (t.j. $u = a_{12}/a_{11}$, prečo?). Aké podmienky vyplývajú z invariancie rovnice (4) na koeficienty a_{ij}?

   [Transformácia (5) je špeciálna Lorentzova transformácia. Inač povedané, vlnová rovnica s fázovou rýchlosťou v_f=c je relativisticky invariantná.]

13. Na základe invariancie vlnovej rovnice (4) nájdite relativistický vzťah pre Dopplerov effekt. Pomôcka: Musí zrejme platiť $\phi_k(z,t) = e^{i(kz-\omega t)} = \phi_{k'}(z',t') = e^{i(k'z'-\omega' t')}$, kde $\omega = ck$ a $(z,t) \to (z',t')$ podľa špeciálnej Lorentzovej transformácie.

   [$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$, kde ω' je frekvencia v pohybujúcej sa sústave.]

14. Pióny π^+ a π^- sú nestabilné - rozpadajú sa s polčasom $\tau = 1.8 \times 10^{-8}$s. Akú dráhu ubehnú v laboratóriu, keď sa ich polovica rozpadne ak sa šíria rýchlosťou v= $0.996c$?

   [Klasicky s = 5.38 m; relativisticky s = 60m.]

15. Intenzita elektrickáho poľa je E = 10^9V/m. Nájdite všeobecný vzťah pre rýchlosť ($v(t)$) a prejdenú dráhu ($x(t)$) elektrónu vzhľadom na sústavu v pokoji, ako aj jeho vlastný čas (τ) zodpovedajúci času t v pokojovej sústave. Aké je zrýchlenie elektrónu a jeho kinetická energia v okamihu, keď v = 10^8m/s?

   [$v(t) = \frac{c\theta t}{\sqrt{1+\theta^2t^2}}$, $x(t) = \frac{c}{\theta}\left(\sqrt{1+\theta^2t^2}-1\right)$, $\tau = \frac{1}{\theta}\ln(\theta t + \sqrt{1+\theta^2t^2})$, kde θ = eE/m$_0$c, $\frac{dv}{dt} = \frac{eE}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} = 1.5 \times 10^{20} ms^{-2}$.]

16. Odhadnite energiu elektrónu v atóme vodíka pomocou princípu neurčitosti.

Pre strednú energiu platí $\bar{E} = \frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \bar{r}}$, pričom pre základný stav $\bar{r} \sim \Delta r$ a podobne $\bar{p} \sim \Delta p$. Uvážením $\Delta x \Delta p \approx \hbar$, má $\bar{E}$ minimum pre $\bar{r} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$. To dáva 'prekvapivo' dobrý výsledok $\bar{E} = -\frac{me^4}{16\pi^2\epsilon^2\hbar^2}$.

17. Na najjednoduchšom prípade kvantovej sústavy - častici v nekonečne hlbokej potenciálovej jame - si precvičte 1. hľadanie úplného systému vlastných stavov, 2. normovanie vlnových funkcií, 3. počítanie stredných hodnôt operátorov, 4. nájdite neurčitosť hybnosti a polohy v najnižšom a prvom excitovanom stave, overte princíp neurčitosti, 5. použitím symetrickej geometrie pre jamu (V(x)=0 pre x $\in$ (-a/2,a/2), ináč V(x) = $+\infty$) posúďte symetriu vlnových funkcií, 6. aký bude časový vývoj pravdepodobnosti nachádzania sa častice na mieste x v čase t, ak počiatočný stav je daný lin.kombináciou základného a prvého vzbudeného stavu?

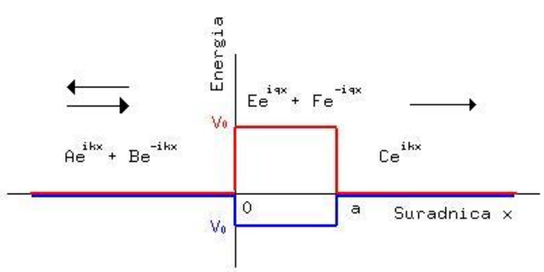
Všetko okrem 6. je v každom úvodnom texte ku kvantovej mechanike, napr. Krempaský *Fyzika*, Pišút, Černý, Gomolčák *Úvod do kvantovej mechaniky.* 6. Keďže H(x) = H(-x), potom (H(x) $\psi(x)$ = E $\psi(x)$) = (zámena x -> -x) (H(-x) $\psi(-x)$ = E $\psi(-x)$) = (symetria H(x)) (H(x) $\psi(-x)$ = E $\psi(-x)$). Posledná rovnosť znamená, že $\psi(x)$ a $\psi(-x)$ majú rovnakú vlastnú energiu, t.j. $\psi(x) = c\psi(-x)$. Pretože $\psi(-(-x)) = c^2\psi(x)$ dostávame c = $\pm$ 1. To znamená, že každá vlastná funkcia H je buď párna alebo nepárna.

18. Riešte potenciálovú jamu s konečnou hĺbkou. Aké podmienky musí spĺnať vlonová funkcia z bode, kde je potenciálna energia $V(x)$ nespojitá? Pre hľadaní riešenia využite znalosť symetrie hamiltoniánu. Nájdite počet viazaných stavov na jame s potenciálom V(x) = $-V_o$ pre x $\in$ (-a/2,a/2). Pre akú šírku a potenciál existuje iba jeden viazaný stav? Zdôvodnite opodstatnenosť nulových okrajových podmienok pre nekonečne hlbokú jamu.

Opäť štandardný príklad z štandardných učebníc

19. Riešte rozptyl volnej častice na bariére s potenciálom V(x), kde V(x) = $V_o > 0$ pre $0 \leq x \leq a$ a V(x)=0 inde, t.j. príslušnú Schrödingerovu rovnicu s okrajovou podmienkou $\psi(x \to -\infty) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ a $\psi(x \to \infty) = Ce^{ikx}$ (viď obr.(1)). Vlna s A reprezentuje dopadajúcu časť vlnovej funkie, B odrazenú a C prechádzajúcu. Pre aké energie (vlnové dĺžky) nedochádza ku odrazu? Pre aké energie dochádza ku rezonancii, t.j. pre nekonečne malú amplitúdu dopadajúcej vlny A je C aj B konečne veľké? Ako je situácia závislá od rozdielu energii voľnej častici E a potenciálom V_o? Ako sa zmení situácia, pre $V_o < 0$ a ako to súvisí z lokalizovanými stavmi na takejto potenciálovej jame?

Dobrá rada: Opatí sa, po napísaní podmienok diferencovateľnosti a spojitosti vlnovej funkcie v bodoch nespojitosti potenciálu, pristupovať z nasledovnou úvahou: (1) Ak častica dopadá s amplitúdou E na miesto nespojitosti, s akou amlitúdou sa odráža? t.j. vyjadriť F = f(E), paralelne s tým samozrejme získame aj E = f(C) a F = f(C). (2) Ak častica dopadá s amplitúdou A na miesto nespojitosti, s akou amlitúdou sa odráža? Kompltné riešenie je prístupné v PDF dokumente na www KF.



Obrázok 1: Situácia pri rozptyle častice na bariére (jame).

20. Kvalitatívnou úvahou (pomocou princípu neurčitosti) odhadnite pre akú bariéru (ako vysokú, ako širokú) je pravdepodobnosť tunelovania častice relatívne veľká, porovnajte s presnými výsledkami predchádzaujúceho príkladu. Ak vieme, že rozhranie kov-kov predstavuje bariéru o veľkosti $\sim 1eV$, odhadnite šírku takéhoto rozhrania, ak vieme, že elektróny bežne 'tunelujú'.

21. Cvičenie na H atóm. Nájdite 'prirodzené' atómové jednotky pre problém elektrónu v atóme vodíka (a teda pre akýkoľvek Coulombický elektrónový problém). Ako vyzerá elektrostatické pole generované atómom vodíka ak ten sa nachádza v základnom stave? (Vlnová funkcia $\sim A \exp\left(-r/a_B\right)$.)