

## Laboratórna úloha č. 10

### Zrážka dvoch telies

- 
- Úlohy:** A Overiť zachovanie energie a hybnosti pri pružnej zrážke  
B Overiť zachovanie hybnosti pri nepružnej zrážke  
C Zmerať koeficient trenia
- 

#### Teoretický úvod

**Zákon zachovania energie.** Zákon zachovania energie predstavuje jeden z najznámejších fyzikálnych zákonov. V mechanike sa často stretávame so situáciami, keď sa zachováva dokonca len istá, špecifická časť energie, napríklad celková kinetická energia telies, či celkový súčet kinetickej a potenciálnej energie týchto telies. Súčet kinetickej a potenciálnej energie nazývame *mechanická energia*,

$$E_m = \sum_{i=1}^N E_{k,i} + U \quad (1)$$

kde  $E_{k,i} = (1/2)mv_i^2$  je kinetická energia  $i$ -teho telesa,  $m_i$  je jeho hmotnosť a  $v_i$  veľkosť jeho rýchlosti.  $U$  je celková potenciálna energia  $N$  telies, t. j. práca, ktorú musíme vykonať aby sme týchto  $N$  telies dostali do uvažovaného rozloženia v priestore.

Zákon zachovania mechanickej energie môžeme v tomto prípade sformulovať ako rovnicu

$$E_m(t') - E_m(t) = 0 \quad (2)$$

kde  $t$  a  $t'$  sú dva ľubovoľné okamihy času. Sú však situácie, keď sa mechanická energia nezachováva, pretože sa jej časť premieňa na inú formu, napr. mechanickú deformáciu alebo teplo. V takomto prípade môžeme písať

$$\Delta E_m = E_m(t') - E_m(t) = \sum_i \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \quad (3)$$

kde  $\Delta E_m$  predstavuje zmenu mechanickej energie, ktorú možno vyjadriť pomocou celkovej práce konanej vonkajšími silami  $\vec{F}_i$  na uvažovaných telesách.

**Zákon zachovania hybnosti sústavy telies.** Hybnosť,  $\vec{p} = m\vec{v}$ , je fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje pohybový stav látky. Ak na sústavu  $N$  telies nepôsobia žiadne vonkajšie sily, jej celková hybnosť, t. j. veličina  $\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$ , sa v čase nemení, zachováva sa. Vtedy hovoríme o zákone zachovania hybnosti, ktorý môžeme zapísať rovnicou

$$\vec{p}(t') - \vec{p}(t) = \vec{0} \quad (4)$$

Naopak, ak na sústavu pôsobí vonkajšia sila  $\vec{F}$ , potom sa celková hybnosť nezachováva a pre jej zmenu (čo vo všeobecnosti môže byť úbytok, nárast alebo zmena smeru) platí vzťah

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t') - \vec{p}(t) = \int_t^{t'} \vec{F} d\tau \quad (5)$$

**Pružná a nepružná zrážka dvoch telies.** Uvedené dva zákony možno demonštrovať pomocou zrážky dvoch telies (vozíkov) pohybujúcich sa po priamočiarej vodorovnej dráhe s čo najmenším trením. Hybnosť a energiu pred a po zrážke možno určiť vhodným meraním rýchlostí vozíkov. Pri *pružnej zrážke* sa mechanická energia nemení. Pri typických zrážkových situáciách sa potenciálna energia pred a po zrážke tiež nemení (zrážajúce sa vozíky ostávajú v tej istej výške v gravitačnom poli), a preto sa pre takúto pružnú zrážku zachováva samostatne celková kinetická energia. Navyiac, druhé teleso môže byť pred zrážkou v pokoji, a preto jeho kinetická energia bude na začiatku nulová. V takomto prípade bude platiť:

$$\Delta E_k = \left[ \frac{1}{2} m_1 v_1^2(t') + \frac{1}{2} m_2 v_2^2(t') \right] - \frac{1}{2} m_1 v_1^2(t) = 0 \quad (6)$$

Pri *nepružnej zrážke* sa celková kinetická energia zmení. V prípade dokonale nepružnej zrážky ostávajú obe telesá po zrážke spojené a ich rýchlosti rovnaké. V dokonale nepružnej zrážke sa stratí najviac z celkovej kinetickej energie. Pre túto stratu bude platiť

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_1^2(t') - \frac{1}{2} m_1 v_1^2(t) < 0 \quad (7)$$

Pri zrážke dvoch telies pohybujúcich sa po vodorovnej podložke bez trenia na tieto telesá nepôsobia žiadne vonkajšie sily, a preto pri pružnej aj nepružnej zrážke očakávame, že bude platiť zákon zachovania celkovej hybnosti,

$$[m_1 v_1(t') + m_2 v_2(t')] - m_1 v_1(t) = 0 \quad (8)$$

Majme na pamäti, že symboly  $v_1$ ,  $v_2$  v kontexte tejto úlohy predstavujú priemety vektorov rýchlostí  $\vec{v}_1$  a  $\vec{v}_2$  do smeru pohybu, a preto môžu byť aj záporné.

**Vplyv trecích síl na zrážku dvoch telies.** V skutočnosti nie je pohyb telies po dráhe úplne bez trenia. Na každé z telies pôsobí sila trenia  $\vec{F}_t$ , pre ktorej veľkosť platí empirický vzťah

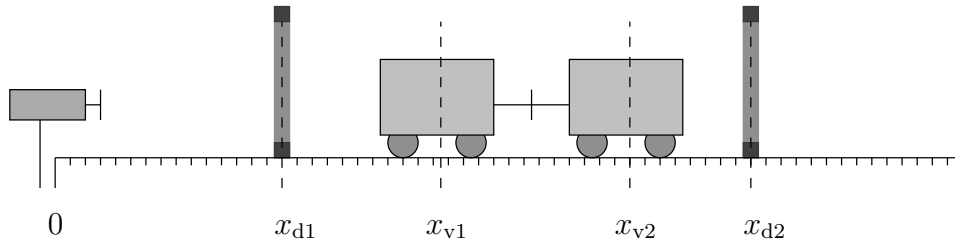
$$F_t = \mu mg \quad (9)$$

kde  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  je tiažové zrýchlenie,  $m$  hmotnosť vozíka a  $\mu$  koeficient trenia<sup>1</sup>.

Vplyvom trecej sily bude rýchlosť každého z vozíkov rovnomerne klesať,

$$v(t') = v(t) - \mu g(t' - t) \quad (10)$$

<sup>1</sup>Do trecej sily budeme zahŕňať jednak šmykovú treciu silu a aj valivú odporovú silu. V danom experimentálnom zariadení dochádza ku šmykovému treniu najmä v ložiskách vozíkov. Valivý odpor zasa pôsobí priamo prostredníctvom dotyku kolies vozíkov a podložky.



Obr. 1: Súradnice detektorov a vozíkov v okamihu zrážky. Súradnica vozíka 2 v okamihu zrážky je daná jeho počiatočnou polohou, súradnicu vozíka 1 v okamihu zrážky nájdeme jeho priložením k vozíku 2.

Meraním poklesu rýchlosti a k nemu zodpovedajúcemu intervalu času  $t' - t$  možno určiť koeficient trenia,

$$\mu = \frac{1}{g} \frac{v(t) - v(t')}{t' - t} \quad (11)$$

Ak uvážime pôsobenie trecej sily na telesá, potom rovnicu opisujúcu zmenu celkovej hybnosti (5) je potrebné upraviť do tvaru

$$\Delta p_t = p(t') - p(t) = -F_{t1} \tau_1 \pm F_{t1} \tau_1' - F_{t2} \tau_2' \quad (12)$$

kde  $F_{ti}$  je veľkosť trecej sily pôsobiacej na  $i$ -te teleso a  $\tau_i$  časový interval pôsobenia nenulovej trecej sily na toto teleso pred zrážkou (bez čiarky) alebo po nej (s čiarkou). Znamienko pri člene zodpovedajúcom poklesu hybnosti prvého vozíka po zrážke je kladné, ak je rýchlosť tohto vozíka po zrážke záporná (ak sa prvý vozík od druhého odrazí).

Podobne, zmenu kinetickej energie možno vyjadriť pomocou práce konanej proti trecím silám (3),

$$\Delta E_k = -W_t - W, \quad W_t = F_{t1} (s_1 + s_1') + F_{t2} s_2' \quad (13)$$

kde  $W_t$  je práca konaná proti trecím silám,  $s_1$  je dráha prejdená prvým vozíkom od ľavého detektora (okamih merania jeho vstupnej rýchlosti) po zrážku,  $s_1'$  je dráha prvého vozíka od zrážky po okamih určenia jeho výstupnej rýchlosti (jeho prechod ľavým alebo pravým detektorom, v závislosti od typu zrážky), a  $s_2'$  je dráha prejdená druhým vozíkom od zrážky po jeho prechod pravým detektorom (okamih merania jeho výstupnej rýchlosti).  $W$  predstavuje úbytok energie v dôsledku samotnej zrážky (deformácia, teplo).

## Metódy meraní a princípy vyhodnotenia

**Upozornenie:** Kolieska vozíkov sú veľmi tenké, aby sa dosiahlo minimálne trenie. Neopatrná manipulácia s vozíkmi môže viesť k ich poškodeniu a k znehodnoteniu úlohy. V prípade potreby uloženia vozíka mimo dráhy ich kladte na ich bočnú stranu.

Overovanie zákona zachovania celkovej hybnosti a mechanickej energie zrealizujeme pomocou zrážok dvoch vozíkov na vodorovnej dráhe s veľmi malým trením (obr. 1). Prvý vozík uvedie do pohybu štartovací náraz, kým druhý bude na začiatku v pokoji.

Pri meraniach pružnej i nepružnej zrážky budeme používať vozíky s hmotnosťami  $m_1$  a  $m_2$ . Rýchlosť vozíkov je meraná pomocou plechových tienidiel uchytených na vozíkoch. Tienidlá prerušia signál fotodetektora, pričom čas prerušenia  $\Delta t$  meraný digitálnymi stopkami a dĺžka tienidla  $\ell$  určia rýchlosť vozíka v danom momente:

$$v = \frac{\ell}{\Delta t} \quad (14)$$

V prípade merania zrážky umiestňujeme detektory čo najbližšie k sebe, ale tak, aby sa celá zrážka udiala medzi oboma detektormi (t. j. ich vzdialenosť od seba musí byť minimálne dvojnásobkom dĺžky vozíka s nárazníkmi). Naopak, v prípade merania koeficientu trenia umiestnime detektory čo najďalej od seba.

## Postup práce

### Meranie pružnej zrážky

Konkrétnym cieľom tejto časti meraní je zistiť, s akou presnosťou sa zachováva hybnosť a mechanická energia pri zrážke, ktorú pokladáme za približne pružnú.

- 1.) Na prvý vozík upevníme nárazník s plochým zakončením a tienidlo. Na druhý vozík upevníme nárazník s gumičkou a tienidlo. Určíme hmotnosti oboch vozíkov  $m_1$  a  $m_2$  ( $m_2$  môže zahŕňať aj prídavné závažie 200 až 400 g) a následne ich položíme opatrne na dráhu. Hmotnosti zapíšeme do hlavičky tabuľky 1.
- 2.) Pozície detektorov  $x_{d1}$ ,  $x_{d2}$  a približné polohy stredov vozíkov v momente zrážky,  $x_{v1}$  a  $x_{v2}$  (pozri obr. 1) si zaznačíme do hlavičky tabuľky 1.
- 3.) Na meracom zariadení nastavíme mód zrážok 6: svieti kontrolka pri móde označenom šípkami doľava a doprava. Na displeji 1 bude zobrazený čas  $\Delta t_1$  prechodu tienidla vozíka 1 pred zrážkou meraný detektorom 1. Na displeji 2 bude zobrazený čas  $\Delta t'_1$  prechodu tienidla vozíka 1 po zrážke meraný detektorom 1. Druhý detektor bude na displeji 3 udávať čas  $\Delta t'_2$  prechodu tienidla vozíka 2 po zrážke.
- 4.) Pružinu štartéra zatlačíme na vybraný stupeň, ktorý zapíšeme do tabuľky 1 a priložíme prvý vozík k štartovaciemu zariadeniu.
- 5.) Spustíme vozík a namerané hodnoty času  $\Delta t_1$  (1. displej, prechod tienidla vozíka 1 detektorom 1 pred zrážkou),  $\Delta t'_1$  (2. displej, prechod tienidla vozíka 1 detektorom 1 po zrážke<sup>2</sup>) a doby  $\Delta t'_2$  (3. displej, prechod tienidla vozíka 2 po zrážke) zapisujeme do tabuľky 1.
- 6.) Meranie niekoľkokrát opakujeme. Určíme strednú hodnotu hybností a mechanických energií pred zrážkou a ich rozdielu pred a po zrážke.

<sup>2</sup>Pre vozíky s blízkymi hmotnosťami tento čas nemerame, lebo vozík 1 po náraze ostane stáť:  $v'_1 = 0$ .

### Meranie nepružnej zrážky

Konkrétnym cieľom tejto časti meraní je zistiť, s akou presnosťou sa zachováva hybnosť pri úplne nepružnej zrážke a aká časť mechanickej energie sa pri takejto zrážke zmení na iné formy energie.

7.) Na prvý vozík upevníme nárazník s ihlou (počas nepoužívania chránenou korkovou násadkou) a na druhý vozík upevníme konektor (nárazník) s plastelínou. Na opačnú stranu druhého vozíka upevníme nárazník s gumičkou z toho dôvodu, aby vozík na konci dráhy nenarážal príliš tvrdo. Hmotnosti, polohy detektorov a polohy vozíkov v momente zrážky necháme rovnaké ako v predchádzajúcom meraní pružnej zrážky a zapíšeme ich do hlavičky tabuľky 2.

8.) Na stopkách nastavíme mód 6.

9.) Pružinu štartéra zatlačíme na vybraný stupeň, ktorý zapíšeme do tabuľky 2 a priložíme prvý vozík k štartovaciemu zariadeniu.

10.) Spustíme vozík a namerané hodnoty  $\Delta t_1$  z displeja 1 a  $\Delta t'_2$  z displeja 3 zapisujeme do tabuľky 2. (V tomto prípade je rýchlosť vozíka 1 po zrážke totožná s rýchlosťou vozíka 2 po zrážke, lebo oba sú pevne spojené. 4. displej udáva čas  $\Delta t'_1$  prechodu pripojeného vozíka 1 cez detektor 2, ktorý je väčší ako čas  $\Delta t'_2$  v dôsledku pôsobenia trecích síl.)

11.) Určíme strednú hodnotu hybností a energií pred zrážkou a ich rozdielu pred a po zrážke.

### Meranie koeficientu trenia

Konkrétnym cieľom tejto časti meraní je nájsť efektívnu hodnotu koeficientu trenia medzi vozíkom a podložkou.

12.) Pri tomto meraní umiestnime detektory čo najďalej od seba, aby čas prechodu vozíka medzi nimi bol oveľa väčší ako čas prechodu vozíka detektorom.

13.) Na vozík upevníme tienidlo a zaťažíme ho vybraným prídavným závažím, hmotnosť ktorého zapíšeme do jednej z tabuliek v príslušnej časti protokolu. Zapíšeme aj celkovú hmotnosť vozíka. Vozík umiestnime na dráhu. (Meranie sa uskutočňuje len s jedným vozíkom).

14.) Na digitálnych stopkách nastavíme mód 5 (meranie času a okamžitej rýchlosti).

15.) Pružinu štartéra zatlačíme na zvolený stupeň, ktorý uvedieme do tabuľky, a opatrne priložíme vozík k štartovaciemu zariadeniu.

16.) Spustíme štartovacie zariadenie, odčítame potrebné údaje:  $\Delta t_1$  z 2. displeja a  $\Delta t'_1$  zo 4. displeja pre určenie rýchlostí vozíka v dvoch rôznych časoch a  $t$  z 3. displeja pre určenie časového intervalu medzi týmito dvoma meraniami.

17.) Meranie opakujeme aj pre inú počiatočnú rýchlosť, resp. vozík s priloženou hmotnosťou.

## Vyhodnotenie a presnosť merania

Pre zhodnotenie platnosti zákonov zachovania uvážime vplyv trecích síl. Postupujeme pomocou vzťahov (12), (13). Veľkosť trecej sily určíme z merania koeficientu trenia. Časy  $\tau_1$ ,  $\tau'_1$  a  $\tau'_2$ , počas ktorých pôsobili trecie sily na prvý a druhý vozík, určíme z ich rýchlostí a dráh:

$$\tau_1 = s_1/v_1, \quad \text{kde} \quad s_1 = |x_{v1} - x_{d1}| \quad (15)$$

$$\tau'_2 = s'_2/v'_2, \quad \text{kde} \quad s'_2 = |x_{d2} - x_{v2}| \quad (16)$$

$$\tau'_1 = s'_1/v'_1, \quad \text{kde} \quad s'_1 = \begin{cases} |x_{d1} - x_{v1}| & \text{pri spätnom odraze} \\ s'_2 & \text{pri nepružnej zrážke} \end{cases} \quad (17)$$

$x_{d1}$  a  $x_{d2}$  sú súradnice polôh detektorov,  $x_{v1}$  a  $x_{v2}$  sú polohy vozíkov v okamihu zrážky (pozri obr. 1).

Meno:

Krúžok:

Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 10

## Zrážka dvoch telies

Stručný opis metódy merania

Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní

Prístroje a pomôcky

**Záznam merania, výpočty a výsledky**

Pokiaľ to nevyznačíte inak, hodnoty veličín zapisujte pomocou jednotiek **cm**, **g**, **s**. Merané údaje nezaokrúhľujte. Hodnoty  $\Delta E_k$  a väčšinou aj  $\Delta p$  by mali vychádzať *záporné*; pozri napr. rovnicu (7).

Dĺžka tienidla:  $\ell =$                       cm

**(A) Pružná zrážka**

Tabuľka 1:

$m_1 =$		g,		$m_2 =$		g;		stupeň stlačenia:							
$x_{d1} =$		cm,		$x_{d2} =$		cm,		$x_{v1} =$		cm,		$x_{v2} =$		cm	
$i$	$\Delta t_1$	$\Delta t'_1$	$\Delta t'_2$	$p$	$p'$	$\Delta p$	$E_k$	$E'_k$	$\Delta E_k$						
1															
2															
3															
4															

Vzorový výpočet:

Priemerná hybnosť pred zrážkou:  $p =$

Priemerná energia pred zrážkou:  $E_k =$

Priemerná zmena hybnosti:  $\Delta p =$

Priemerná zmena energie:  $\Delta E_k =$

Relatívna zmena hybnosti:  $\Delta p/p =$

Relatívna zmena energie:  $\Delta E_k/E_k =$



**(B) Nepružná zrážka**

Tabuľka 2:

$m_1 =$		g,		$m_2 =$		g;		stupeň stlačenia:	
$x_{d1} =$		cm,		$x_{d2} =$		cm,		$x_{v1} =$	
								cm	
$i$	$\Delta t_1$	$\Delta t'_2$	$\Delta t'_1$	$p$	$p'$	$\Delta p$	$E_k$	$E'_k$	$\Delta E_k$
1									
2									
3									
4									

Vzorový výpočet:

Priemerná hybnosť pred zrážkou:  $p =$ Priemerná energia pred zrážkou:  $E_k =$ Priemerná zmena hybnosti:  $\Delta p =$ Priemerná zmena energie:  $\Delta E_k =$ Relatívna zmena hybnosti:  $\Delta p/p =$ Relatívna zmena energie:  $\Delta E_k/E_k =$

**(C) Určenie koeficientu trenia**

$x_{d1} =$                       cm;                       $x_{d2} =$                       cm

Tabuľka 3:

$m =$		g		stupeň stlačenia:		$\bar{\mu} =$
$i$	$\Delta t_1$	$t$	$\Delta t'_1$	$v_1$	$v'_1$	$\mu$
1						
2						
3						
4						

Tabuľka 4:

$m =$		g		stupeň stlačenia:		$\bar{\mu} =$
$i$	$\Delta t_1$	$t$	$\Delta t'_1$	$v_1$	$v'_1$	$\mu$
1						
2						
3						
4						

Tabuľka 5:

$m =$		g		stupeň stlačenia:		$\bar{\mu} =$
$i$	$\Delta t_1$	$t$	$\Delta t'_1$	$v_1$	$v'_1$	$\mu$
1						
2						
3						
4						

Vzorový výpočet:

### Úbytok hybnosti v dôsledku trenia pri pružnej zrážke

Hodnoty  $v_1, v'_1, v'_2, \Delta p$  a  $\Delta E_k$  sú z merania  $i = \dots$  z tabuľky 1.

Použitá hodnota koeficientu trenia je  $\mu = \dots$ .

Tabuľka 6: Veličiny potrebné pre odhad úbytku hybnosti a práce trecích síl pri pružnej zrážke. (Zapisujte aj s jednotkami.)

$s_1 =$	$s'_1 =$	$s'_2 =$
$v_1 =$	$v'_1 =$	$v'_2 =$
$\tau_1 =$	$\tau'_1 =$	$\tau'_2 =$
$F_{t1} =$		$F_{t2} =$
$\Delta p_t =$		$\Delta p =$
$W_t =$		$\Delta E_k =$

Miesto pre ďalšie poznámky

## Zhodnotenie výsledkov

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta:

Hodnotenie a podpis učiteľa: