(*neodprednášané na jeseň 2008*)

3.3 Prúdenie viskóznej kvapaliny

Motivávia ku viskozite - tangenciálne sily, a intuitívny vzťah

$$F_y = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Definícia je pomocou časovej zmeny tenzora deformácie (zavedený v základnej vete kinematiky kontinua) $\frac{d}{dt}\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + \vec{v}\nabla)$

$$\overset{\leftrightarrow}{\sigma}_\eta = \eta(\nabla\vec{v} + \vec{v}\nabla - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{v}\overset{\leftrightarrow}{1}), \tag{169}$$

(prvé dva členy - symetrizácia, posledný - vylúčenie objemovej viskozity $p_v = -\nu\nabla\cdot\vec{v}$.) kde η sa nazýva dynamický koeficient viskozity. Do pohybovej rovnice neslačiteľnej kvapaliny vstupuje v tvare

$$\nabla\cdot\overset{\leftrightarrow}{\sigma}_\eta = \eta\Delta\vec{v} \tag{170}$$

z čoho dostávame Navier-Stokes-ovu rovnicu nestlačiteľnej kvapaliny

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v} + \vec{f} \tag{171}$$

kde sa používa definícia *kinematickej viskozity*, γ

$$\gamma = \frac{\eta}{\rho}, \quad [\gamma] = \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$$

Pre predstavu, pre vodu máme $\gamma \approx 0.01\mathrm{cm}^2\mathrm{s}^{-1}$.

Teraz nasleduje riešenie toku v tentkej vodorovnej trubici...
s výsledkom

$$v_x(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2) \tag{172}$$

$$p(x) = -\frac{\Delta p}{l}x + p_0 \tag{173}$$

$$u = \frac{Q}{\pi R^2\rho} = \frac{R^2}{8\eta}\frac{\Delta p}{l} \tag{174}$$

Celkový tok a analógia elektrického odporu.

3.4 Teória podobnosti a turbulencia

Reynolds (1883-95) prepojenie teória a praxe - vzťah procesov na rôznych mierkach (podobnosť)
Identifikácia veličín podstatných pre ustálené prúdenie:

r, l	v	ρ	$\gamma = \eta/\rho$	Δp

Pomer veličín v Navier-Stokes-ovej rovnici:

$$\frac{dv}{dt}/\gamma\Delta v \sim \frac{ud\{l, r\ldots\}}{\gamma} = Re \tag{175}$$

$$1/\rho\nabla p/\frac{dv}{dt} \sim \frac{p}{\rho u^2} = \frac{\Delta pd}{\rho u^2 l} \tag{176}$$

Použitie týchto pozorovaní:

- ustálené tečenia s identickým Reynoldsovým číslom Re sú si podobné.
- tečenie v trubici dalo
$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho u^2 \frac{l}{d}\lambda, \quad \lambda = \frac{64}{Re}$$
- experimentálne porozovania pre turbulentné prúdenia
$$\lambda = \lambda(Re)$$
- ... t.j. centrálna je závislosť λ od Re. Kvalitatívna zmena v tejto závislosti - kritické Reynoldsovo číslo (500-20000) - prechod od laminárneho (stáva sa nestabilným) k turbulentnému prúdeniu.

$$\ln\lambda(Re) = \begin{cases} -\ln Re + \ln 64, & Re < Re_c \\ -\frac{1}{4}\ln Re + \ln 0.3164 & Re > Re_c \end{cases} \tag{177}$$

Poznámka: Hodnota kritického Reynoldsovho čísla, R_c, závisí od konkrétnej geometrie problému.

3.5 Rovnica vedenia tepla

V tuhej látke je $\rho(\vec{r},t) = const$, t.j.

$$u(\vec{r},t) \quad : \quad U_\Omega = \int_\Omega d^3 r \rho u(\vec{r},t) \tag{178}$$
$$\Delta u(\vec{r},t) = c\Delta T \tag{179}$$
$$\frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dQ}{dt} \tag{180}$$

kde c je špecifická tepelná kapacita a zaviedli sme teplotné pole $T(\vec{r},t)$, čo zodpovedá teplote telesa v mieste $\vec{r}$ a čase t. Ak nekonáme nad telesom prácu, $dW/dt = 0$. Pre teplo dodané do oblasti Ω

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3 r \dot{q}(\vec{r},t) - \int d\vec{S}\cdot\vec{j}_Q, \tag{181}$$

kde $\vec{j}_Q$ je vektorové pole tepelného toku, z čoho nájdeme rovnicu kontinuity pre vnútornú energiu

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}(\vec{r},t) - \nabla\cdot\vec{j}_Q. \tag{182}$$

kde $\dot{q}$ predstavujú zdroje tepla (napr. ohmické straty).

Fourierov zákon (empirický):

$$\vec{j}_Q = -k_Q \nabla T(\vec{r},t) \tag{183}$$

kde k_Q je tepelná vodivosť, môže závisieť od teploty, ale typicky len málo. Pre predstavu je v tabuľke pár najdôležitejších príkladov.

Materiál	ρ [g/cm^3]	M$_m$ [g/mol]	c [J/mol/K)]	k$_Q$ [W/m/K]
Au	19.3	196.96	25.418	318
Cu	8.96	63.55	24.44	401
Al	2.7	26.98	24.2	237
Si	2.32	28.08	19.789	149

Reprezentatívne termofyzikálne parametre vybraných elektronických materiálov

Kombináciou Fourierovho zákonu a rovnice kontinuity pre vnútornú energiu

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}(\vec{r},t) - \nabla \cdot k_Q \nabla T \tag{184}$$

Ak je K_Q dostatočne nezávislé od miesta (aj teploty) potom máme

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}(\vec{r},t) - k_Q \Delta T \tag{185}$$

Okrajové podmienky
Podľa fyzikálnej situácie, ale napr.:

- Dirichletove, $T(\vec{r},t) = T_0$ pre $\vec{r}$ na okraji materiálu, t.j. v kontakte s telesom s obrovskou tepelnou kapacitou (rezervoár).
- von Neumanove, $\nabla T(\vec{r},t) \cdot d\vec{S} = 0$ na okraji, t.j. v kontakte s perfektným izolantom.
- nenulové von Neumanove, odvádzanie tepla **konvekciou** (vzduch, kvapalina) $\vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = dSh_Q \Delta T$ kde h_Q je koeficient konvekcie pre dané rozhranie, závisí od typu prúdenia, teploty, tlaku,... no aspoň orientačne typické hodnoty sú [2]

Mechanizmus	h_Q [W/m/K]
stojaci vzduch	1 - 20
prúdiaci vzduch	10 - 100
prúdiacia voda	100 - 6000
vriacia voda	1000 - 10000
kondenzujúca vodná para	2000 - 40 000

- Strata tepla **tepelným žiarením** (Stefan-Boltzmanov zákon)

$$\vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = dS\sigma(T^4 - T_0^4), \sigma = 5.6704 \times 10^{-8} \text{ kg s}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

  na okraji materiálu.

- Kombinácia posledných dvoch.