

Posledná aktualizácia: 27. marca 2012. Čo bolo aktualizované (oproti predošlej verzii z 24. februára 2011): Odstránenie nekonzistentností a preklepov v príklade 4. Dodaný obrázok do riešenia príkladu 8. Drobné úpravy niektorých príkladov, obrázkov a postupov riešení. Nový spôsob zobrazovania obtiažností.

Písmená **A**, **B**, **C**, **D** vyjadrujú obtiažnosť príkladu. **D** je najnižšia.

5 DYNAMIKA TUHÝCH TELIES

PRÍKLAD 5.1

☆☆☆★ (D)

Akú prácu W vykonal hráč kolkov pri vrhu gule, valiacej sa rýchlosťou $v = 30$ km/hod? Guľa je homogénna, hmotnosti $m = 5$ kg.

$$\left[W = \frac{7}{10} mv^2 = 243 \text{ J} \right]$$

PRÍKLAD 5.2

☆☆★★ (B)

Akými silami je namáhané lano, prevesené cez kladku s polomerom R a momentom zotrvačnosti J (vzhľadom na jej os otáčania), na konci ktorého sú upevnené bremená s hmotnosťami m a M , ak sa bremená samovoľne pohybujú?

$$\left[f_m = gm \frac{2M + J/R^2}{M + m + J/R^2}, f_M = gM \frac{2m + J/R^2}{M + m + J/R^2} \right]$$

PRÍKLAD 5.3

☆☆★★ (B)

Majme dva zotrvačníky umiestnené na osi a oddelené trecou spojkou. Keď je spojka rozpojená, roztočíme prvý zotrvačník s momentom zotrvačnosti J_1 . Potom zapneme spojku, čím sa roztočí aj druhý zotrvačník. Aký má byť moment zotrvačnosti druhého zotrvačníka J_2 , aby sa na druhý zotrvačník preniesla maximálna energia?

$$[J_2 = J_1]$$

PRÍKLAD 5.4

☆☆★★ (B)

Aká je uhlová rýchlosť ω homogénnej tenkej tyče, ktorá sa môže otáčať okolo osi kolmej na tyč prechádzajúcej jej ťažiskom, ak v nej uviazne strela s hmotnosťou m vo vzdialenosti $L/2$ od ťažiska? Strela dopadla rýchlosťou v kolmou na tyč aj os otáčania tyče. Hmotnosť tyče je M a jej dĺžka $2L$. Os tyče je kolmá na zem.

$$\left[\omega = \frac{6m}{3m + 4M} \frac{v}{L} \right]$$

PRÍKLAD 5.5

☆☆★★ (C)

Na homogénnom plnom valci, ktorý sa môže otáčať okolo svojej osi symetrie, je namotané tenké lanko. Os má vodorovnú polohu. Na jednom konci lanka visí bremeno hmotnosti m , druhý je upevnený na valci. Akou silou je namáhané lanko, ak necháme bremeno samovoľne sa pohybovať? Valec má polomer R a hmotnosť M . Trecie sily aj hmotnosť lanka zanedbajte.

$$\left[f = \frac{Mm}{M + 2m} g \right]$$

PRÍKLAD 5.6

☆☆★★ (C)

Určte redukovanú dĺžku kyvadla tvaru homogénneho kruhového kotúča s polomerom R , ktoré kýva okolo vodorovnej osi kolmej na kotúč a prechádzajúcej bodom na obvode kotúča.

$$\left[L_{\text{red}} = (3/2)R \right]$$

PRÍKLAD 5.7

★★★★ (A)

Po naklonenej rovine pustíme homogénnu dutú guľu s neznámou hrúbkou steny. Guľa sa bude valiť bez šmýkania a po poklese jej výšky o hodnotu h nadobudne rýchlosť v . Aké hodnoty môže nadobúdať pomer translačnej časti kinetickej energie a zmeny potenciálnej energie $\eta = v^2/2gh$?

$$\left[3/5 < \eta < 5/7 \right]$$

PRÍKLAD 5.8

☆☆★★ (B)

Tenkú homogénnu polkruhovou dosku zavesíme na jednom rohu. O aký uhol α je priemer dosky odklonený od zvislice za rovnováhy?

$$\left[\alpha = \arctg\left(\frac{4}{3\pi}\right) \right]$$

PRÍKLAD 5.9

☆☆★★ (C)

Drôt ohnutý do tvaru rovnoramenného trojuholníka so stranami a , b , b je zavesený vo vrchole pri strane a . O aký uhol α je v rovnovážnej polohe odklonená strana a od zvislého smeru?

$$\left[\alpha = \arctg\left(\frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{3a}\right) \right]$$

PRÍKLAD 5.10

★★★★★ (A)

Homogénny plech tvaru pravouhlého trojuholníka s preponou c visí vo vrchole oproti prepone. Aká je redukovaná dĺžka ℓ takéhoto fyzikálneho kyvadla ak jeho os otáčania je vodorovná a kolmá na rovinu plechu?

$$\left[\ell = c/2; \text{ medzivýsledky: pre moment zotr. } I = (1/6)mc^2, \text{ pre vzdialenosť ťažiska } t = c/3 \right]$$

PRÍKLAD 5.11

☆☆★★★ (B)

Majme priamu tenkú homogénnu tyč dĺžky L . V akej vzdialenosti d od konca treba zvoliť vodorovnú os otáčania, kolmú na tyč, aby tyč kývala okolo nej s minimálnou dobou kyvu?

$$\left[d = \frac{L}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right]$$

PRÍKLAD 5.12

☆☆★★★ (B)

Nájdite vzdialenosť r ťažiska homogénneho drôtu ohnutého do tvaru štvrtkružnice s polomerom R od jej stredu.

$$\left[r = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R \right]$$

PRÍKLAD 5.13

☆☆★★★ (C)

Otáčavé javisko sa zotrvačnosťou otáča okolo svojho stredu uhlovou rýchlosťou ω . Na jeho okraji, vo vzdialenosti R od stredu stojí človek s hmotnosťou m . Akú prácu W vykoná, keď prejde do stredu javiska? Moment zotrvačnosti javiska je J .

$$\left[W = \frac{1}{2} J \omega^2 x(1+x), \text{ kde } x = \frac{mR^2}{J} \right]$$

PRÍKLAD 5.14

☆☆★★★ (C)

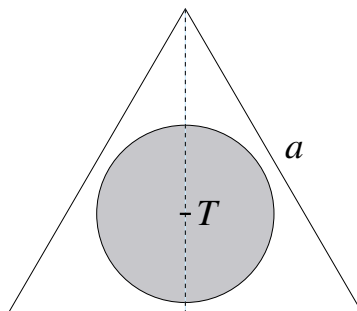
Stredy dvoch plných homogénnych gúľ s polormi $R_1 < R_2$, zhotovených z rovnakého materiálu, sú od seba vzdialené o ℓ . Dokážte, že ťažisko tejto sústavy \vec{r}^* je v tom istom mieste ako ťažisko hmotných bodov s hmotnosťami gúľ, ležiacich v mieste stredov gúľ \vec{r}_1^* a \vec{r}_2^* . V akej vzdialenosti od stredu menšej gule sa nachádza ťažisko tejto sústavy?

$$\left[\text{Priamym výpočtom treba ukázať, že platí } \vec{r}^* = \frac{M_1 \vec{r}_1^* + M_2 \vec{r}_2^*}{M_1 + M_2}, \quad x^* = \frac{R_2^3}{R_1^3 + R_2^3} \ell. \right]$$

PRÍKLAD 5.15

☆☆☆★ (D)

V homogénnej tenkej doske tvaru rovnostranného trojuholníka so stranou a vyrežeme kruhový otvor s polomerom $a/4$ tak, že jeho stred leží práve v ťažisku trojuholníka. V akej vzdialenosti b od strany trojuholníka leží ťažisko dosky po vyrezaní kruhového otvoru?



$$\left[\text{Poloha ťažiska sa nezmení; } b = \frac{\sqrt{3}}{6}a \right]$$

PRÍKLAD 5.16

☆☆★★ (C)

Dve telesá tvaru plnej gule rovnakej hmotnosti s rôznymi polomerami sa súčasne valia z kľudového stavu bez valivého odporu po naklonenej rovine dĺžky ℓ s uhlom sklonu α . Ktorá guľa sa dostane skôr na koniec naklonenej roviny? Za aký čas sa každá z gúľ dokotúľa? (Moment zotrvačnosti gule vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom je $J^* = 2/5mR^2$).

$$\left[t = \sqrt{\frac{14\ell}{5g \sin \alpha}} \right]$$

PRÍKLAD 5.17

☆☆★★ (C)

Valec a guľa tej istej hmotnosti a polomeru mali v spodnej časti naklonenej roviny s uhlom sklonu α rovnakú začiatočnú rýchlosť v . Ktoré z telies sa po naklonenej rovine smerom nahor dokotúľa ďalej? O aký dráhový úsek?

$$\left[\text{Valec sa dokotúľa ďalej o } \Delta s = \frac{v^2}{20g \sin \alpha} . \right]$$

PRÍKLAD 5.18

☆☆★★ (C)

Koleso upevnené závesným lankom na hriadeli s polomerom R sa môže (bez trenia) pohybovať vo zvislej rovine do hĺbky ℓ . Za aký čas sa vráti do hornej polohy? (Moment zotrvačnosti kolesa na hriadeli vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom je J , hmotnosť kolesa je m .)

Návod: Použite zákon zachovania energie na určenie rýchlosti pohybu osi kolesa. Potom dokážte, že tento pohyb je rovnomerne zrýchlený. Iná možnosť je postupovať analogicky ako v riešení príkladu 5.16. Zo známej rýchlosti a dráhy určite čas t .

$$\left[t = \sqrt{\frac{8\ell(J + mR^2)}{mgR^2}} \right]$$

PRÍKLAD 5.19

☆☆★★ (B)

Vypočítajte polohu ťažiska homogénneho rotačného kužeľa s výškou h .

$$[y^* = h/4]$$

PRÍKLAD 5.20

☆☆★★ (B)

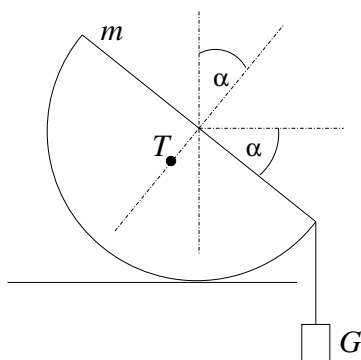
Nájdite polohu ťažiska homogénneho telesa tvaru tenkej polkruhovej dosky s polomerom R .

$$\left[y^* = \frac{4R}{3\pi} \right]$$

PRÍKLAD 5.21

☆☆★★ (B)

Závažie tiaže G je zavesené na okraji polgule hmotnosti m , pričom guľa je položená na vodorovnej podložke. Ako bude naklonená guľa v stave rovnováhy?

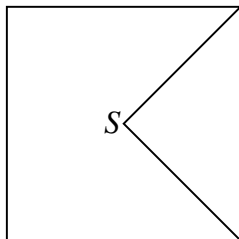


$$\left[\alpha = \arctg \frac{8G}{3mg} \right]$$

PRÍKLAD 5.22

☆☆★★ (C)

Zo štvorca so stranou a vystrihne trojuholník podľa obrázku. Nájdite vzdialenosť x^* ťažiska tohto útvaru od stredu štvorca.

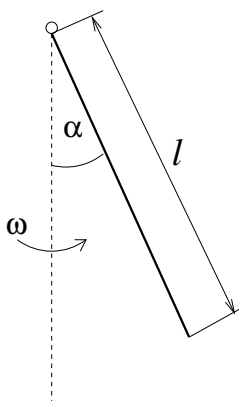


$$[x^* = -a/9]$$

PRÍKLAD 5.23

☆☆★★ (B)

Tyč dĺžky ℓ upevnená na zvislej osi otáčania kĺbovým mechanizmom rotuje s konštantnou uhlovou rýchlosťou. Aká musí byť táto uhlová rýchlosť, aby tyč bola pôsobením odstredivých síl vychýlená o uhol α od zvislej polohy?



$$\left[\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell \cos \alpha}} \right]$$

PRÍKLAD 5.24

☆☆★★ (C)

Valcový zotrvačník s celkovým momentom zotrvačnosti J má pri práci motora uhlovú rýchlosť ω_0 . Ak motor vypneme, zotrvačník sa pôsobením síl trenia zastaví za čas t . Aký je moment síl trenia (predpokladáme, že je konštantný)? Akú prácu bolo potrebné vykonať na úplné zastavenie zotrvačníka? Koľko otáčok zotrvačník vykonal od vypnutia motora do svojho úplného zastavenia?

$$\left[D = \frac{J\omega_0}{t}, A = \frac{1}{2}J\omega_0^2, n = \frac{\varphi(t)}{2\pi} = \frac{\omega_0 t}{4\pi} \right]$$

PRÍKLAD 5.25

☆☆☆★ (D)

Zotrvačník tvaru homogénneho plného valca polomeru R a hmotnosti m sa roztáča z kľudového stavu pôsobením motora s uhlovým zrýchlením ε . Akú prácu vykoná motor za čas t ? Akú veľkosť má krútiaci moment, pôsobiaci na zotrvačník? (Trenie neuvažujeme.)

$$\left[A = \frac{1}{4}mR^2\varepsilon^2t^2, D = \frac{1}{2}mR^2\varepsilon \right]$$

PRÍKLAD 5.26

☆★★★★ (B)

Teleso tvaru tenkého tuhého drôtu ohnutého do tvaru polkružnice s polomerom R je zavesené na klinci zatĺčenom v stene tak, že stred polkružnice je v kľudovom stave zvislo pod klincom. Ak teleso vychýlime z rovnovážnej polohy, kýva ako fyzikálne kyvadlo. Aká je doba kmitu tohto kyvadla?

$$\left[T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} \right]$$

PRÍKLAD 5.27

☆★★★★ (B)

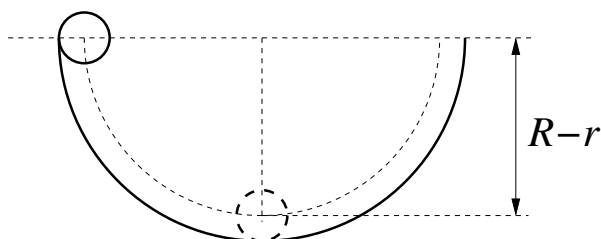
Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej kruhovej dosky hmotnosti M a polomeru R vzhľadom na os a prekrývajúcu sa s priemerom dosky.

$$\left[J = \frac{1}{4}MR^2 \right]$$

PRÍKLAD 5.28

☆☆★★★★ (C)

V žlabe vyfrézovanom tak, že jeho polomer je R , sa od jedného okraja k druhému valí guľôčka polomeru r ($r < R$) bez trenia, len vplyvom vlastnej tiaže. Aká bude rýchlosť guľôčky v spodnom bode žlabu?



$$\left[v = \sqrt{\frac{10}{7}g(R-r)} \right]$$

PRÍKLAD 5.29

★★★★★ (A)

Rebrík dĺžky ℓ s ťažiskom vo vzdialenosti $\ell/3$ od spodného konca rebríka je opretý o stenu tak, že s podlahou zvierá uhol α . Koeficient trenia rebríka o podlahu je μ . Trenie o stenu je zanedbateľné. Do akej výšky od podlahy môže vystúpiť chlapec hmotnosti trikrát väčšej, ako je hmotnosť rebríka, aby rebrík ešte nesklzol na zem?

$$\left[h = \frac{1}{9} \ell \sin \alpha (12\mu \operatorname{tg} \alpha - 1) \right]$$

PRÍKLAD 5.30

☆★★★★ (B)

Dve homogénne gule z rovnakého materiálu s polomerami R a $2R$ sú spolu zlepené. Určte moment zotrvačnosti tejto sústavy vzhľadom na os kolmú na spojnicu stredov gulí, prechádzajúcu ťažiskom tejto sústavy, ak jej hmotnosť je M .

$$\left[J = \frac{106}{45} MR^2 \right]$$