

Laboratórna úloha č. 9

Adiabatický koeficient vzduchu

Úloha: Určiť adiabatický koeficient vzduchu Clémentovou – Desormesovou metódou.

Teoretický úvod

Pri prijímaní tepla telesom od okolia jeho teplota rastie. Na opis tohto javu sa zaviedla fyzikálna veličina *tepelná kapacita* definovaná vzťahom

$$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad (1)$$

kde ΔQ je množstvo prijatého tepla a ΔT je zmena teploty telesa. Takto definovaná veličina je vlastnosťou skúmaného telesa, ale závisí aj od spôsobu, akým je teplo prijímané, teda od procesu prijímania tepla. Napríklad ak sústava (tuhé teleso, kvapalina alebo plyn v nádobe) pri zohrievaní zväčšuje svoj objem, koná pritom prácu na okolitých telesách. Časť prijímaného tepla sa spotrebuje na konanie práce a tak na zohriatie sústavy o jeden stupeň treba dodať viac tepla, ako keď sa jej objem nemení.

Ukazuje sa ako užitočné merať tepelné kapacity pre dva špeciálne procesy:

- Pre izochorický (prijímanie tepla pri stálom objeme), C_V .
- Pre izobarický (prijímanie tepla pri stálom tlaku), C_p .

Pre ideálny (dostatočne zriedený) plyn platí tzv. *Mayerov vzťah*

$$C_p - C_V = nR \quad (2)$$

kde n je množstvo plynu v moloch (látkové množstvo) a R je molová plynová konštanta.

Pomer týchto dvoch tepelných kapacít voláme *adiabatický koeficient* alebo aj *Poissonova konštanta*:

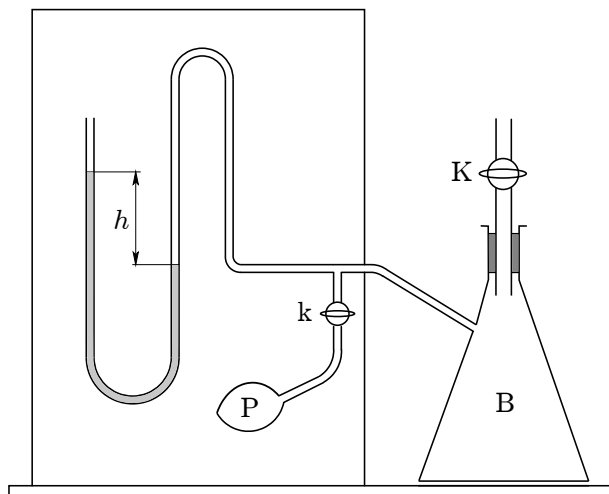
$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} \quad (3)$$

Názov parametra κ pochádza z jeho prítomnosti v rovnici opisujúcej adiabatický proces pre ideálny plyn:

$$pV^\kappa = \text{konšt.} \quad (4)$$

Na druhej strane, z pohľadu mikroskopického, z kinetickej teórie plynov vieme, že tepelná kapacita pri stálom objeme súvisí so štruktúrou molekúl tvoriacich plyn:

$$C_V = \frac{i}{2} nR \quad (5)$$



kde i je počet stupňov voľnosti molekuly plynu, t.j. počet nezávislých údajov (súradníc), potrebných na určenie polohy molekuly v priestore. Pre jednoatómovú molekulu je $i = 3$, pre dvojátomovú $i = 5$ a pre viacatómové molekuly $i = 6$.

Dosadením vzťahu (5) do (2) dostaneme obdobné vyjadrenie pre tepelnú kapacitu pri stálom tlaku

$$C_p = \frac{i+2}{2} nR, \quad (6)$$

Potom adiabatický koeficient ideálneho plynu je určený štruktúrou molekúl plynu – počtom stupňov voľnosti i :

$$\kappa = \frac{i+2}{i} \quad (7)$$

a znalosť adiabatického koeficientu plynu nám dáva informáciu o štruktúre molekúl plynu:

$$i = \frac{2}{\kappa - 1} \quad (8)$$

V prípade vzduchu možno očakávať hodnotu $i \approx 5$, lebo vzduch je zmesou plynov pozostávajúcich prevažne z dvojátomových molekúl (N_2 , O_2).

Metóda merania a aparátúra

Hodnotu adiabatického koeficientu κ nemožno určiť priamo z definičného vzťahu (3), lebo tepelnú kapacitu C_V nevieme zmerať kalorimetricky s dostatočnou presnosťou. Na meranie koeficientu κ sa preto používajú rôzne nepriame metódy.

Jednoduchú metódu založenú na adiabetickej expanzii plynu navrhli Clément a Desormes v roku 1819. Ich prístroj pozostáva z väčšej sklenenej banky **B**, ku ktorej je pripojený otvorený manometer naplnený zafarbenou vodou. Kohútikom **k** možno do banky priviesť skúmaný plyn, kohútom **K** so širokým otvorom možno vnútro banky spojiť s vonkajším vzduchom. Cez kohútik **k** natlačíme do banky **B** meraný plyn. Manometer nám ukáže rozdiel výšok hladín v svojich ramenách h_1 . Tlak plynu v banke je daný súčtom barometrického tlaku b a hydrostatického tlaku vodného stĺpca výšky h_1

$$p_1 = b + sgh_1 \quad (9)$$

kde s je hustota vody a g je zrýchlenie voľného pádu.

Ak nakrátko otvoríme široký kohút **K**, tlak plynu v banke sa rýchlo vyrovná s vonkajším atmosferickým tlakom b . Toto vyrovnanie tlakov prebieha veľmi rýchlo, takže môžeme predpokladať, že nedôjde k výmene tepla s okolitým prostredím a môžeme ho pokladať za adiabatický dej. Tá časť plynu, ktorá zostala v banke, má v okamihu uzavretia kohúta **K** tlak b a objem V_2 . Na začiatku expanzie mala tlak p_1 a neznámy objem V_1 . Pre adiabatickú expanziu, podľa vzťahu (4) platí

$$p_1 V_1^\kappa = b V_2^\kappa \quad (10)$$

Keďže pri adiabetickej expanzii sa plyn ochladil, po uzavretí kohúta banky sa jeho teplota bude vyrovnávať s teplotou okolia. Pretože pri tomto ohrievaní sa objem plynu prakticky nemení, bude jeho tlak rásť až na ustálenú hodnotu

$$p_2 = b + sgh_2 \quad (11)$$

kde h_2 je rozdiel hladín vodného stĺpca v oboch ramenách manometra.

Pretože uvažované množstvo plynu má tú istú teplotu ako na začiatku adiabetickej expanzie, platí podľa Boyleovho-Mariottovho zákona pre oba stavy rovnica

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (12)$$

Dosadením za V_1 z rovnice (12) do rovnice (10) dostaneme po malej úprave pre adiabatický koeficient vzťah

$$\kappa = \frac{\ln\left(\frac{p_1}{b}\right)}{\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)} \quad (13)$$

Pri praktickom meraní sa tlaky p_1 a p_2 málo líšia od atmosferického tlaku b , teda argumenty logaritmov vo vzťahu (13) sú blízke jednej, čo nám umožňuje podstatne zjednodušiť vzťah (13).

Dosaďme do vzťahu (13) za p_1 a p_2 vzťahy (9) a (11). Dostaneme

$$\kappa = \frac{\ln\left(1 + \frac{sg h_1}{b}\right)}{\ln\left(1 + \frac{sg h_1}{b}\right) - \ln\left(1 + \frac{sg h_2}{b}\right)} \quad (14)$$

Logaritmy rozvineme do Taylorovho radu v jednotke a uvážime len prvé členy rozvoja. Dostaneme približný vzťah

$$\kappa \approx \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad (15)$$

a z neho

$$h_2 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} h_1 \equiv k h_1 \quad (16)$$

ktorý použijeme na vyhodnotenie výsledov pomocou lineárnej regresie.

Postup práce

- Na začiatku aj na konci merania odčítame na laboratórnom barometri¹ atmosférický tlak b_1 a b_2 . Pre vyhodnocovanie meraní použijeme ich aritmetický priemer b .
- Pumpičkou **P** pripojenou ku kohútiku **k** natlačíme do banky **B** vzduch tak, aby manometer ukázal pretlak 30-40 cm vodného stĺpca a počkáme, kým sa hladiny vodného stĺpca v oboch ramenách ustália.
- Odčítame rozdiel hladín h_1 v oboch ramenách manometra.
- Krátko otvoríme široký kohút **K**.
- Po ustálení polohy vodného stĺpca v manometri odčítame rozdiel hladín h_2 .
- Meranie zopakujeme N -krát (doporučená hodnota $N = 15$).
- Získané údaje zapisujeme do tabuľky.

Treba si uvedomiť, že stavy plynu, pri ktorých meriame jeho tlak, musia byť rovnovážne termodynamické stavy, preto pred každým odčítaním tlaku musíme počkať na ustálenie rozdielu výšok hladín v manometri.

Namerané údaje vyhodnocujeme v súlade s nasledovnými krokmi.

- Pre každé meranie určíme hodnotu adiabatického koeficientu vzduchu κ s použitím vzťahu (14).
- Vypočítame aritmetický priemer nameraných hodnôt $\bar{\kappa} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \kappa_j$.
- Určíme smerodajnú odchýlku $s_{\bar{\kappa}}$ aritmetického priemeru podľa vzťahu

$$s_{\bar{\kappa}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (\kappa_j - \bar{\kappa})^2}{N(N-1)}}$$

čo poslúži pre ohodnotenie presnosti experimentálneho výsledku.

¹Tlakomery, aj tie v laboratóriu, bývajú zvyčajne kalibrované tak, aby udávali tlak prepočítaný („redukovaný“) na nulovú nadmorskú výšku. Aj bežné meteorologické údaje predstavujú prepočítané tlaky, nie aktuálne. Vzťah medzi redukovaným tlakom $b(0)$ a skutočným tlakom $b = b(H)$ v nadmorskej výške H približne popisuje barometrická rovnica

$$b(H) = b(0) \exp \left[-\frac{\rho_0 g}{b(0)} H \right] \approx b(0) - H \rho_0 g$$

kde $\rho_0 \doteq 1,2 \text{ kg/m}^3$ je hustota vzduchu pri hladine mora a $g \doteq 9,81 \text{ m/s}^2$ a priblíženie na pravej strane je použiteľné pre malé (všetky bežné) nadmorské výšky H . Barometrická rovnica síce prepokladá rovnaké teploty vzduchu vo výške 0 aj vo výške H , ale pre naše účely môžeme tento teplotný rozdiel zanedbať. Z hodnôt $b_1(0)$, $b_2(0)$ odčítaných z tlakomera na začiatku a konci merania vypočítame pomocou barometrickej rovnice skutočné tlaky b_1 a b_2 . Tie spriemerujeme, čím dostaneme hodnotu b . Tú použijeme na výpočet tlakov p v meracej aparátúre.

- Linearizovaný teoretický model (16) nám umožňuje získať hodnotu \varkappa lineárnou regresiou. Správime regresiu s nulovým priesečníkom (t.j. typu $y = kx$) a zo smernice k určíme adiabatický koeficient

$$\varkappa_{\text{lin}} = \frac{1}{1 - k}$$

- Určíme počet stupňov voľnosti i typických molekúl vzduchu a použijeme ho na výpočet teoretickej hodnoty Poissonovej konštanty \varkappa_{teor} .
- V zhrnutí o.i. diskutujeme aj prípadné rozdiely medzi $\bar{\varkappa}$, \varkappa_{lin} a \varkappa_{teor} .

Inštrukcie pre zostrojenie grafu

K protokolu pripojíme graf závislosti h_2 od h_1 , ktorý nakreslíme ručne na milimetrový papier. Namerané hodnoty zaznačíme napr. krížikmi a pravítkom preložíme priamku tak, aby prechádzala počiatkom a optimálne pomedzi namerané body v súlade s regresným výpočtom. Do grafu zapíšeme modelovú rovnicu $h_2 = kh_1$, hodnotu smernice k vypočítanú lineárnou regresiou, smerodajnú odchýlku smernice s_k a aj koeficient² determinovanosti $\mathcal{R}_{\text{det}}^2$. Hodnotu k uvádzame na dostatočný počet desiatinných miest v súlade s určenou smerodajnou odchýlkou s_k , avšak minimálne na 3 platné číslice. Hodnotu $\mathcal{R}_{\text{det}}^2$ uvedieme na toľko desiatinných miest, aby posledné dve číslice boli odlišné od cifry 9.

Presnosť merania

Za najspoľahlivejší výsledok našich meraní môžeme považovať hodnotu $\bar{\varkappa}$, keďže bola určená s využitím neaproximovaného výrazu (14). Analyzovať presnosť merania budeme len pre tento výsledok, a to pomocou smerodajnej odchýlky aritmetického priemeru. Túto odchýlku uvedieme do výsledkovej tabuľky v protokole. Popisuje vplyv náhodných faktorov na presnosť výsledku.

Výsledok experimentu býva vo všeobecnosti ovplyvnený aj systematickou chybou. Odhadnúť jej veľkosť je náročné a nebudeme to robiť. Zaujímavé však je porovnanie experimentálnej a teoreticky vypočítanej hodnoty. Príslušný rozdiel tiež zapíšeme do výsledkovej tabuľky.

²Symbol \mathcal{R} v rukopise zodpovedá veľkému písanému R.

Meno:

Krúžok:

Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 9 Adiabatický koeficient vzduchu

Stručný opis metódy merania

Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní

Prístroje a pomôcky

Záznam merania, výpočty a výsledky

$b_1(0) =$	$b_2(0) =$	$H = 170 \text{ m}$
$b_1 =$	$b_2 =$	$b =$

Upozornenie: Hodnoty $b_1(0)$, $b_2(0)$ sú údaje odčítané priamo z tlakomera na začiatku a konci merania. Hodnoty b_1 , b_2 predstavujú skutočné atmosférické tlaky (v aktuálnej nadmorskej výške $H \doteq 170 \text{ m}$). Z troch tlakomerov v laboratóriu je aktuálne najpresnejšie nakalibrovaný *klasický čierny tlakomer*.

j	h_1 (cm)	h_2 (cm)	κ_j	$\kappa_j - \bar{\kappa}$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				

Smernica lineárnej závislosti h_2 od h_1	$k =$
Poissonova konštanta vypočítaná podľa smernice	$\kappa_{\text{lin}} =$
Aritmetický priemer nameraných hodnôt κ_j	$\bar{\kappa} =$
Smerodajná odchýlka aritmetického priemeru	$s_{\bar{\kappa}} =$
Teoretická hodnota pre ideálny plyn	$\kappa_{\text{teor}} =$
Relatívny rozdiel	$(\kappa_{\text{lin}} - \bar{\kappa})/\bar{\kappa} =$
Relatívny rozdiel	$(\kappa_{\text{teor}} - \bar{\kappa})/\bar{\kappa} =$

Prílohy

- graf závislosti h_2 od h_1

Zhodnotenie výsledkov**Dátum odovzdania protokolu:****Podpis študenta:****Hodnotenie a podpis učiteľa:**