Posledná aktualizácia: 14. mája 2012. Čo bolo aktualizované (oproti verzii z 21. októbra 2010): Iný spôsob číslovania príkladov. Predošlý príklad 5.8 rozčlenený na dva samostatné príklady 10.5.9, 10.5.8. Prepracované riešenie týchto dvoch príkladov, najmä príkladu 10.5.9. Iné značenie relatívnych permitivít v 10.5.8, 10.5.9. Príklad 10.5.10 (predtým 5.9): prehodené poradie častí príkladu, mierne prepracované riešenie, doplnené výsledky, nové značenie. Príklad 10.5.11 (predtým 5.10): mierne prepracované riešenie. Oprava malých chýb a nekorektností a množstvo ďalších drobných úprav. Prepracované obrázky. Pridané toto záhlavie. Nové formátovanie. Nový spôsob zobrazovania obtiažností.
Písmená **A**, **B**, **C**, **D** vyjadrujú obtiažnosť príkladu. **D** je najnižšia.

10 ELEKTROSTATIKA

10.1 POHYB NÁBOJOV V ELEKTRICKOM POLI

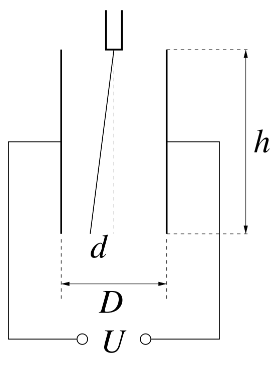
PRÍKLAD 10.1.1 ☆☆☆★ (D)

Elektrón je umiestnený do homogénneho elektrostatického poľa $\vec{E} = (E, 0, 0)$, $E = 100\,\mathrm{N/C}$. Akú rýchlosť získa po prejdeni dráhy $\ell = 3\,\mathrm{mm}$? Náboj elektrónu má veľkosť $e = 1{,}602\,.\,10^{-19}\,\mathrm{C}$, hmotnosť elektrónu $m_\mathrm{e} = 9{,}109\,.\,10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

$$\left[\; v = \sqrt{2eE\ell/m} = 3{,}25\,.\,10^5\,\mathrm{m/s} = 325\,\mathrm{km/s} \;\right]$$

PRÍKLAD 10.1.2 ☆☆★★ (C)

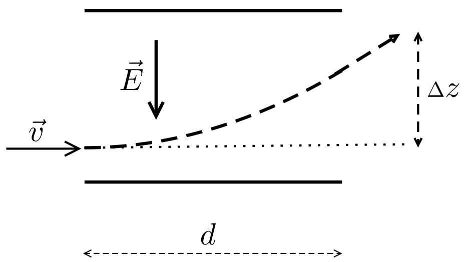
Aký náboj q nesie padajúca kvapka ortuti s hmotnosťou m, keď po páde v horizontálnom homogénnom elektrickom poli sa odchýli od zvislice o d? Počiatočná rýchlosť kvapky je nulová.



$$[\; q = mgDd/Uh \;]$$

PRÍKLAD 10.1.3 ☆☆★★ (C)

Kvapka ortuti hmotnosti m nesie náboj Q. O koľko sa vychýli zo svojej dráhy, keď rýchlosťou v vletí do kolmého elektrostatického poľa $\vec{E}$. Aké je znamienko náboja? Pôsobenie zemskej tiaže zanedbajte.



$\left[\ \Delta z = \dfrac{|Q|E}{2m}\left(\dfrac{d}{v}\right)^2;\quad Q \text{ je záporný.}\ \right]$

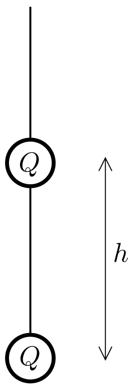
PRÍKLAD 10.1.4 ☆☆☆★ **(D)**

Elektrostatické pole je orientované vo vertikálnom smere. Aká je jeho intenzita $\vec{E}$ a orientácia, ak vieme, že v ňom elektrón „padá“ k Zemi rovnomernou rýchlosťou v? Náboj elektrónu má veľkosť $e = 1{,}602\,.\,10^{-19}\,\mathrm{C}$, hmotnosť elektrónu $m_\mathrm{e} = 9{,}109\,.\,10^{-31}\mathrm{kg}$, tiažové zrýchlenie $g = 9{,}806\,\mathrm{m/s^2}$.

$\left[\ E = mg/e = 5{,}5\,.\,10^{-11}\,\mathrm{N/C}.\ \text{ Orientované je smerom nadol.}\ \right]$

PRÍKLAD 10.1.5 ☆☆☆★ **(D)**

Na tenkej nenabitej niti visia dve kovové guľôčky, každá hmotnosti m. Spodná guľôčka visí na konci nite, horná sa môže voľne pohybovať. Do akej výšky vystúpi horná guľôčka, keď sa obe nabijú, každá nábojom Q? Polomer oboch guľôčiek považujte za zanedbateľne malý.



$\left[\ h = |Q|/\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg}\ \right]$

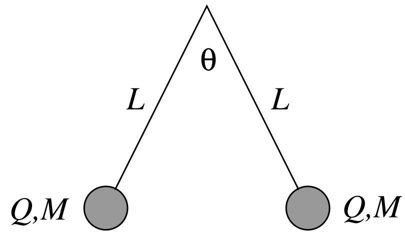
PRÍKLAD 10.1.6 ☆★★★ **(B)**

Dve guľôčky majú každá náboj Q a neznámu hmotnosť M. Guľôčky sú zavesené na tenkej niti dĺžky L.

a) Nájdite hmotnosť guľôčiek M, ak poznáte uhol θ, pri ktorom sú v rovnováhe.

b) Ak sú guľôčky nabité opačným nábojom, nájdite uhlovú rýchlosť ω, s ktorou sa celý

systém musí otáčať okolo zvislej osi tak, aby nite opäť zvierali uhol θ.
Geometrické rozmery guľôčiek zanedbajte.



$$\left[\ \textbf{a)}\ M = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2 g\,\mathrm{tg}(\theta/2)},\ \text{kde } R = 2L\sin(\theta/2);\quad \textbf{b)}\ \omega = \sqrt{\frac{2g}{L\cos(\theta/2)}}\ \right]$$

PRÍKLAD 10.1.7 ☆☆☆★ **(D)**

Koľko elektrónov obsahuje náboj častice prachu o hmotnosti $m = 10^{-10}$ g, keď sa vznáša medzi vodorovnými doskami kondenzátora so vzdialenosťou dosiek $h = 0{,}5$ cm a potenciálovým rozdielom $U = 800$ V ? Náboj elektrónu má hodnotu $-e = -1{,}602\,.\,10^{-19}$ C.

$$\left[\ N = \frac{mgh}{eU} = 38\ \right]$$

PRÍKLAD 10.1.8 ☆☆★★ **(C)**

Aká je obežná rýchlosť elektrónu, obiehajúceho v atóme vodíka okolo jadra vo vzdialenosti $R = 10^{-10}$ m? Elektrón má náboj $-e = -1{,}602.10^{-19}$ C, hmotnosť $m = 9{,}109.10^{-31}$ kg. Jadro má náboj e (ide o atóm vodíka). Permitivita vákua $\varepsilon_0 = 8{,}854\,.\,10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\,.\,m^2)}$.

$$\left[\ v = 1{,}6\,.\,10^6\ \mathrm{m/s}\ \right]$$

10.2 ELEKTROSTATICKÉ POLE

PRÍKLAD 10.2.1 ☆☆☆★ (D)

Dané je pole $\vec{E} = (Ky, Kx, 0)$ (K je konštanta).

a) Vypočítajte $\operatorname{rot}\vec{E}$ a $\operatorname{div}\vec{E}$.

b) Rozhodnite, či $\vec{E}$ môže reprezentovať reálne elektrostatické pole.

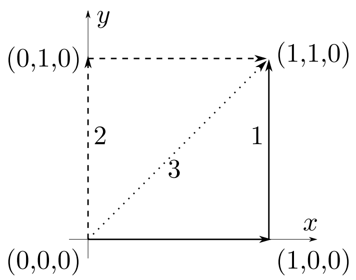
[**a)** $\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0}$; $\operatorname{div}\vec{E} = 0$; **b)** môže]

PRÍKLAD 10.2.2 ★★★★ (A)

Dané je pole $\vec{E} = (6xy, 3x^2 - 3y^2, 0)$. Vypočítajte integrál

$$I = \int \vec{E} \, . \, \mathrm{d}\vec{\ell}$$

z bodu (0,0,0) do bodu (1,1,0) po dráhach 1, 2 a 3 na obrázku. Rozhodnite, či pole $\vec{E}$ môže zodpovedať fyzikálnemu elektrostatickému poľu.



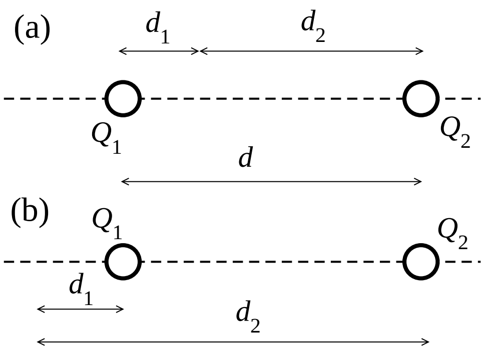
[$I_1 = I_2 = I_3 = 2$; môže]

PRÍKLAD 10.2.3 ☆☆☆★ (D)

Dva bodové náboje Q_1 a Q_2 sú od seba vzdialené na vzdialenosť d. Nájdite miesto na priamke prechádzajúcej oboma nábojmi, na ktorom je intenzita elektrostatického poľa nulová. Uvažujte prípady:

a) náboje majú súhlasné znamienka (napr. oba záporné),

a) náboje sú nesúhlasné.



$$\left[\ \textbf{a)}\ r_1 = \frac{\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}}\,d; \quad \textbf{b)}\ r_1 = \frac{\sqrt{|Q_1|}}{\sqrt{Q_2}-\sqrt{|Q_1|}}\,d\ \right]$$

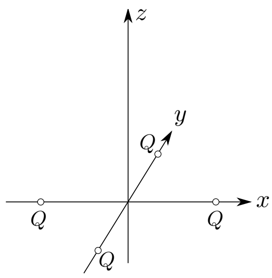
PRÍKLAD 10.2.4 ☆☆☆★ **(D)**

Tri rovnaké kladné náboje Q sú umiestnené vo vrcholoch rovnoramenného pravouhlého trojuholníka ABC. Pravý uhol je pri vrchole A. Dĺžka strany AB je ℓ.
Aká je intenzita elektrického poľa v strede S strany BC?

$$\left[\ \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q^2}{\ell^2}\frac{(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}\ \right]$$

PRÍKLAD 10.2.5 ☆★★★ **(B)**

Štyri rovnaké kladné bodové náboje Q sú umiestnené vo vrcholoch štvorca v rovine (x,y). Ich plohy sú $(x,y,z) = (\ell,0,0),(0,\ell,0),(-\ell,0,0)$ a $(0,-\ell,0)$. Nájdite intenzitu elektrického poľa **a)** na kladnej osi z (pre $z > 0$), **b)** na kladnej osi x (pre $x > 0$).



[pozri riešenie]

PRÍKLAD 10.2.6 ☆☆☆★ **(D)**

Vypočítajte intenzitu elektrostatického poľa vo vzdialenosti a od nekonečne dlhého veľmi tenkého priameho vodiča nabitého nábojom s dĺžkovou hustotou pomocou Gaussovho zákona pre elektrostatické pole.

$$\left[\ E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\ \right]$$

PRÍKLAD 10.2.7 ☆☆☆★ **(D)**

Vypočítajte intenzitu elektrostatického poľa v okolí plošného náboja rozloženého na nekonečne rozľahlej rovine s plošnou hustotou σ. Na výpočet použite Gaussov zákon.

$$\left[\ \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}, \quad \vec{n} \text{ je normála roviny.}\ \right]$$

PRÍKLAD 10.2.8 ☆☆☆★ (D)

Guľa s polomerom R je rovnomerne nabitá objemovou hustotou náboja ρ. Je umiestnená v počiatku súradnicovej sústavy. Vypočítajte intenzitu elektrostatického poľa $\vec{E}$ takejto gule ako funkciu polohy **a)** vo vnútri gule a **b)** v priestore mimo gule.

$$\left[\ \textbf{a)}\ \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}, \quad r < R; \qquad \textbf{b)}\ \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3}\vec{r}, \quad r > R\ \right]$$

PRÍKLAD 10.2.9 ☆★★★ (B)

Daná je nekonečne tenká (jednorozmerná) tyč dĺžky L. Na tyči je homogénne rozdelený náboj Q. Nájdite intenzitu elektrického poľa na priamke prechádzajúcej tyčou vo vzdialenosti x od stredu tyče. Uvažujte prípad **a)** $x > L/2$, **b)** $x < L/2$.

$$\left[\ \textbf{a)}\ E(x) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4x^2 - L^2}; \quad \textbf{b)}\ E(x) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0}\frac{2x}{L}\frac{1}{L^2 - 4x^2}\ \right]$$

PRÍKLAD 10.2.10 ☆★★★ (B)

Daná je nekonečne tenká (jednorozmerná) tyč dĺžky L. Na tyči je homogénne rozdelený náboj Q. Nájdite intenzitu elektrického poľa na priamke kolmej na tyč prechádzajúcej jej stredom.

$$\left[\ E(z) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{z\sqrt{4z^2 + L^2}}\ \right]$$

PRÍKLAD 10.2.11 ☆☆☆★ (D)

Dve nekonečné roviny sú umiestnené rovnobežne vo vzdialenosti d. Hustota náboja na rovinách je σ_1 a σ_2. Nájdite intenzitu elektrostatického poľa $\vec{E}$
a) v priestore medzi rovinami, **b)** v ostatnom priestore.

$$\left[\ \textbf{a)}\ E = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}; \quad \textbf{b)}\ E = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\ \right]$$

PRÍKLAD 10.2.12 ☆☆★★ (C)

Akou rýchlosťou sa bude pohybovať náboj $Q > 0$ s hmotnosťou m po kružnici s polomerom r okolo nekonečne dlhého vodiča tvaru valca s polomerom $R < r$ nabitého nábojom s plošnou hustotou $\sigma < 0$?

$$\left[\ v = \sqrt{\frac{|\sigma|QR}{m\varepsilon_0}}\ \right]$$

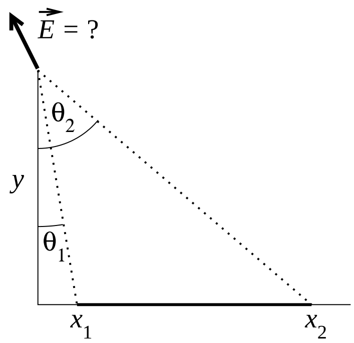
PRÍKLAD 10.2.13 ★★★★ (A)

Daná je homogénne nabitá dielektrická guľa s polomerom R. Hustota náboja je ρ. V guli sa môže voľne pohybovať malá nabitá častica s nábojom q opačnej polarity a s hmotnosťou m. Ak ju vzdialime na vzdialenosť r_0 od stredu gule ($r_0 \leq R$) a pustíme, bude vykonávať harmonické kmity. Nájdite ich periódu T.

$$\left[\; T = 2\pi\sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{-\rho q}} \;\right]$$

PRÍKLAD 10.2.14 ★★★★ (A)

Daná je nekonečne tenká (jednorozmerná) tyč. Na tyči je homogénne rozdelený náboj Q (obrázok). Tyč leží na osi x, jej koncové body majú súradnice x_1 a x_2. Nájdite intenzitu elektrického poľa v bode $\vec{r} = (0, y)$.



$$\left[\; E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right), \quad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right), \quad E_z = 0, \quad \text{kde } \lambda = \frac{Q}{x_2 - x_1} \;\right]$$

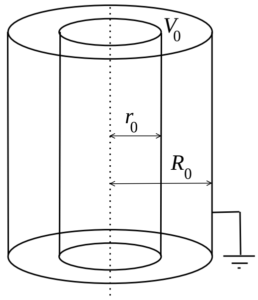
PRÍKLAD 10.2.15 ☆★★★ (B)

Vypočítajte veľkosť a smer sily pôsobiacej vo vákuu na teleso tvaru úsečky dĺžky ℓ rovnomerne nabitého kladným nábojom Q a kolmého na líniový kladný elektrický náboj, ležiaci na priamke s konštatnou dĺžkovou hustotou λ, ak bližší koniec úsečky je od líniového náboja vzdialený na vzdialenosť a. (Vplyv tiaže sa neuvažuje.)

$$\left[\; F = \frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\frac{a+\ell}{a}; \quad \text{sila je odpudivá.} \;\right]$$

PRÍKLAD 10.2.16 ☆★★★ (B)

Vypočítajte priebeh intenzity elektrostatického poľa medzi súosými nekonečne dlhými vodivými valcovými plochami s polomermi $r_0 < R_0$, keď vnútorná valcová plocha má potenciál V_0 a vonkajšia je uzemnená (takže na nej je $V = 0$).



$$\left[\; E(r) = \frac{V_0}{\ln(R_0/r_0)}\frac{1}{r} \;\right]$$

PRÍKLAD 10.2.17

☆★★★ (B)

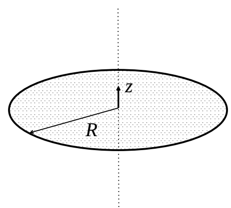
Nekonečne tenká kruhová doska s polomerom R je nabitá nábojom s konštantnou plošnou hustotou σ. Vypočítajte vektor intenzity a potenciál elektrostatického poľa v strede dosky a v bode ležiacom na kolmici na dosku a prechádzajúcu jej stredom vo vzdialenosti x od stredu dosky.

$$\left[\begin{array}{ll} \vec{E}(x \to 0\pm) = \pm\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}\ , & V(x \to 0) = \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \\ \vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\vec{i}\ , & V = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2} - x\right)\ ,\ x > 0 \end{array}\right]$$

PRÍKLAD 10.2.18

☆★★★ (B)

Nájdite intenzitu elektrostatického poľa $\vec{E}$ na osi rovnomerne nabitého prstenca tvaru kružnice s polomerom R a nábojom Q.



$$\left[\; \vec{E} = \frac{Q\,z}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\,\vec{k}\ .\ \ \text{(Os kružnice sme zvolili zhodnú s osou } z.\text{)} \;\right]$$

PRÍKLAD 10.2.19

☆★★★ (B)

Určte frekvenciu malých kmitov elektrónu, ktorý sa pohybuje v elektrostatickom poli kruhového prstenca s polomerom R nabitého kladným nábojom Q na osi prstenca kolmej na jeho rovinu okolo rovnovážnej polohy elektrónu. Za malé kmity považujeme také kmity, ktorých amplitúda je oveľa menšia ako R.

$$\left[\; f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3 m}} \;\right]$$

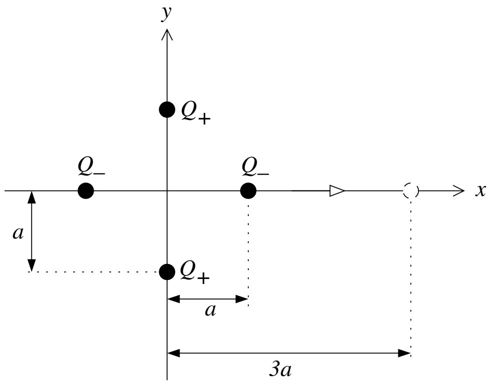
10.3 INTENZITA, POTENCIÁL, PRÁCA

PRÍKLAD 10.3.1 ☆★★★ (B)

Máme štyri bodové náboje rovnakých veľkostí líšiacich sa len znamienkami (obrázok) také, že $|Q_-| = Q_+ = Q$.

a) Nájdite intenzitu elektrického poľa na osi x.

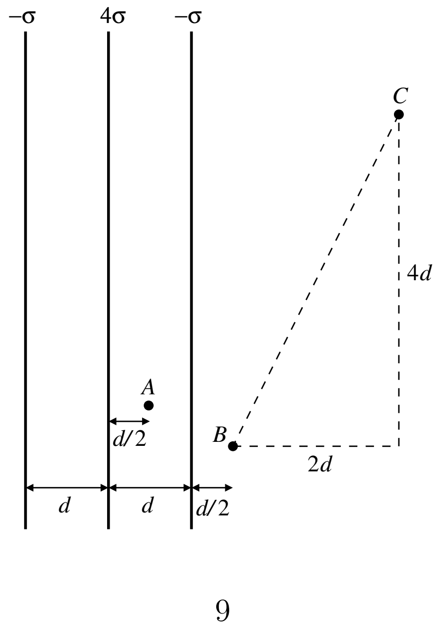
b) Akú prácu vykonáme, ak prenesieme náboj Q_- z miesta $x = a$ na miesto $x = 3a$?



$$\left[\begin{array}{lcl} \vec{E} & = & [E_x(x), 0, 0], \quad \text{kde } E_x(x) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\dfrac{(x-a)}{|x-a|^3} - \dfrac{(x+a)}{|x+a|^3} + 2\,\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\right] \\ W & = & -Q(V_2 - V_1) \end{array}\right]$$

PRÍKLAD 10.3.2 ☆★★★ (B)

Dané sú tri nekonečné nabité roviny (obrázok). Hustota náboja na vonkajších rovinách je $-\sigma$ (záporný náboj, lebo hodnotu σ si tu definujeme ako kladnú), na vnútornej rovine je hustota náboja 4σ. Nájdite intenzitu elektrického poľa v bodoch A, B. Nájdite prácu, ktorú je treba vykonať na prenos náboja q z bodu C do bodu B.



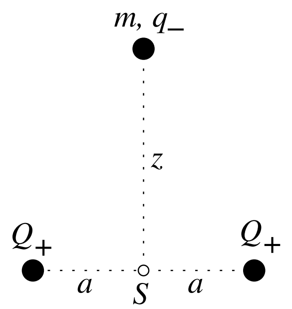
$$\left[\; E_A = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0}, \;\; E_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \;\; \text{obe orientované doprava;} \quad W = \frac{2qd\sigma}{\varepsilon_0} \;\right]$$

PRÍKLAD 10.3.3 ☆★★★ (B)

Máme dva kladné bodové náboje Q vzdialené od seba na vzdialenosť $2a$. Náboje sú fixované v priestore (nemôžu sa pohybovať). Častica s hmotnosťou m a záporným nábojom q leží na zvislej osi vo vzdialenosti z od stredu S medzi nábojmi. Ak ju uvoľníme, začne sa pohybovať po osi (prerušovaná čiara). Na obrázku sú náboje značené so zdôraznením ich znamienok. Nájdite

a) silu, aká pôsobí na časticu v počiatočnom stave,

b) rýchlosť častice v okamihu, keď prechádza bodom S.



$$\left[\; \text{a)}\; F = \frac{|q|Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}; \quad \text{b)}\; v = \sqrt{\frac{|q|Q}{\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)} \;\right]$$

PRÍKLAD 10.3.4 ☆★★★ (B)

Dve kovové gule majú polomery R_1 a R_2. Vzdialenosť ich stredov je ℓ. Na guliach je rozložený náboj Q a $-Q$, pričom nech $Q > 0$. Aký je potenciálový rozdiel medzi povrchmi gulí? Aká je energia elektrostatického poľa tohto systému? Predpokladajte, že vzdialenosť $\ell \gg R_1, R_2$, takže rozloženie náboja na guliach môžeme považovať za homogénne.

$$\left[\; V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}; \quad W = \int_0^Q V(q)\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R_1+R_2}{R_1R_2} \;\right]$$

PRÍKLAD 10.3.5 ☆★★★ (B)

Dokážte, ze dva osamelé rovnaké bodové náboje Q a $-Q$ vzdialené od seba o $2d$ vytvárajú vo svojom okolí elektrostatické pole, ktorého nulová ekvipotenciálna plocha má tvar roviny prechádzajúcej kolmo na spojnicu oboch nábojov v jej strede. Ako závisí veľkosť intenzity elektrostatického poľa na tejto ekvipotenciálnej ploche od vzdialenosti od stredu spojnice oboch bodových nábojov?

$$\left[\; E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d}{(r^2+d^2)^{3/2}} \;\right]$$

PRÍKLAD 10.3.6 ☆★★★ (B)

Náboj Q umiestnime do vzdialenosti a k nekonečne veľkej uzemnenej rovinnej kovovej ploche. Akou silou bude plocha pôsobiť na náboj?

$$\left[F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4a^2}; \quad \text{sila je príťažlivá} \right]$$

PRÍKLAD 10.3.7 ☆★★★ (B)

Náboj Q (môže byť tak kladný ako aj záporný) umiestnime do vzdialenosti a k nekonečne veľkej uzemnenej rovinnej kovovej ploche. Nájdite plošnú hustotu indukovaného náboja na kovovom povrchu a celkový indukovaný náboj.

$$\left[\sigma_{\text{ind}}(r) = -\frac{Q}{2\pi}\frac{d}{(r^2+d^2)^{3/2}}; \quad Q_{\text{ind}} = \int_0^\infty \sigma_{\text{ind}}(r)\, 2\pi r\, \mathrm{d}r = -Q \right]$$

PRÍKLAD 10.3.8 ★★★★ (A)

Dané sú dva bodové náboje $Q > 0$ a $q < 0$, $(Q \neq |q|)$ vzdialené od seba R. Nájdite plochu, na ktorej je potenciál nulový.

$$\left[(x+b)^2 + y^2 + z^2 = R_0^2, \quad \text{kde } b = \frac{q^2}{Q^2-q^2}R, \quad R_0 = \left|\frac{qQ}{q^2-Q^2}\right| R \right]$$

PRÍKLAD 10.3.9 ★★★★ (A)

Náboj Q umiestnime do vzdialenosti a od stredu *uzemnenej* guľovej kovovej plochy s polomerom R_0. Akou silou bude plocha pôsobiť na náboj?

$$\left[F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2a^2}{(a^2-R_0^2)^2}; \quad \text{sila je príťažlivá} \right]$$

PRÍKLAD 10.3.10 ☆★★★ (B)

Aký veľký musí byť polomer osamelej vodivej gule, aby sa na ňu zmestil náboj 1 C bez toho, aby nastalo sršanie, keď maximálna intenzita elektrického poľa vo vzduchu, pri ktorej ešte sršanie nenastáva, je $2{,}5\,.\,10^5$ V/m? ($\varepsilon_0 = 8{,}8542\,.\,10^{-12}\ \mathrm{A^2\,s^4\,m^{-3}\,kg^{-1}}$.)

$$\left[R > \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{E_{\max}}} = 189{,}6\,\mathrm{m} \right]$$

PRÍKLAD 10.3.11 ☆★★★ (B)

Dve kovové gule s polomermi R_1 a R_2 sú spojené tenkým kovovým vláknom. Na celý systém bol privedený náboj Q. Aká je hustota náboja na povrchu gulí? Náboj umiestnený na vlákne zanedbajte. Predpokladajte, že gule sú od seba vzdialené na dostatočne veľkú vzdialenosť, takže rozloženie náboja na nich môžeme považovať za homogénne.

$$\left[\ \sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_1(R_1+R_2)}, \quad \sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R_2(R_1+R_2)}\ \right]$$

PRÍKLAD 10.3.12 ☆☆★★ (C)

Dielektrická guľa s polomerom R zhotovená z materiálu s relatívnou permitivitou ε_r obsahuje homogénne rozložený kladný náboj s objemovou hustotou ρ. Vypočítajte rozdiel potenciálov v strede a na povrch gule.

$$\left[\ V_S - V_R = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0\varepsilon_r}\ \right]$$

PRÍKLAD 10.3.13 ★★★★ (A)

V balóne tvaru gule s polomerom R je homogénne ionizovaný plyn ($\varepsilon_\mathrm{r} = 1$) s celkovým nábojom Q. Aká energia[1] elektrostatického poľa pripadá na vnútorný objem balóna a na ostatný okolitý priestor?

$$\left[\ \mathcal{E}_\mathrm{int} = \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}, \quad \mathcal{E}_\mathrm{ext} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\ \right]$$

PRÍKLAD 10.3.14 ☆★★★ (B)

Aká časť energie elektrostatického poľa nabitej vodivej gule s polomerom R je vo vnútri jej ekvipotenciály s polomerom $2R$?

[1/2 celkovej energie]

[1] Písmeno $\mathcal{E}$ v rukopise zodpovedá veľkému písanému E.

10.4 DIPÓLY

PRÍKLAD 10.4.1 ☆☆★★ (C)

Elektrický dipól je umiestnený v bode (0,0,0) a smeruje rovnobežne s osou z: $\vec{p} = (0,\, 0,\, p_z)$. Nájdite intenzitu elektrického poľa $\vec{E}(\vec{r})$ tohto dipólu v bode $\vec{r} = (x,y,z)$, ak viete, že jeho potenciál je daný vzťahom $V(\vec{r}) = \vec{p}\,.\,\vec{r}/(4\pi\varepsilon_0 r^3)$.

$$\left[\ \vec{E} = -\operatorname{grad} V(\vec{r}) = \frac{p_z}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left[3zx,\ 3zy,\ -(x^2+y^2-2z^2)\right]\ \right]$$

PRÍKLAD 10.4.2 ☆★★★ (B)

Daný je dipól $\vec{p} = (0, 0, p_z)$ umiestnený v počiatku súradnicovej sústavy. Nájdite absolútnu hodnotu intenzity elektrického poľa dipólu ako funkciu vzdialenosti r a uhla θ medzi osou z a vektorom $\vec{r}$. Z výsledku ukážte, že vo vzdialenosti r od dipólu je na osi z intenzita 2 krát väčšia ako na osi x.

$$\left[\ E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}\ \right]$$

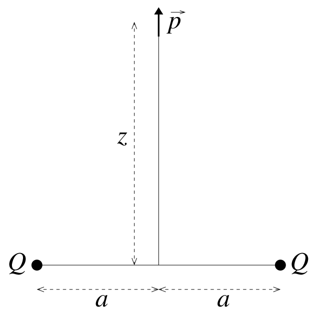
PRÍKLAD 10.4.3 ☆☆★★ (C)

Dané je nehomogénne pole s kartézskymi zložkami intenzity $E_x \equiv 0$, $E_y \equiv 0$, $E_z(z) = E_0 + E_1 z$ (teda rovnobežné s osou z, súhlasne alebo nesúhlasne). E_0 a E_1 sú konštanty. Nájdite silu, aká pôsobí na dipól $\vec{p}$ umiestnený v bode z_0 orientovaný v kladnom smere osi z.

$$\left[\ \vec{F} = (0, 0, pE_1)\ \right]$$

PRÍKLAD 10.4.4 ☆☆★★ (C)

Dané sú dva náboje Q ležiace na osi x, vzdialené od seba $2a$ a dipól $\vec{p} = q\vec{d}$ ležiaci na osi medzi oboma nábojmi vo vzdialenosti z (obrázok). Akou silou pôsobia náboje na dipól?



$$\left[\ F_z = p\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{Qp}{2\pi\varepsilon_0}\frac{a^2 - 2z^2}{(a^2+z^2)^{5/2}}\ \right]$$

PRÍKLAD 10.4.5 ☆☆★★ (C)

Akou silou pôsobia na seba dve polárne molekuly vzdialené o r, s dipólovými momentami veľkosti p orientovanými navzájom súhlasne **a)** v smere ich spojnice, **b)** kolmo na smer ich spojnice?

$$\left[\ \textbf{a)}\ \text{príťažlivou}\ F = \frac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 r^4};\quad \textbf{b)}\ \text{odpudivou}\ F/2\ \right]$$

PRÍKLAD 10.4.6 ☆★★★ (B)

Nájdite frekvenciu f malých kmitov okolo rovnovážnej polohy elektrického dipólu s dipólovým momentom veľkosti p a momentom zotrvačnosti vzhľadom na os rotácie J, ak je umiestnený v homogénnom elektrickom poli s intenzitou E.

$$\left[\ f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{J}}\ \right]$$

10.5 KONDENZÁTORY

PRÍKLAD 10.5.1 ☆☆★★ (C)

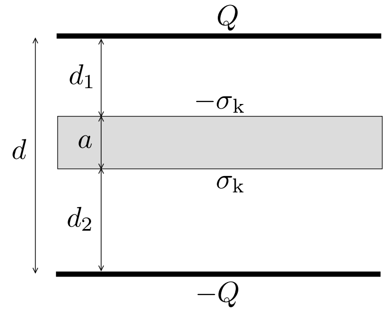
Rovinný kondenzátor má plochu dosiek S, vzdialenosť dosiek d. Medzi tieto vonkajšie dosky vložíme ďalšiu kovovú dosku hrúbky a vo vzdialenosti d_1 od prvej dosky kondenzátora (obrázok). Na doskách vonkajších kondenzátora udržiavame konštantné náboje Q a $-Q$, pričom $Q > 0$.

a) Aká je hustota nábojov na povrchoch kovovej dosky?

b) Ako sa zmenilo napätie medzi doskami kondenzátora?

c) Ako sa zmenila kapacita kondenzátora?

Deformácie poľa a hustôt spôsobené prítomnosťou okrajov kondenzátora zanedbajte.



$$\left[\ \textbf{a)}\ \sigma_\mathrm{k} = Q/S; \quad \textbf{b)}\ U = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}(d-a); \quad \textbf{c)}\ \Delta C = \varepsilon_0 S \frac{a}{d(d-a)}\ \right]$$

PRÍKLAD 10.5.2 ☆★★★ (B)

Medzi dosky rovinného kondenzátora vzdialené o d vložíme ďalšiu kovovú dosku hrúbky a vo vzdialenosti d_1 od prvej dosky kondenzátora. (Pozri obrázok ku predošlému príkladu.)

a) Aký potenciál V je na povrchu vloženej dosky, ak na prvej (t.j. hornej) vonkajšej doske udržiavame potenciál V_1 a na druhej vonkajšej doske potenciál V_2?

b) Aká je veľkosť hustoty náboja σ_k na povrchu vloženej kovovej dosky?

$$\left[\ \textbf{a)}\ V = \frac{V_1(d-d_1-a)+V_2 d_1}{d-a}; \quad \textbf{b)}\ \sigma_\mathrm{k} = \varepsilon_0 \frac{|V_1 - V_2|}{d-a}\ \right]$$

PRÍKLAD 10.5.3 ☆★★★ (B)

Guľový kondenzátor pozostáva z dvoch kovových koncentrických gulí polomerov a a b, $a < b$. Na vnútornej guli je náboj $Q > 0$, na vonkajšej náboj $-Q$. Nájdite

a) intenzitu elektrického poľa v priestore medzi guľami,

b) potenciálový rozdiel medzi guľami,

c) kapacitu kondenzátora.

$\left[\ \textbf{a)}\ E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2};\quad \textbf{b)}\ V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a-b}{ab};\quad \textbf{c)}\ C = Q/|V|\ \right]$

PRÍKLAD 10.5.4 ☆☆☆★ **(D)**

Vypočítajte kapacitu kovovej gule s polomerom R.

$[\ C = 4\pi\varepsilon_0 R\ ]$

PRÍKLAD 10.5.5 ☆★★★ **(B)**

Vypočítajte kapacitu jednotky dĺžky koaxiálneho kábla, ktorého polomer vnútorného vodiča je r, vonkajšieho je R a permitivita dielektrika medzi nimi je ε.

$\left[\ C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(R/r)}\ \right]$

PRÍKLAD 10.5.6 ☆★★★ **(B)**

Akou silou F pôsobia na seba dosky vzduchového kondenzátora s kapacitou C, nabitého nábojom Q, keď vzdialenosť dosiek je d? Závisí výsledok od toho, či je kondenzátor pripojený ku zdroju?

$[\ F = Q^2/(2Cd);$ nezávisí $]$

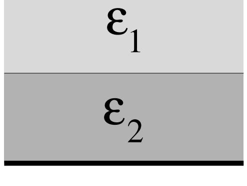
PRÍKLAD 10.5.7 ☆★★★ **(B)**

Akú prácu treba vynaložiť na oddialenie dosiek rovinného kondenzátora s kapacitou C pripojeného trvale na zdroj napätia U na dvojnásobok ich vzdialenosti?

$\left[\ A = \frac{1}{4}CU^2\ \right]$

PRÍKLAD 10.5.8 ☆☆★★ **(C)**

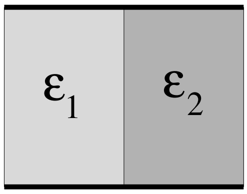
Doskový kondenzátor na obrázku má plochu kovových platní S, ich vzdialenosť je ℓ. Priestor medzi platňami je vyplnený dielektrikami s rôznymi hodnotami permitivít ε_1 a ε_2. Nájdite kapacitu tohto kondenzátora. Okrajové efekty zanedbajte.



$\left[\ C = \frac{2S}{\ell}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ \right]$

PRÍKLAD 10.5.9 ★★★★ (A)

Doskový kondenzátor na obrázku má plochu kovových platní S, ich vzdialenosť je ℓ. Priestor medzi platňami je vyplnený dielektrikami s rôznymi hodnotami permitivít ε_1 a ε_2. Nájdite kapacitu tohto kondenzátora. Okrajové efekty zanedbajte.



$$\left[\; C = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \frac{S}{\ell} \;\right]$$

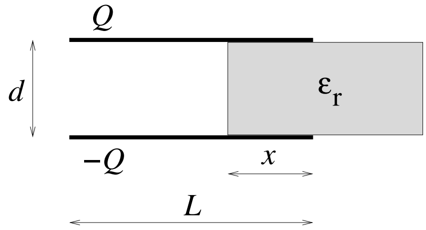
PRÍKLAD 10.5.10 ☆★★★ (B)

V kondenzátoroch z predchádzajúcich dvoch príkladov nájdite plošné hustoty viazaných nábojov σ_{v} na platniach aj na rozhraní medzi dielektrikami σ_{vd}. Celkovú plochu každej platne S a veľkosť náboja Q na platniach kondenzátorov považujte za známe. Výsledky nakoniec vyjadrite pomocou relatívnych permitivít.

$$\left[\begin{array}{llll} \textbf{a)} & \sigma_{\mathrm{v1}} = \dfrac{-Q}{S}\left(\dfrac{1-\varepsilon_{\mathrm{r1}}}{\varepsilon_{\mathrm{r1}}}\right), & \sigma_{\mathrm{v2}} = \dfrac{+Q}{S}\left(\dfrac{1-\varepsilon_{\mathrm{r2}}}{\varepsilon_{\mathrm{r2}}}\right), & \sigma_{\mathrm{vd}} = \dfrac{Q}{S}\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{r2}}-\varepsilon_{\mathrm{r1}}}{\varepsilon_{\mathrm{r1}}\varepsilon_{\mathrm{r2}}} \\ \\ \textbf{b)} & \sigma_{\mathrm{v1}} = \dfrac{2Q}{S}\dfrac{1-\varepsilon_{\mathrm{r1}}}{\varepsilon_{\mathrm{r1}}+\varepsilon_{\mathrm{r2}}}, & \sigma_{\mathrm{v2}} = \dfrac{2Q}{S}\dfrac{1-\varepsilon_{\mathrm{r2}}}{\varepsilon_{\mathrm{r1}}+\varepsilon_{\mathrm{r2}}}, & \sigma_{\mathrm{vd}} = 0 \end{array}\right]$$

PRÍKLAD 10.5.11 ☆★★★ (B)

Doskový kondenzátor má plochu platní $S = Lh$ a vzdialenosť platní d. Na kondenzátor je privedený kladný náboj Q (horná platňa) a záporný náboj $-Q$ (dolná platňa). Do kondenzátora je zasúvané dielektrikum s relatívnou permitivitou ε_{r}. Ako sa zmení napätie medzi platňami, keď je dielektrikum zasunuté do hĺbky x? Zanedbajte okrajové efekty a v priestore medzi platňami popisujte polia ako v kondezátore uvažovanom v príklade 10.5.9.



$$\left[\; \Delta U = \frac{Q}{C_0}\left(\frac{L}{L - x + x\varepsilon_{\mathrm{r}}} - 1\right) \;\right]$$

PRÍKLAD 10.5.12 ☆★★★ (B)

Daný je valcový kondenzátor. Vnútornú elektródu tvorí kovový valec polomeru a, vonkajšiu kovový valec polomeru b. Dĺžka kondenzátora je L. Kondenzátor nie je pripojený k žiadnemu zdroju. Valcové plochy sú nabité nábojmi Q a $-Q$, pričom $Q > 0$. Vnútro kondenzátora je vyplnené dielektrikami podľa obrázka. Nájdite:

a) Intenzitu elektrického poľa $\vec{E}$ v priestore medzi nabitými plochami,

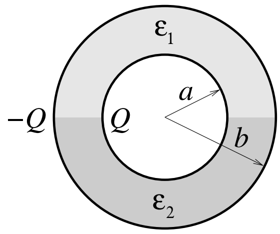
b) Indukciu elektrického poľa $\vec{D}$,

c) Napätie medzi valcovými plochami a kapacitu kondenzátora,

d) Prácu, potrebnú na vytiahnutie dielektrika **1** z kondenzátora von,

e) Hustotu povrchového viazaného náboja v dielektrikách.

Okrajové efekty na koncoch kondenzátora zanedbajte.



[

a) $E = \dfrac{2Q}{\pi r L} \dfrac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$; **b)** $D_1 = \dfrac{2Q}{\pi r L} \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$, $D_2 = \dfrac{2Q}{\pi L r} \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$

c) $U = \dfrac{2Q}{\pi L} \dfrac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \dfrac{b}{a}$; $C = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \dfrac{\pi L}{2 \ln(b/a)}$; **d)** $\Delta W = \left(\dfrac{1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_2} - \dfrac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \dfrac{Q^2}{\pi L} \ln \dfrac{b}{a}$

e) $\sigma_{\mathrm{v}1} = \varepsilon_0 (\varepsilon_{\mathrm{r}1} - 1) E$; $\sigma_{\mathrm{v}2} = P_2 = \varepsilon_0 (\varepsilon_{\mathrm{r}2} - 1) E$

]