Prednášky z Fyziky dynamických procesov
Peter Bokes, zima 2005, 2006.
Aktualizácia: 8. januára 2007

1 Sylaby

1. **Pohybové rovnice diskrétnych sústav I.**
   - Motivácia ku štúdiu - robotika s využitím dynamiky.
   - Definícia a vlastnosti tuhého telesa, redukcia síl.
   - Odvodenie pohybových rovníc tuhého telesa.
2. **Pohybové rovnice diskrétnych sústav II.**
   - Otáčanie okolo pevnej osi, zavedenie vektora uhla.
   - Kinetická a potenciálna energia rotujúceho telesa okolo pevnej osi.
   - Pohybová rovnica elektrického stroja.
   - Súvislosť medzi kinematickými veličinami vyjadrenými v dvoch rôznych sústavách.
3. **Lagrangeove pohybové rovnice (LPR) I.**
   - LPR pre hmotný bod
   - LPR dvojitého matematického kyvadla.
   - Fundamentálny obsah Lagrangeovej formulácie: Variačný princíp a kovariancia vzhľadom na ľubovolnú zámenu premenných.
4. **Lagrangeove pohybové rovnice (LPR) II.** LPR dvojramenného manipulátora.
5. **Lagrangeove pohybové rovnice (LPR) III.** LPR dvojramenného manipulátora s plecom.
6. **Dynamika kontinua I.**
   - Pojem rýchlostného poľa
   - Základná veta kinematiky kontinua
7. **Dynamika kontinua II.**
   - Rovnica kontinuity.
   - Tenzor napätia
   - Pohybová rovnica kontinua
8. **Hydrodynamika I.**
   - Prúdenie ideálnej kvapaliny - Bernoulliho rovnica
   - Prúdenie stlačiteľnej kvapaliny a plynov
9. **Hydrodynamika II.**

- Dynamická viskozita
- Prúdenie viskóznej kvapaliny.
- Teória podobnosti a turbulencia

2 Poznámky k jednotlivým prednáškam

Pozor, tieto poznámky boli písané pre moju vlastnú orientáciu sa v prednášanej látke. Nepredstavujú ani pedagogicky vhodný materiál pre štúdium a neobsahujú všetko čo treba vedieť na skúšku. Pre skúšku sú smerodajné okruhy uvedené na konci dokumentu a tomu korešponujúci materiál čo bol odprednášaný.

2.1 Pohybové rovnice diskrétnych sústav I.

Dokonale tuhé teleso, 6 stupňov voľnosti; redukcia síl do jedného bodu a dvojíc síl do dvoch bodov (a k tomu patriaci pojem momentu sily) Toto zahŕňa:

1. redukcia síl pôsobiacich na priamke
2. redukcia síl v rovine ale nie paralelných s opačnou orientáciou
3. zavedenie dvojice síl pre paralelné s opačnou orientáciou
4. redukcia na silu a dvojicu síl pre dve mimobežné sily
5. redukcia ľub. síl v 3 bodoch na sily v dvoch bodoch

; rozloženie telesa na infinitezimálne časti; akcia-reakcia medzi nepohybujúcimi sa časťami ("krátko-dosahové sily") a k tomu patriaci fakt že moment týchto síl je 0.

Odvodenie 1. a 2. vety impulzovej; zavedenie vektorového a maticového zápisu pre moment zotrvačnosti tuhého telesa (v súvislosti s momentom hybnosti t.t. a nie ľ.s. 2. vety impulzovej), dôležitosť pri 2. vete že ide o otáčanie okolo osi prechádzajúcej ťažiskom. Komentár - tieto dve rovnice úplne popíšu dynamiku i.t.t. a preto netreba vyššie momenty alebo niečo podobné.

hlavné osi a rotácie tenzora zotrvačnosti (2D rotácia bude potrebná pri 2-ramennom manipulátore) [2005 neoprednášané].

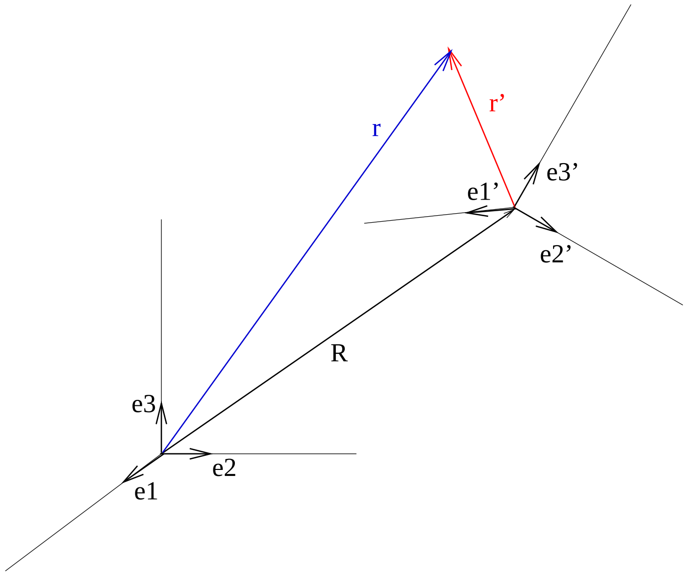
2.2 Pohybové rovnice diskrétnych sústav II.

Otáčanie okolo pevnej osi danej vektorom $\vec{k}$, skalárne vynásobime $\frac{d}{dt}\vec{G} = \vec{D}$; ukázať že $\vec{G} \cdot \vec{k} = \sum_i dm_i(\vec{k} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{k} \times \vec{r})\omega = \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}$; A konečný tvar $J\dot{\omega} = -Mr^* \sin(\phi) - \vec{D}'' \cdot k$.

Alternatívne (do budúcna toto bude vhodnejší prístup) - odvodenie vyššie uvedeného otáčania z 1. a 2. vety impulzovej + Steinerova veta.

Príklady: Pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla a elektrického stroja (tu zavedieme tvar momentu síl pre motor a trenie pri otáčavom pohybe - potrebné pre manipulátory).

Kinetická energia (Rotačná a translačná časť, ich zameniteľnosť pri otáčaní okolo pevnej osi neprechádzajúcej tažiskom), potenciálna energia vo všeobecnosti (=práca ktorú konáme, ak nezávisí od trajektórie možno zaviesť potenciálnu energiu, potenciálna energia v gravitačnom poli).



Obrázok 1: Inerciálna sústava daná konštantnými jednotkovými vektormi $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ a neinerciálna sústava daná časovo-premenými jednotkovými vektormi $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ a jej polohovým, tiež od času závislým polohovým vektorom $\boldsymbol{R}$. Vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{r}'$ ukazujú na ten istý bod vzhľadom na dve rôzne vzťažné sústavy.

2.3 Pohybové rovnice v neinerciálnych sústavách a Lagrange I.

Motivácia: Pohyb častí zrýchlujúceho sa, otáčajúceho sa stroja. Odvodenie neinerciálnych síl, rozdelenie jednotlivých členov, od hmotného bodu k ideálne tuhému telesu. Príklady: výťah, odstredivka, Foucaultovo kyvadlo (`http://www.calacademy.org/products/pendulum/`).

2. veta impulzová v neinerciálnej sústave (2005 neodprednášané).

V inerciálnej sústave platí 1. veta impulzová pre i.t.t

$$\frac{d M \boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}, \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{r} = \sum_i r_i \boldsymbol{e}_i$ nech označuje polohu ťažiska. Tento vektor môžeme vyjadriť aj v neinerciálnej sústave ako

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R} + \sum_i r'_i e'_i, \tag{2}$$

kde explicitne uvažujeme rozklad polohového vektora $\boldsymbol{r}'$ vhľadom na neinerciálnu súradnicovú sústavu.

Časovú deriváciu v *neinerciálnej sústave* budeme chápať ako nasledovný výraz:

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \sum_i \boldsymbol{e}'_i \frac{dr'_i}{dt} \tag{3}$$

t.j. tak akoby sme považovali jednotkové vektory $\boldsymbol{e}'_i$ za konštantné. Potom pre časovú deriváciu v neinerciálnej sústave dostaneme

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} + \omega \times \boldsymbol{r}' + \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} \tag{4}$$

a pre druhú deriváciu

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} + \omega \times \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} + \varepsilon \times \boldsymbol{r}' + \omega \times \left(\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} + \omega \times \boldsymbol{r}'\right) + \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} \tag{5}$$

$$= \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} + \varepsilon \times \boldsymbol{r}' + \omega \times (\omega \times \boldsymbol{r}') + \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} \tag{6}$$

1. veta impulzová zapísaná v neinerciálnej sústave teda nadobúda tvar

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} = \boldsymbol{F} - M\left(2\omega \times \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} + \omega \times (\omega \times \boldsymbol{r}') + \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} + \varepsilon \times \boldsymbol{r}'\right) \tag{7}$$

kde jednotlivé členy sa nazývajú aj Coriolisova sila ($-M2\omega \times \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$), odstredivá sila ($-M\omega \times (\omega \times \boldsymbol{r}')$) a zotrvačná sila ($-M\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}$). Posledný člen ($-M\varepsilon \times \boldsymbol{r}'$) nemá zaužívaný žiaden názov.

V prípade 2. vety impulzovej volíme za neinerciálnu sústavu sústavu v ktorej je tenzor zotrvačnosti diagonálny

$$\vec{\vec{I}} = \sum_i \boldsymbol{e}'_i I_{ii} \boldsymbol{e}'_i \tag{8}$$

Pohybová rovnica (v neinerciálnej sústave) potom nadobudne tvar Eulerových rovníc pre rotáciu i.t.t.

$$\frac{d\vec{\vec{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}}{dt} + \omega \times (\vec{\vec{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{D} \tag{9}$$

Vzťah medzi natočením telesa (daným tzv. Eulerovými uhlami) a okamžitým vektorom uhlovej rýchlosti ω je daný relatívne komplikovanými vzťahmi, ktorými sa ale nebudeme zaoberať hoci k rotácii tuhého zotrvačníka sa ešte vrátime pri Lagrangeových rovniciach.

Lagrangeove rovnice. Variačný princíp a Lagrangeove rovnice, zovšeobecnené súradnice a rýchlosti. Diskutovať bez odvodenia, iba matematickú formu variačného princípu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t))dt = 0 \tag{10}$$

kde $L(q_1, q_2, ..., q_M, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_N)$ je Lagrangeova funkcia N zovšeobecnených súradníc q_i a k nim patriacim N zovšeobecnených rýchlostí $\dot{q}_i$ a výsledný tvar Lagrange-Eulerových rovníc

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., N. \tag{11}$$

Ukázať že otáčanie okolo pevnej osi v gravitačnom poli sa dá napísať v tvare Lagrangeovej rovnici Pohybová rovnica, kinetická a potenciálna energia fyzikálneho kyvadla sú

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} = -mgr^* \sin(\phi) \tag{12}$$

$$E_K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \vec{\vec{I}} \cdot \omega = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \tag{13}$$

$$E_P = -m\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r} = mgr^* \cos(\phi) \tag{14}$$

A z toho úvaha že

$$L(q_1, q_2, ..., q_M, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_N) = E_K - E_P. \tag{15}$$

2.4 Lagrangeove rovnice II.

Sumarizácia Lagrangeovej funkcie, zovšeobecnených súradníc a rýchlostí a Lagrangeových rovníc.

Lagrangeove rovnice pre hmotný bod v potenciálovom poli v 3D.

Kartézske súradnice v 3D

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} && (16)\\ E_p &= V(\boldsymbol{r}) && (17)\\ L(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}) &= E_k - E_p, \quad \nabla_{\boldsymbol{r}} L = -\nabla E_p = \boldsymbol{F}, \quad \nabla_{\boldsymbol{v}} L = m\boldsymbol{v} && (18)\\ & && (19) \end{aligned}$$

čo vyústi k Lagrange-Eulerovej rovnice v tvare

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = bmF, \tag{20}$$

t.j. Newtonovej rovnice.

Polárne súracnice v 2D, gravitačné pole v smere $-\boldsymbol{k}$.

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\phi), \quad y = r\sin(\phi) && (21)\\ m\ddot{x} &= 0, \quad m\ddot{y} = -g && (22) \end{aligned}$$

Prepis do polárnych súradníc:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\dot{\phi} && (23)\\ \ddot{x} &= \ddot{r}\cos(\phi) - 2\dot{r}\sin(\phi)\dot{\phi} - r\cos(\phi)\dot{\phi}^2 - r\sin(\phi)\ddot{\phi} && (24)\\ \dot{y} &= \dot{r}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\dot{\phi} && (25)\\ \ddot{y} &= \ddot{r}\sin(\phi) + 2\dot{r}\cos(\phi)\dot{\phi} - r\sin(\phi)\dot{\phi}^2 + r\cos(\phi)\ddot{\phi} && (26) \end{aligned}$$

Násobením (24) s $\cos(\phi)$ a (26) s $\sin(\phi)$ a ich spočítaním a použitím Newtonových rovníc dostaneme

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = -mg\sin(\phi) \tag{27}$$

Naopak, násobením (24) s $-\sin(\phi)$ a (26) s $\cos(\phi)$ a ich spočítaním máme

$$mr\ddot{\phi} + 2m\dot{r}\dot{\phi} = mg\cos(\phi) \tag{28}$$

Posledné dve rovnice predstavujú pohybové rovnice bodu v polárnych súradniciach. V rámci Lagrangeovej formulácie máme

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) && (29)\\ E_p &= mgy = mgr\sin(\phi) && (30)\\ L(r,\phi,\dot{r},\dot{\phi}) &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - mgr\sin(\phi) && (31)\\ \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\phi}^2 - mg\sin(\phi) && (32)\\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} && (33)\\ \frac{\partial L}{\partial \phi} &= -mgr\cos(\phi) && (34)\\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= mr^2\dot{\phi} && (35) \end{aligned}$$

a teda Euler-Lagrangeové rovnice

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0 \tag{36}$$

získa tvar

$$m\ddot{r}-mr\dot{\phi}^2=-mg\sin(\phi) \tag{37}$$

a podobne

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0 \tag{38}$$

je

$$mr^2\ddot{\phi}+2mr\dot{r}\dot{\phi}=mgr\cos(\phi) \tag{39}$$

Vidíme teda že oba prístupy sú ekvivalentné (vedú na identické rovnice) a že formálny tvar Lagrane-Eulerových rovníc je rovnaký pre kartézske aj polárne súradnice. V nasledovnom si dokážeme univerzálnosť Lagrangeových rovníc.

Nezávislosť LR od zovšeobecnených súradníc Ukážeme, že Lagrangeove rovnice sú nezávislé od zvolených súradníc. Nech v súradniciach $\{q_i\}_{i=1}^N$ máme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad i=1,..,N \tag{40}$$

Nech existujú iné súradnice $\{p_j\}_{j=1}^N$ dané jedno-jednoznačný zobrazením

$$\begin{aligned} p_j &= p_j(\{q_i\}) && (41)\\ \dot{p}_j &= \sum_k \frac{\partial p_j(\{q_i\})}{\partial q_k}\dot{q}_k && (42)\end{aligned}$$

V nich vyjadríme Lagrangeovu funkciu

$$L(\{p_j\},\{\dot{p}_j\})=L\left(\{p_j(\{q_i\})\},\{\sum_k \frac{\partial p_j(\{q_i\})}{\partial q_k}\dot{q}_k\}\right) \quad (=L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\})) \tag{43}$$

Pre dosadenie do rovnice (40) potrebujeme poznať nasledovné derivácie

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i} &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}+\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\left(\sum_k \frac{\partial^2 p_j}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_k\right) && (44)\\ &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}+\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\left(\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial q_i}\right) && (45)\\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i} && (46)\end{aligned}$$

Dosadením do (40) dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}-\frac{\partial L}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}-\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial q_i}\right) &= 0 && (47)\\ \sum_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j}-\frac{\partial L}{\partial p_j}\right)\frac{\partial p_j}{\partial q_i} &= 0 && (48)\end{aligned}$$

z čoho priamo dostávame že výraz v zátvorkách musí byť nulový [1] t.j. Lagrangove rovnice platia aj v nových súradniciach.

Lagrangeove rovnice pre vodorovné-posuvné kyvadlo. [Nie podľa skrípt, ale pomocou I. a II. vety impulzovej a pomocnej sily $\vec{T}$ ktorá garantuje uchytenie m_1 na vlákne.].

Impulzové vety pre tyč na koľajničke v gravitačnom poli:

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}^*}{dt^2} = m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{T} \tag{49}$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = \boldsymbol{l}\times\boldsymbol{F} \tag{50}$$

ale naozaj nás zaujíma iba $x(t), \phi(t)$.

Lagrangeov formalizmus

$$E_k = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 \tag{51}$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{i}+\frac{d}{dt}\boldsymbol{l} = \dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{\phi}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{l} \tag{52}$$

$$v^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \dot{x}^2+l^2\dot{\phi}^2+2\dot{x}l\cos(\phi)\dot{\phi} \tag{53}$$

$$E_p = -mgl\cos(\phi) \tag{54}$$

...

[1] matica $\partial p_j/\partial q_i$ musí mať inverznú maticu čo je splnené pre jedno-jednoznačné transformácie súradníc.

2.5 Lagrangeove rovnice III.

Lagrangeove rovnice pre 2-ramenný manipulátor s paralelnými osami otáčania (Odvodenie z kinetickej a potenciálnej energie dvoch tuhých telies a nie cez elementy ako v skriptách). Diskusia riešenia rovníc s poukázaním na možnú chaotickú dynamiku - kyvadlo v Yorku, diskusia pre možný tvar zovšeobecnených síl: 1) trenie, 2) stabilizovanie harmonickým potenciálom + rezonančné kmity 3) budenie prúdom a problé optimalizácie času a disipácie. Odvodenie tvaru Lagrangeovej funckie pre 2-ramenný manipulátor s kolmými osami otáčania - pozor - potrebujeme tenzor zotrvačnosti hranola pre ľubovoľné natočenie v rovine (tento fakt nie je vzatý na vedomie v skriptách kde uvedená Lagrangeova funckia preto nie je korektná).

Pre budúce prednášky: spomenúť kedy Lagrange prestáva byť užitočný - keď niektoré z geometrických obmedzení sa ruší v priebehu dynamiky: problém vzlietnutia padajúcej tyče.

Lagrangeova funckia pre zotrvačník(Nie je v skriptách)
Skonštruujeme si Lagrangeovu funkciu $L(\dot{\alpha},\phi,\dot{\phi},\theta,\dot{\theta}) = E_K - U$. Kinetická energia je daná súčtom kinetických energií hmotných elementov m_n. Pre rýchlosť elementu máme

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_n &= \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}_n + \frac{d\mathbf{l}}{dt} \\
|\mathbf{v}_n|^2 &= |\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}_n|^2 + \left|\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right|^2 \\
\left|\frac{d\mathbf{l}_0}{dt}\right|^2 &= l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2
\end{aligned}$$

kde sme uvážili že pri sumovaní cez n dá zmiešaný člen nulový príspevok.

Vektor uhlovej rýchlsti $\boldsymbol{\omega}$ má zložky

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{3}\omega^i\mathbf{e}_i = \dot{\alpha}\mathbf{e}_1 + \dot{\phi}\left\{\cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2\right\} + \dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

kde $\mathbf{e}_i$ sú jednotkové vektory v sústave pevne spojenej s zotrvačníkom. Pre kinetickú energiu nakoniec dostávame

$$E_K = \sum_n \frac{1}{2}m_n|\mathbf{v}_n|^2 = \frac{1}{2}\sum I_{ij}\omega^i\omega^j + ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right)$$

kde sme použili tenzor momentu zotrvačnosti

$$I_{ij} = \sum_n m_n(\mathbf{e}_i\times\mathbf{a}_n)\cdot(\mathbf{e}_j\times\mathbf{a}_n) = J\delta_{ij}\delta_{i1} + I'\delta_{ij}(1-\delta_{i,1})$$

pričom sme uvážili, že jednotkové vektory $\mathbf{e}_i$ predstavujú zo symetrie jeho hlavné osi, a teda tento tenzor je automaticky v diagonálnom tvare. Okrem toho, ako obyčajne,

$$m = \sum_n m_n.$$

Potenciálna energia je jednoduchá,

$$U(\theta) = mgl\cos(\theta)$$

a nakoniec dostávame

$$L = \frac{1}{2}J(\dot{\alpha} + \dot{\phi}\cos(\theta))^2 + \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}^2 + (\sin(\theta)\dot{\phi})^2\right) - mgl\cos(\theta)$$

kde $I = I' + ml^2$.

2.6 Dynamika kontinua

1. Predpoklad popisu kontinua - hmotné elementy sa hýbu po dráhach a navzájom sa nepretínajú. $\vec{r}(\vec{r}_0,t)$ - Lagrangeov pohľad na vec, $\vec{v}(\vec{r},t)$ - rýchlostné vektorové pole - Eulerov pohľad. Hydrodynamická derivácia - zavedenie a pripomenutie zmyslu gradientu a parciálnych derivácií.

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t) = \frac{d\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}(r_0,t),t)}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)\cdot\nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) \quad (55)$$

   Pozor, $\nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ je tenzor! Rozpísať do zložiek...
   Hydrodynamická derivácia sa používa nie len na rýchlostné ale na akékoľvek iné polia keď nás zaujíma rýchlosť zmeny veličiny súvisiacej s materiálnou podstatou kontinua.

2. Pojem hustoty hmotnosti ako príklad fyzikálneho poľa (potrebné v hydrodynamike)

$$\rho(\boldsymbol{r},t) : M_\Omega(t) = \int_\Omega d^3r\rho(\boldsymbol{r},t) \quad (56)$$

   Príklady iných polí: Hustota častíc i-teho druhu (potrebné pri chemických reakciách)

$$n^i(\boldsymbol{r},t) \;:\; N^i_\Omega(t) = \int_\Omega d^3rn^i(\boldsymbol{r},t) \quad (57)$$

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \sum_i M^i_o n^i(\boldsymbol{r},t) \quad (58)$$

   Špecifická vnútorná energia (potrebné pri vedení tepla)

$$u(\boldsymbol{r},t) \;:\; U_{\Omega(t)}(t) = \int_{\Omega(t)} d^3r\rho(\boldsymbol{r},t)u(\boldsymbol{r},t) \quad (59)$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dQ}{dt} \quad (60)$$

   kde posledná rovnica predstavuje 1. vetu termodynamickú.

3. Pojem hustoty toku hmotnosti:

$$\vec{j} = \vec{v}\rho \quad (61)$$

$$\frac{\Delta M}{dtdS} = \frac{\Delta l dS}{dt}\rho = \frac{\vec{v}dt\cdot d\vec{S}}{dtdS}\rho\Delta S \quad (62)$$

   Rovnica kontinuity - odvodenie pomocou nehybnej oblasti Ω.

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega d^3r\rho(\boldsymbol{r},t) = -\int_\Sigma d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) \Rightarrow \frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)) = 0 \quad (63)$$

   Rovnica kontinuity použitím hydrodynamickej derivácie, rovnica kontinuity (a $\overleftrightarrow{\varepsilon}$.)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \quad (64)$$

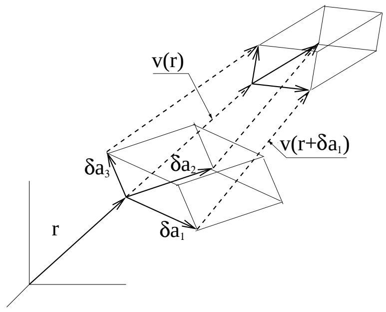
   Poznámka: pre nestlačiteľnú kvapalonu máme $\frac{d\rho}{dt} = 0$ t.j. $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ čo vytvára analógiu medzi stacionárnym elektrickým poľom vo vákuu a rýchlostným poľom nestlačiteľnej kvapaliny.

   Gaussova veta; aj pre tenzorové pole a skalárne pole, fyzikálne odvodenie Gaussovej vety a tvar operátora divergencie.

Rovnica kontinuity z pohybu ľub. objemu $\Omega(t)$, kde objem $\Omega(t)$ sa hýbe s kontinuom (t.j. jeho hranice sú pevne spojené s určitými bodmi kontinua).

Použitie rovnice kontinuity pre hromadenie materálu: Tok materiálu, zásobník, proporcionálna regulácia - bude na cvičení.

4. (V 2006 neodprednášam) Základná veta kinematiky kontinua - najvšeobecnejší pohyb dostatočne malého elementu kontinua je paralelný prenos, otočenie a roztiahnutie (stlačenie) v 3 lineárne nezávislých smeroch [**?**].



$$\vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{a}_i) \approx \vec{v}(\vec{r})+\delta\vec{a}_i\cdot\nabla_{\vec{r}}\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r})+(\vec{v}(\vec{r})\nabla)\cdot\delta\vec{a}_i \quad (65)$$
$$= \vec{v}(\vec{r})+\vec{\omega}(\vec{r})\times\delta\vec{a}_i+\frac{d}{dt}\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}(\vec{r})\cdot\delta\vec{a}_i+\mathscr{O}(|\delta\vec{a}|^2) \quad (66)$$

kde

$$\vec{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\nabla\times\vec{v}(\vec{r})$$

predstavuje lokálnu rotáciu kontinua (evidentne všetky $\delta\vec{a}_i$ sa natočia o uhol $\vec{\omega}(\vec{r})dt$) a

$$\frac{d}{dt}\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left((\vec{v}(\vec{r})\nabla)+\nabla\vec{v}(\vec{r})\right)$$

predstavuje časovú zmenu tenzora deformácia kontinua. Ak lokálne natočíme súradnicový systém tak aby $\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}$ bol diagonálny dostaneme (ak zvolíme $\delta\vec{a}_i$ ako vlastné vektory $\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}(\vec{r})$)

$$\Delta\delta a_i = \varepsilon_{ii}\delta a_i, \quad i = 1,2,3$$

a pre relatívnu zmenu dostatočne malého objemu (s daným množstvom hmotnosti)

$$\delta V/V = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} = \mathrm{Tr}\,\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}.$$

Alebo, použitím časových derivácií

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho(r)}\frac{d\rho(r)}{dt} = \frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\,\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon} = \nabla\cdot\vec{v}$$

(rovnica kontinuity)

5. Pohybová rovnica kontinua (Newtonova pohybová rovnica) -

   (a) Newtonova rovnica (obr.)

   $$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)}\rho(r,t)\vec{v}(r,t)d^3r = \int_{\Omega(t)}d\vec{F}.$$

   (b) Tenzor napätia: dáva silu ktorou pôsobí vonkajšia sila na element plochy $d\vec{S}$ (pripomeň orientáciu) malého objemu dV, $d\vec{F} = d\vec{S}\cdot\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$. Tlak ako záporné napätie pre izotrópne prostredie ($\overset{\leftrightarrow}{\sigma} = -p\overset{\leftrightarrow}{1}$). Tenzor napätia a tlak sú dané lokálnym stavom kontinua a preto treba termodynamiku.

(c) Objemová hustota síl $f(\boldsymbol{r},t)$ pre potenciálové polia (napr. elektro-statické)

$$f(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r},t) = -\rho(\boldsymbol{r},t)\nabla\phi(\boldsymbol{r},t).$$

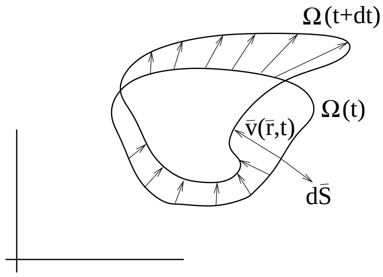
Pre gravitačné pole

$$f(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{g} = -\rho(\boldsymbol{r},t)\nabla(-\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}).$$

(d) Po úprave dostaneme

$$\rho(r,t)\left(\frac{\partial\vec{v}(r,t)}{\partial t} + \vec{v}(r,t)\cdot\nabla\vec{v}(r,t)\right) = \nabla\cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma}(r,t) + \vec{f}(r,t).$$

Komentár:



- fyzikálny zmysel člena $\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \nabla\frac{1}{2}v^2 - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$: hustota kin. energie a vírivosť. Tento člen zabezpečuje inherentne nelineárny charakter dynamiky kontinua - neprítomný len pre malé kmity bez prenosu látky (napr. zvuk).
- hustota hmotnosti je ďalšia neznáma funckia - treba využiť aj rovnicu kontinuity.

2.6.1 Prúdenie ideálnej kvapalinty

Ideálna kvapalina:

$$1.\ \text{Nestlačiteľná:}\rho(\vec{r},t) = const \text{ ale aj } D\rho t \quad = \quad 0 \text{ a } \nabla\cdot\vec{v} = 0 \tag{67}$$

$$2.\ \text{Bez viskozity:} \quad \overset{\leftrightarrow}{\sigma} \quad = \quad -p\overset{\leftrightarrow}{1} \tag{68}$$

Prúdnica: krivka majúca v kažom bode $\vec{r}$ a čase t dotykový vektor daný vektorovým polom $\vec{v}(\vec{r},t)$.
Laminárne prúdenie: $\nabla\times\vec{v} = 0$

2.6.2 Stacionárne prúdenie ideálnej kvapaliny v potenciálovom poli

Pozdĺž prúdnice máme $\vec{v}dt\cdot\nabla\times\vec{v} = 0$ a preto sa nemusíme obmedzovať iba na laminárne prúdenie. Ak preto integrujeme pohybovú rovnicu po krivke $\vec{s}(t)$ pozdĺž prúdnice dostaneme

$$\int_{\vec{s}_0}^{\vec{s}_1} d\vec{s}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + \phi\right) \quad = \quad 0, \tag{69}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2(t) + \frac{p(t)}{\rho} + \phi(t)\right) \quad = \quad 0 \tag{70}$$

$$\left[\frac{1}{2}v^2(\vec{s}_1) + \frac{p(\vec{s}_1)}{\rho} + \phi(\vec{s}_1)\right] - \left[\frac{1}{2}v^2(\vec{s}_0) + \frac{p(\vec{s}_0)}{\rho} + \phi(\vec{s}_0)\right] \quad = \quad 0 \tag{71}$$

t.j. výraz

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + \phi$$

je konštantný na prúdnici, aj ked od prúdnici k prúdnici sa môže meniť. Dá sa ukázať že pre laminárne prúdenie je táto hodnota rovnaká pre všetky prúdnice.

`V zime 2006 sa prednášalo iba po tiaľto a teda skúšaná bude učivo iba po nestlačiteľnú kvapalinu`

2.6.3 Stacionárne prúdenie stačiteľnej kvapaliny

... a teda i plynov. Podobne ako v predchádzajúcej sekcii ale keďže hustotu nemožno pokladať za konštantnú tak treba zaviesť lokálny termodynamický potenciál - $h(T,p)$.

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla h(T,p) \tag{72}$$

Napr. pre izotermické prúdenie

$$h(T,p) = \frac{RT}{M}\ln p.$$

lebo

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{RT}{Mp}\nabla p...$$

Vo všeobecnosti sa použiva tzv. rovnica polytropy

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n$$

(pre adiabatický proces $n = 1.4$) s výsledkom

$$h(p) = \frac{p_0^{1/n}}{\rho_0}\frac{p^{1-1/n}}{1-1/n}$$

2.7 Prúdenie viskóznej kvapaliny

Motivávia ku viskozite - tangenciálne sily. Definícia

$$\overset{\leftrightarrow}{\sigma}_\eta = \eta(\nabla\vec{v} + \vec{v}\nabla - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{v}\overset{\leftrightarrow}{1}), \tag{73}$$

(prvé dva členy - symetrizácia, posledný - vylúčenie objemovej viskozity $p_\nu = -\nu\nabla\cdot\vec{v}$.) kde η sa nazýva dynamický koeficient viskozity. Do pohybovej rovnice neslačiteľnej kvapaliny vstupuje v tvare

$$\nabla\cdot\overset{\leftrightarrow}{\sigma}_\eta = \eta\Delta\vec{v} \tag{74}$$

z čoho dostávame Navier-Stokes-ovu rovnicu nestlačiteľnej kvapaliny

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v} + \vec{f} \tag{75}$$

kde sa používa definícia *kinematickej viskozity*, γ

$$\gamma = \frac{\eta}{\rho}, \quad [\gamma] = \mathrm{m^2 s^{-1}}$$

Pre predstavu, pre vodu máme $\gamma \approx 0.01\mathrm{cm^2 s^{-1}}$.

Teraz nasleduje riešenie toku v tentkej vodorovnej trubici...
s výsledkom

$$v_x(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2) \tag{76}$$

$$p(x) = -\frac{\Delta p}{l}x + p_0 \tag{77}$$

$$u = \frac{Q}{\pi R^2\rho} = \frac{R^2}{8\eta}\frac{\Delta p}{l} \tag{78}$$

Celkový tok a analógia elektrického odporu.

2.8 Teória podobnosti a turbulencia

Reynolds (1883-95) prepojenie teória a praxe - vzťah procesov na rôznych mierkach (podobnosť)
Identifikácia veličín podstatných pre ustálené prúdenie:

r,l	v	ρ	$\gamma=\eta/\rho$	Δp

Pomer veličín v Navier-Stokes-ovej rovnici:

$$\frac{dv}{dt}/\gamma\Delta v \sim \frac{ud\{l,r\ldots\}}{\gamma} = Re \tag{79}$$

$$1/\rho\nabla p/\frac{dv}{dt} \sim \frac{p}{\rho u^2} = \frac{\Delta pd}{\rho u^2 l} \tag{80}$$

Použitie týchto pozorovaní:

- ustálené tečenia s identickým Reynoldosovým číslom Re sú si podobné.
- tečenie v trubici dalo
$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho u^2 \frac{l}{d}\lambda, \quad \lambda = \frac{64}{Re}$$
- experimentálne porozovania pre turbulentné prúdenia
$$\lambda = \lambda(Re)$$
- ... t.j. centrálna je závislosť λ od Re. Kvalitatívna zmena v tejto závislosti - kritické Reynoldsovo číslo (500-20000) - prechod od laminárneho (stáva sa nestabilným) k turbulentnému prúdeniu.

$$\ln\lambda(Re) = \begin{cases} -\ln Re + \ln 64, & Re < Re_c \\ -\frac{1}{4}\ln Re + \ln 0.3164 & Re > Re_c \end{cases} \tag{81}$$

Poznámka: Hodnota kritického Reynoldsovho čísla, R_c, závisí od konkrétnej geometrie problému.

Okruhy na skúšku:

1. Pohybové rovnice tuhého telesa
2. Podmienky rovnováhy tuhého telesa
3. Otáčanie tuhého telesa okolo pevnej osi - fyzikálne kyvadlo
4. Tenzor zotrvačnosti tuhého telesa a Steinerova veta
5. Kinetická a potenciálna energia tuhého telesa
6. Pohybová rovnica elektrického stroja
7. Súvislosť medzi kinetickými veličinami vyjadrenými v dvoch rôznych súradnicových sústavách.
8. Lagrangeova formulácia dynamiky bodov a tuhých telies
9. Lagrangeova formulácia dynamiky dvojramenného manipulátora
10. Lagrangeova formulácia dynamiky dvojramenného manipulátora s plecom
11. Základné pojmy mechaniky kontinua
12. Rovnica kontinuity pre hmotnosť
13. Pohybová rovnica kontinua
14. Stacionárne prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny.
15. (v 2006 nebolo) Bernoulliho rovnica stlačiteľnej kvapaliny v stacionárnom prípade.
16. (v 2006 nebolo) Viskozita a prúdenie viskóznej kvapaliny v úzkej trubici.
17. (v 2006 nebolo) Teória podobnosti.

Referencie

[1] Š. Bárta, “Fyzika dynamických procesov” skriptá STU, 2002.