pokračovanie z predchádzajúceho týždňa

Ešte som zabudol:

- Pre rotácie okolo vybranej osi vieme nájsť veľmi ľahko ich inverzné zobrazenia:

$$\vec{p}' = \mathscr{O}^{\phi,3}[\vec{p}] \quad (18)$$
$$\vec{p} = \mathscr{O}^{-\phi,3}[\vec{p}'] \quad (19)$$

- z už známeho vzťahu

$$R_{ij} = \mathscr{O}[\vec{e}_j] \cdot \vec{e}_i \quad (20)$$

  a

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

  platí tiež

$$\mathscr{O}[\vec{e}_j] = \sum_n R_{nj}\vec{e}_n = R_{nj}\vec{e}_n$$

  (sumačná konvencia!!!), čo budeme veľmi veľa krát využívať!

Najčastejšie konvencie pre uhly natočenia

Nech sústava O' s bázou vektorov $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ je natočená pomocou sérií rotácií vzhľadom na nehybnú sústavu O s bázou $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Sústava O' môže byť natočená ľubovoľne. Jej orientácia bude jednoznačne daná 3 uhlami ϕ, θ, ψ, tzv. *Eulerovými*, ktoré nám povedia, akými rotáciami dokážeme zorientovať sústavu O do O'. Sú viaceré konvencie, začneme s *zxz*.

1. Rotácia okolo e_3 o uhol ϕ tak aby e_1 ležal v rovine f_1, f_2
2. Rotácia okolo nového e_1 o θ tak aby nový e_2 tiež ležal v rovine f_1, f_2, alebo, čo je tomu ekvivalentné, aby e_3 bol paralelný s f_3.
3. Rotácia okolo nového $e_3 = f_3$ o ψ tak aby $e_1 = f_1$ a $e_2 = f_2$.

Z tohto je asi zrejmé, aká konvencia je *zyz*. V technických aplikáciach (roboty, lietadlá, satelity) sa ešte zvykne používať aj konvencia "Roll-Pitch-Yaw"(*xyz*) ktorá predstavuje zorientovanie špicu pôvodne v smere x (Yaw) otočením okolo z, nastavením stúpania (Pitch) otočením okolo novej osi y a nakoniec pootočenie okolo osi lietadla (roll) okolo novej osi x.

Vektor uhlovej rýchlosti pre gyroskop v sústave pevne spojenej s gyroskopom.

Výsledná transformácia je súčin za sebou nasledujúcich rotácii, čo si teraz podrobne vysvetlíme na príklade zotrvačníka a Eulerových uhlov *zyz* (obr.)

Celkovo:

$$\vec{f}_i = \mathscr{T}^{\phi,\theta,\psi}[\vec{e}_i] \quad (21)$$

Po častiach:

$$\vec{e}_i' = \mathscr{O}^{\phi,3}[\vec{e}_i] = \sum_j R_{ji}^{\phi,3}\vec{e}_j = R_{ji}^{\phi,3}\vec{e}_j \quad (22)$$
$$\vec{e}_i'' = \mathscr{O}^{\theta,2}[\vec{e}_i'] = \ldots \quad (23)$$
$$\vec{f}_i = \mathscr{O}^{\psi,3}[\vec{e}_i''] \quad (24)$$

Je dôležité si uvedomiť že v rôznych riadkoch ide o rotácie okolo rôznych osí "3" a "3". Analogicky máme aj inverzné vzťahy:

$$\begin{aligned}\vec{e}_i &= \mathscr{O}^{-\phi,3}[\vec{e}_i'] &(25)\\ \vec{e}_i' &= \mathscr{O}^{-\theta,2}[\vec{e}_i''] &(26)\\ \vec{e}_i'' &= \mathscr{O}^{-\psi,3}[\vec{f}_i] &(27)\end{aligned}$$

Pre štúdium dynamiky nás bude zaujímať aké súradnice má vektor $\vec{\dot\phi}$, paralelný s $\vec{e}_3$ v O'. Hľadajme teda všeobecnejšie súradnice hociktorého $\vec{e}_i$, môžeme nájsť pomocou skalárneho súčinu:

$$\begin{aligned}\vec{e}_i\cdot\vec{f}_j &= \mathscr{O}^{-\phi,3}[\vec{e}_i']\cdot\vec{f}_j &(28)\\ &= R_{ki}^{-\phi,3}\vec{e}_k'\cdot\vec{f}_j &(29)\\ &= R_{ki}^{-\phi,3}R_{lk}^{-\theta,2}\vec{e}_l''\cdot\vec{f}_j &(30)\\ &= R_{ki}^{-\phi,3}R_{lk}^{-\theta,2}R_{ml}^{-\psi,3}\vec{f}_m\cdot\vec{f}_j &(31)\\ &= R_{ki}^{-\phi,3}R_{lk}^{-\theta,2}R_{jl}^{-\psi,3} &(32)\\ &= \sum_{lk}R_{jl}^{-\psi,3}R_{lk}^{-\theta,2}R_{ki}^{-\phi,3} &(33)\end{aligned}$$

Posledný výraz daný ako maticové násobenie je

$$\begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0\\ -s\psi & c\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta\\ 0 & 1 & 0\\ s\theta & 0 & c\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0\\ -s\phi & c\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (34)$$

Teda, môžeme vyjadriť vektor $\vec{\dot\phi}$ v báze $\vec{f}_i$:

$$\vec{\dot\phi} = -c\psi s\theta\dot\phi\,\vec{f}_1 + s\psi s\theta\dot\phi\,\vec{f}_2 + c\theta\dot\phi\,\vec{f}_3 \qquad (35)$$

alebo pre vektor $\vec{\dot\theta} = \dot\theta\vec{e}_2'$

$$\begin{aligned}\vec{e}_2'\cdot\vec{f}_j &= \sum_l R_{jl}^{-\psi,3}R_{l2}^{-\theta,2} &(36)\\ \vec{\dot\theta} &= s\psi\dot\theta\vec{f}_1 + c\psi\dot\theta\vec{f}_2. &(37)\end{aligned}$$

Nakoniec napíšme vektor zodpovedajúci otáčaniu okolo uhla ψ čo je jednoducho

$$\vec{\dot\psi} = \dot\psi\vec{f}_3. \qquad (38)$$

Celková uhlová rýchlosť otáčajúceho sa telesa pri zmene Eulerových uhlov bude potom

$$\vec{\omega} = \vec{\dot\phi} + \vec{\dot\theta} + \vec{\dot\psi} \qquad (39)$$

alebo pomocou výsledkov (38,37,38)

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -c\psi s\theta\dot\phi + s\psi\dot\theta &(40)\\ \omega_2 &= s\psi s\theta\dot\phi + c\psi\dot\theta &(41)\\ \omega_3 &= c\theta\dot\phi + \dot\psi. &(42)\end{aligned}$$

Eulerove pohybové rovnice gyroskopu: otáčanie okolo fixovaného bodu

Uvažujme prípad otáčania telesa okolo jedného fixovaného bodu, rôzneho od ťažiska (aby gravitačné sily spôsobili nenulový moment síl). Potom inerciálny člen v 2. pohybovej rovnici i.t.t. (7) môžeme potom napísať v sústave pevne spojenej s i.t.t. a orientovanej tak, že tenzor zotrvačnosti je v nej diagonálny, v tvare

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_i \vec{f}_i I_{ii}\omega_i\Big) = \sum_j D_j \vec{f}_j \tag{43}$$

Pretože jednotkové vektory $\vec{f}_i$ sa otáčajú, platí pre ne

$$\frac{d}{dt}\vec{f}_i = \vec{\omega}\times\vec{f}_i$$

čo vedie na

$$\sum_i \left(\vec{f}_i I_{ii}\dot{\omega}_i + \vec{\omega}\times\vec{f}_i I_{ii}\omega_i\right) = \sum_j D_j \vec{f}_j \tag{44}$$

prenásobením postupne skalárne s $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ dostaneme 3 Eulerove pohybové rovnice otáčajúceho sa i.t.t.

$$I_{11}\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) = D_1 \tag{45}$$
$$I_{22}\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I_1 - I_3) = D_2 \tag{46}$$
$$I_{33}\dot{\omega}_3 + \omega_3\omega_1(I_1 - I_3) = D_3 \tag{47}$$

t.j. systém troch *nelineárnych* diferenciálnych rovníc ktoré musíme riešiť spolu s tromi *nelineárnymi* diferenciálnymi rovnicami pre Eulerove uhly popisujúce orientáciu i.t.t., (40), (41) a (42). Toto predstavuje druhý systém 6 nelineárnych diferenciálnych rovníc. Táto cesta je v jednoduchých prípadoch užitočná, ale vidíme že musíme najprv nájsť $\omega_i(t)$, t.j. spočítať funkcie, ktoré vlastne nepotrebujeme. Naviac, čím z viacerých i.t.t. sa bude robot či manipulátor skladať, tým viac nepotrebných funkcií musíme spočítať. Tento problém obchádza prístup pomocou Lagrangeových rovníc ku ktorému sa čoskoro dostaneme, a v rámci ktorého sformulujeme aj pohybové rovnice gyroskopu a pár manipulátorov.
Kontrolná otázka: Aké zložky má moment gravitačnej sily D_i? Pomôcka: $\vec{D} = mg\vec{f}_3\times\vec{e}_3$

2.4 Energia a práca v dynamike systému i.t.t

- Ak pôsobíme viacerými silami, potom práca ktorú vykonáme bude daná pôsobením súčtu týchto síl v ťažisku, $\vec{F}_e$, a jednou výslednou dvojicou síl $\vec{\vec{D}}$ (Redukcia síl). Práca potom bude[2]

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\vec{F}_e\cdot\vec{V}^* + \vec{\vec{D}}\cdot\vec{\omega}\right) \tag{48}$$

  čo sa dá upraviť na

$$W = \left[\frac{1}{2}M|\vec{V}^*|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega}\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{t_1}^{t_2}\vec{\vec{D}}\cdot d\vec{\omega} \tag{49}$$

[2]Prácu v dôsledku otáčania získame takto: ak sila $\vec{F}_D$ pôsobí v bode $\vec{r}$ vzhľadom na bod na osi otáčania, potom

$$\int \vec{F}_D\cdot d\vec{s} = \int \vec{F}_D\cdot(d\vec{\phi}\times\vec{r}) = \int d\vec{\phi}\cdot(\vec{r}\times\vec{F}_D) = \int \vec{D}\cdot d\vec{\phi}$$