

## 24 VLNĚNÍ

Základní druhy vlnění a vlnová rovnice

Skládání vln, interference a polarizace

Fázová a grupová rychlost, disperze

Dopplerův jev, Čerenkovův jev

Vlny v omezeném prostředí

Energie a hybnost přenášená vlněním

Mechanické kmity kontinua nazýváme mechanickým vlněním. Na základě analogie se i každý jiný fyzikální děj, v kterém se každému bodu spojitého prostředí jednoznačně přiřazuje změna zkoumané veličiny jako funkce času, nazývá rovněž vlněním. V tomto smyslu hovoříme např. o elektromagnetických vlnách, gravitačních vlnách apod. Tento děj popisujeme obecně pomocí tzv. vlnové funkce, která každému bodu kvantitativně přiřazuje v každém čase určitou hodnotu dané fyzikální veličiny, např. výchylky polohy, intenzity elektrického pole, magnetické indukce apod. Vlnová funkce je tedy funkcí času a prostorových souřadnic. Splňuje tzv. vlnovou rovnici a můžeme ji interpretovat jako funkci popisující šíření "rozruchu" určitou rychlostí v prostoru.

### 24.1 Základní druhy vlnění a vlnová rovnice

Podle tvaru tzv. vlnoplochy, což je geometrické místo bodů, kmitajících se stejnou fází, dělíme vlny na rovinné a kulové (věta 24.3) a podle směru výchylek vzhledem ke směru šíření na příčné a podélné (věta 24.4). Můžeme dokázat, že funkce vyjadřující jednotlivé vlny můžeme dostat řešením tzv. vlnové rovnice (věta 24.2). Kromě vlnové délky a kmitočtu je důležitým parametrem vlny tzv. vlnový vektor (věta 24.1).

#### 24.1

Základními charakteristikami vlnění jsou: (obr. 24.3) perioda  $T$  určující časový interval, po jehož uplynutí se kmitavý děj začíná v daném místě opakovat, kmitočet  $\nu=1/T$  udávající počet kmitů v daném místě za jednotku času, vlnová délka  $\lambda$ , která udává vzdálenost dvou sousedních míst, v kterých probíhá kmitavý děj se stejnou fází a vlnový vektor  $\mathbf{k}$ , jehož velikost je  $k=2\pi/\lambda$  a jehož směr určuje směr šíření vlny. Fázová rychlost  $v$ , která je pro monochromatickou vlnu také rychlostí šíření, souvisí s uvedenými veličinami podle vztahů

Velmi jednoduchý přechod od kmitání a jeho matematického vyjádření k pojmu vlnění a jeho matematickému popisu nám umožní lineární řetězec zkoumaný v předchozím článku (obr. 24.1). Každý bod v lineárním řetězci má obecně souřadnici  $x=na$ . Za předpokladu, že na něj působí vazebné síly od sousedních oscilátorů byla v předešlém článku odvozena příslušná pohybová rovnice (23.41) a její řešení (23.42) určuje kmitový stav libovolného hmotného bodu (oscilátoru) v řetězci. Píšeme je ve tvaru

$$v = v \lambda = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{\omega}{k}. \quad (24.1)$$

24.2

Vlnová rovnice má tvar

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = v^2 \Delta u; \quad \Delta \equiv \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}, \quad (24.2)$$

kde  $u$  je charakteristická veličina (výhybka, intenzita pole apod.).

24.3

Jednorozměrnou, rovinnou a kulovou vlnu šířící se prostorem rychlostí  $v$  můžeme vyjádřit pomocí periodických funkcí argumentů

$$u_1 = f\left(t \pm \frac{x}{v}\right) \quad (24.3)$$

$$u_2 = f\left(t \pm \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_0}{v}\right) \quad (24.4)$$

$$u_3 = \frac{1}{r} f\left(t \pm \frac{r}{v}\right), \quad (24.5)$$

$$u = u_0 e^{j(\omega t \pm px)}. \quad (24.8)$$

Při přechodu ke spojitému prostředí se zvyšuje hustota oscilátorů ( $a \rightarrow 0$ ) a současně jejich počet  $L$  roste nade všechny meze. Znaménko - představuje řešení při kterém se vlna šíří ve směru osy  $x$ , a znaménko + proti směru osy  $x$ . Příklady vzniku příčného vlnění na struně ( $a$ ) a podélného vlnění na pružině ( $b$ ) jsou znázorněny na obr. 24.2. Výhybku  $y$  jsme označili obecnějším znakem  $u$ , protože se nemusí jednat jen o mechanické výhybky; amplitudu jsme označili písmenem  $u_0$ . Lehce dokážeme, že parametr  $p$  má v tomto vztahu význam velikosti vlnového vektoru  $k$ , definovaného ve větě 24.1. Podle definicí uvedených v této větě se výhybka  $u(t,x)$  objeví při šíření vlny ve směru osy  $x$  v místě  $(x+\lambda)$  za čas  $T$  (obr. 24.3), neboli  $u(t,x) = u(t+T, x+\lambda)$ , takže uvážíme-li rovnici (24.8) musí platit

$$\omega(t+T) - p(x+\lambda) = \omega t - px$$

z které vyplývá vztah

$$p = \frac{\omega T}{\lambda} = \frac{2\pi v}{\lambda} \frac{1}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = k.$$

Současně můžeme tvrdit, že za čas  $T$  uběhne vlnění dráhu  $\lambda$ , takže platí i rovnice

$$\lambda = vT = v \frac{1}{k},$$

kde  $k_0$  je jednotkový vektor charakterizující směr šíření vlny.

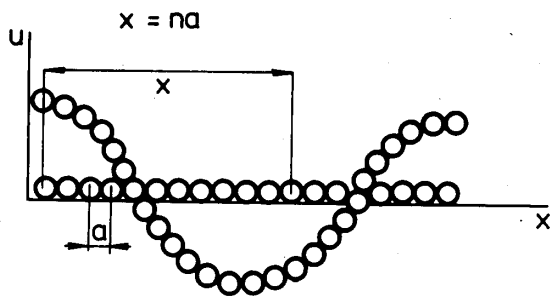
24.4

Při podélném vlnění je směr výchylek  $u$  totožný se směrem rychlostí šíření vlny  $v$  (obr. 24.2), takže je

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (24.6)$$

při příčném vlnění je směr výchylky  $u$  kolmý na směr šíření vlny

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (24.7)$$



Obr. 24.1 Přechod od kmitání lineárního řetězce na vlnění

z které přímo vyplývá i vztah (24.1). Dosazením za  $p$  (v dalším již budeme označovat jako vlnový vektor  $k$ ) do vztahu (24.8) pak dostaneme jednorozměrnou rovnici vlny

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{j(\omega t \pm kx)}. \quad (24.9)$$

Vidíme, že argument této funkce, nazývaný rovněž fázou, je funkcí jak času, tak souřadnice

$$(\omega t \pm kx) = \omega \left( t \pm \frac{kx}{\omega} \right) = \omega \left( t \pm \frac{x}{v} \right). \quad (24.10)$$

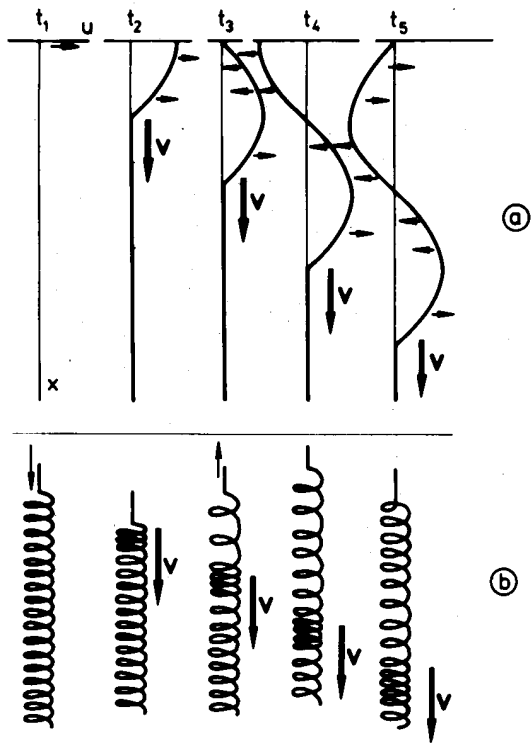
Pro jednoduchost lze jednorozměrnou rovnici vlny (24.9) přepsat do tvaru

$$u = u_0 \sin(\omega t \pm kx) = \sin \omega \left( t \pm \frac{x}{v} \right). \quad (24.11)$$

Fáze, daná vztahy (24.10) vyjadřuje šíření rozruchu (ať již harmonického nebo obecně jiného) ve směru osy  $x$ . Např. z místa o souřadnici  $x$  v čase  $t$  se rozruch rozšíří ve směru osy  $x$  do místa o souřadnici  $x+dx$  za čas  $dt$ . Musí být tedy splněna podmínka  $(t-x/v) = (t+dt) - (x+dx)/v$ , z čehož vyplývá  $dt = dx/v$  a dále  $v = dx/dt$ . Rychlost šíření rozruchu v kontinuu (ve spojitém prostředí) se nazývá často v souladu s předešlým výkladem fázová rychlost vlnění. Obecnou jednorozměrnou rovnici vlny tedy vyjadřuje funkce

$$u = f\left(t \pm \frac{x}{v}\right) = f(w),$$

čímž jsme dokázali platnost vztahu (24.3).



Obr. 24.2 Příklady vzniku vlnění

- a) příčného vlnění na struně  
b) podélného vlnění na pružině

Dvojnásobnou derivací této funkce dostaneme vztahy

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 u}{\delta w^2}$$

a dále

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\delta^2 u}{\delta w^2},$$

takže je rovněž správná i rovnice

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = v^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2},$$

(24.12)

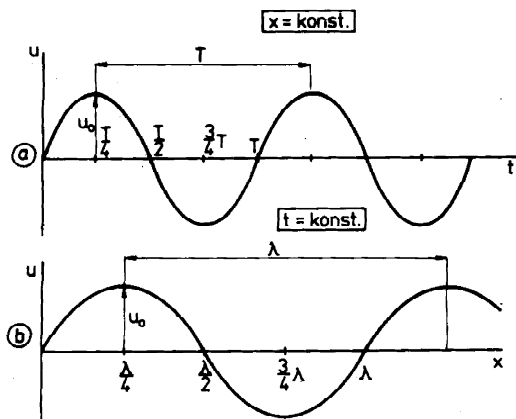
což je jednorozměrná vlnová rovnice.

Je možno dokázat, že ve všech prostředcích ve kterých není nutno vynaložit k jejich deformaci žádnou práci (např. v ideálních tekutinách a v elektromagnetickém poli), můžeme tuto rovnici mechanicky rozšířit i na trojrozměrný prostor a psát ji ve tvaru (24.2). Pro dvojrozměrný případ ověříme platnost tohoto postupu pro rovinnou membránu (článek 24.5). Tvar vlnové rovnice platný pro deformovatelná prostředí uvedeme v odstavci o mechanických vlastnostech látek.

Jestliže se rozruch nešíří ve směru osy  $x$ , ale v nějakém obecném směru v prostoru určeném jednotkovým vektorem  $k_0$ , můžeme příslušnou rovnici vlny napsat ve tvaru (24.4). Harmonické vlnění šířící se v tomto směru se často vyjadřuje pomocí funkce komplexního argumentu

$$u = u_0 e^{j\omega \left( t \pm \frac{k_0 \cdot r}{v} \right)} = u_0 e^{j(\omega t \pm k \cdot r)},$$

(24.13)



Obr. 24.3 Znázornění dvojí periodicity vlnění

- a) v čase s perioditou  $T$   
b) v prostoru s "perioditou"  $\lambda$

přičemž jsme ve shodě s předchozím zavedli vlnový

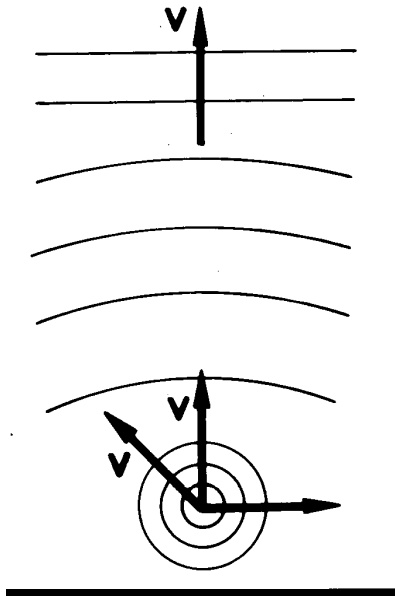
vektor  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0(\omega/v) = \mathbf{k}_0(2\pi\lambda/v) = \mathbf{k}_0(2\pi/\lambda)$ . Takto vyjádřená vlna se nazývá rovinná vlna, protože v určitém čase  $t=t_1$  mají stejnou fázi všechny body v prostoru splňující rovnici

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \text{konst},$$

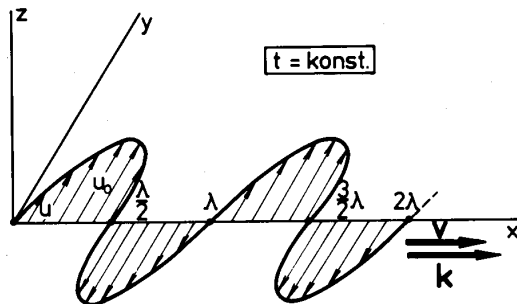
což je rovnice roviny. Tzv. vlnoplocha, tj. souhrn bodů kmitajících se stejnou fází, je tedy v tomto případě rovina. Lehce se přesvědčíme, že funkce (24.13) nebo její obecnější tvar (24.4) vyhovují diferenciální rovnici (24.2).

Diferenciální rovnice (24.2) připouští i vlnění, při kterém vlnoplochy nejsou roviny, ale koule vyjádřené rovnicí  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \text{konst}$ . Můžeme dokázat, že příslušná rovnice vlny má tvar (24.5). Taková vlna se šíří v homogenním a izotropním prostředí z tzv. bodového zdroje. Příkladem takových vln jsou např. vlny vznikající při zemětřesení v blízkosti epicentra, elektromagnetické vlny v blízkosti antény, atd. Ve velké vzdálenosti od bodového zdroje se však tyto vlny projevují již jako rovinné vlny (obr. 24.4) a jsou popsány funkcí (24.4).

Při podélném vlnění definovaném podmínkou (24.6) je směrem šíření určen i směr výchylek (resp. naopak), při příčném vlnění však výchylka není jednoznačně určena - může být orientována libovolným směrem kolmým na směr šíření. Jestliže však tato výchylka zůstává vždy ve stejné rovině, říkáme, že vlnění je lineárně polarizované (obr. 24.5). V ostatních případech se může jednat o kruhově, resp. elipticky polarizované vlnění



Obr. 24.4 Vznik rovinné vlny z vlny kulové



Obr. 24.5 Vlna lineárně polarizovaná v rovině xy

## 24.2 Skládání vln, interference a polarizace

Podobně jako v případě kmitů známe i v případě vln několik specifických způsobů jejich skládání. Jestliže se skládají dvě proti sobě jdoucí rovinné vlny se stejnými kmitočty, vzniká tzv. stojaté vlnění (věta 24.5). Jestliže se skládají dvě vlny se stejnými kmitočty avšak s konstantním rozdílem fází postupující stejným směrem, vzniká zesílení nebo zeslabení vln. Tento jev se nazývá interference (věta 24.6). Je však nutno podtrhnout, že tato jevy můžeme pozorovat jen u takových dvou vln, u kterých je kmitočet stejný, rozdíl fází časově nezávislý a jsou lineárně polarizované ve stejném směru. Takové dvě vlny se nazývají koherentní. Podle toho tedy mohou vzájemně interferovat jen dvě koherentní vlny. Jestliže se skládají dvě stejným směrem postupující navzájem v kolmých rovinách lineárně polarizované vlny, vzniká elipticky, resp. kruhově polarizované vlnění (věta 24.7). Opačný postup se rovněž může uskutečnit - z elipticky polarizované vlny se mohou vhodným zařízením oddělit od sebe dvě lineárně polarizované vlny. Tento proces nejčastěji probíhá tak, že jedna lineárně polarizovaná vlna se vhodným prostředím pohltí, takže takové prostředí mění elipticky polarizovanou vlnu na lineárně polarizovanou.

### 24.5

Stojaté vlnění vzniká skládáním dvou koherentních proti sobě postupujících rovinných vln. Vyznačuje se tím, že v místech  $x=(2N+1)\lambda/4$  jsou vždy uzly a v místech  $x=N\lambda/2$  vždy maxima výchylek, resp. naopak;  $N$  je celé číslo 0, 1, 2...

### 24.6

Dvě rovinné (koherentní) vlny postupující stejným směrem se vzájemně maximálně zesilují, jestliže vzájemné posunutí jejich zdrojů které kmitají se stejnou počáteční fází ( $x_2-x_1$ ) je celočíselným násobkem jejich vlnové délky

$$x_2 - x_1 = N\lambda, \quad N = 0, 1, 2 \dots, \quad (24.14)$$

a maximálně zeslabují (v případě rovnosti amplitud úplně vymizí), jestliže platí

Uvažujme pro jednoduchost o dvou harmonických vlnách stejné amplitudy, které postupují proti sobě v ose  $x$ . Na základě vztahu (24.11) je můžeme vyjádřit funkcemi

$$u_1 = u_o \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

a

$$u_2 = u_o \sin \omega \left( t + \frac{x}{c} \right).$$

Výsledné vlnění bude proto určeno funkcí

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = \\ &= u_o \left[ \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \sin \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) \right] = \\ &= 2u_o \cos \frac{\omega x}{v} \sin \omega t = u_o^x \sin \omega t. \end{aligned}$$

(24.18)

$$N = 0, 1, 2 \dots, \quad (24.15)$$

24.7

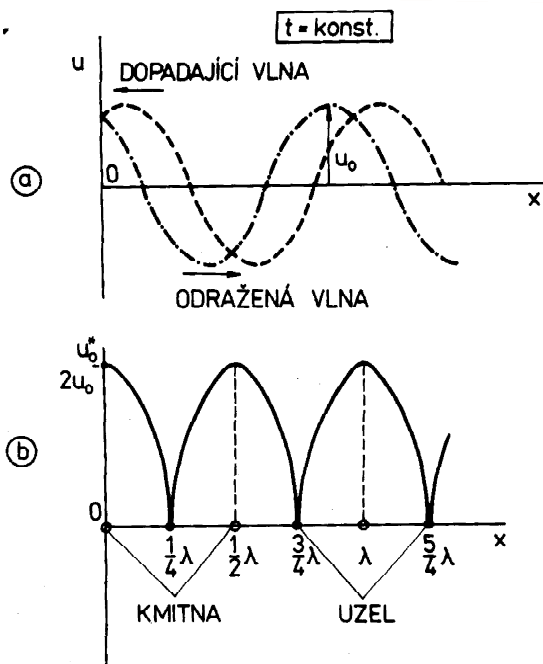
Skládáním dvou navzájem kolmých lineárně polarizovaných vln vzniká opět lineárně polarizovaná vlna, jestliže vzájemné posunutí jejich zdrojů, které kmitají se stejnou počáteční fází je

$$x_2 - x_1 = N \frac{\lambda}{2}, \quad N = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (24.16)$$

Kruhově polarizovaná vlna vzniká při stejných amplitudách obou vln a navíc je-li splněno

$$x_2 - x_1 = (2N + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad N = 0, 2, 3 \dots \quad (24.17)$$

V ostatních případech je výsledné vlnění obecně elipticky polarizováno.



Obr. 24.6 Vznik stojaté vlny při dopadu na překážku, na které nedochází ke změně fáze odražené vlny: a)

Toto vlnění (obr. 24.6) se nazývá stojaté vlnění. Vyznačuje se tím, že amplituda kmitů  $u_0^x$  je funkcí souřadnice  $x$ . Maximální amplituda je v bodech, tzv. kmitnách, pro které je splněna podmínka  $|\cos \omega x/v|=1$ , což je pro  $\omega x/v=2\pi x/\lambda=n\pi$ , kde  $N$  je celé číslo, neboli  $x=N\lambda/2$ . Minimální (nulová) amplituda je v bodech, tzv. uzlech, pro které je splněna podmínka  $\cos \omega x/v=0$ , což je pro  $\omega x/v=2\pi x/\lambda=(2N+1)\pi/2$ , neboli  $x=(2N+1)\lambda/4$ ... Stojaté vlny vznikají jako žádoucí i nežádoucí jev jestliže se vlna postupující ve směru osy  $x$  odráží na překážce a postupuje opačným směrem. Podle charakteru překážky může (ale nemusí) dojít ke změně fáze odražené vlny o  $\pi$ . Rovnice (24.18) popisuje situaci, při které nedošlo k posunu fáze odražené vlny (obr. 24.6). Změna fáze odražené vlny (obr. 24.7) se projeví ve vztahu (24.18) změnou znaménka mezi oběma členy v hranaté závorce, což vede k výměně uzlů a kmiten. Tyto výsledky jsou obsahem tvrzení 24.5.

Při důkazu věty 24.6 vyjdeme opět ze dvou harmonických vln stejné frekvence s obecně různými amplitudami, které vycházejí ze dvou zdrojů. Obě vlny necht' postupují stejným směrem, např. v ose  $x$ . Můžeme je popsat pomocí funkcí

$$u_1 = a \sin \omega \left( t - \frac{x_1}{v} \right)$$

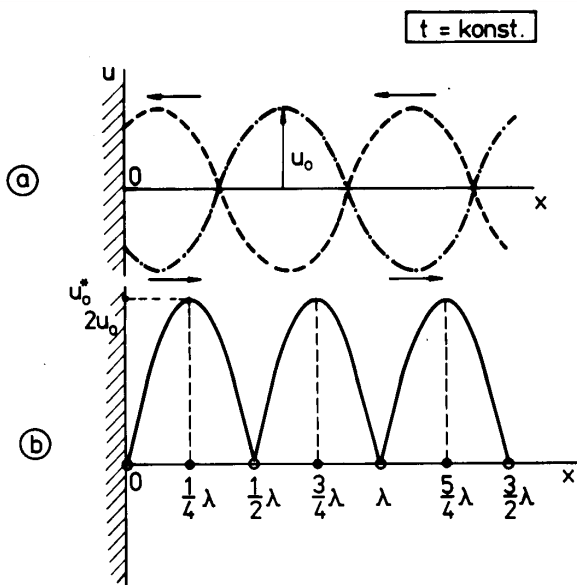
$$u_2 = b \sin \omega \left( t - \frac{x_2}{v} \right).$$

Takové dvě vlny se skládají ve výslednou vlnu popsanou funkcí

$$u = u_1 + u_2 = a \sin(\omega t + kx_1) + b \sin(\omega t + kx_2),$$

přičemž jsme přešli na jednodušší zápis s využitím vlnového vektoru. Jestliže použijeme známé součtové věty pro trigonometrické funkce, můžeme předcházející výraz upravit na tvar

$$u = (a \cos kx_1 + b \cos kx_2) \sin \omega t + (a \sin kx_1 + b \sin kx_2) \cos \omega t.$$



Obr. 24.7 Vznik stojaté vlny při dopadu na překážku, na které dochází ke změně fáze o  $180^\circ$

Zavedením substitucí

$$\begin{aligned} a \cos kx_1 + b \cos kx_2 &= A \cos kx_0 \\ a \sin kx_1 + b \sin kx_2 &= A \sin kx_0, \end{aligned}$$

z kterých vyplývají rovnice

$$A = [a^2 + b^2 + 2ab \cos k(x_2 - x_1)]^{\frac{1}{2}} \quad (24.19)$$

a dále

$$\operatorname{tg}(kx_0) = \frac{a \sin kx_1 + b \sin kx_2}{b \cos kx_1 + a \cos kx_2} \quad (24.20)$$

můžeme výsledné vlnění vyjádřit pomocí funkce

$$u = A \sin(\omega t + kx_0).$$

Jedná se tedy znovu o harmonickou vlnu avšak s amplitudou určenou vztahem (24.19). Z něj vyplývá, že při  $k(x_2 - x_1) = 2\pi N$ , kde  $n=0, 1, 2, 3, \dots$  je  $A=a+b$ , tj. vlny se maximálně zesilují a při  $k(x_2 - x_1) = (2N+1)\pi$  je  $A=|a-b|$ , tj. vlny se maximálně



zeslabují, a při  $a=b$  zcela vymizí. Tím jsme dokázali větu 24.6.

Harmonické vlny lineárně polarizované v navzájem kolmých rovinách můžeme podle vztahu (24.11) popsat funkcemi

$$u_y = a \sin(\omega t - kx_1) \quad (24.21)$$

a dále

$$u_z = b \sin(\omega t - kx_2). \quad (24.22)$$

Jestliže v nich výrazy  $kx_1$  a  $kx_2$  označíme symboly  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ , jsou tyto výrazy identické s funkcemi uvedenými při skládání dvou kolmých kmitů ve větě 23.10, takže výsledky odvozené pro kmitu pak platí i pro skládání dvou kolmých vln. Podle nich v případě  $\varphi_2 - \varphi_1 = k(x_2 - x_1) = N\pi$ , neboli pro  $x_2 - x_1 = N\lambda/2$  zůstává vlnění lineárně polarizované (obr. 24.5) a v případě  $\varphi_2 - \varphi_1 = k(x_2 - x_1) = (2N+1)\pi/2$  neboli pro  $x_2 - x_1 = (2N+1)\lambda/4$ , při splnění podmínky  $a=b$  vzniká kruhově polarizovaná vlna (vektor  $u = u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$  opisuje svým koncovým bodem kružnici). V ostatních případech je nové vlnění elipticky polarizované, tj. koncový bod vektoru  $u$  opisuje elipsu. Tato tvrzení jsou obsahem 24.7.

Jestliže kmitočty dvou lineárně polarizovaných vln nejsou přesně stejné, vznikne složením vln, a která se periodicky mění z lineárně polarizované na eliptickou, protože fázový rozdíl  $\varphi_2 - \varphi_1$  není v tomto případě konstantní, ale mění se s časem.

### 24.3 Fázová a grupová rychlost, disperze

Dosud jsme předpokládali, že rychlost šíření vlny v definované vztahem  $v = v\lambda = \omega/k$  nezávisí na kmitočtu. Setkáváme se však i s případy, při kterých tomu tak není. Obecně může vlnový vektor  $\mathbf{k}$  záviset na úhlovém kmitočtu  $\omega$ , neboli vlnová délka vlny  $\lambda$  může záviset na kmitočtu vlny  $v$ . Pak samozřejmě i rychlost šíření vlny bude funkcí kmitočtu vlny. Tento jev se nazývá disperzí. Ukážeme si, že v takovém případě je potřebné charakterizovat šíření vlny dvěma rychlostmi - fázovou a grupovou (věty 24.8 a 24.9).

24.8

Fázová rychlost  $v$  je rychlost definovaná vztahem

$$v = \frac{\omega}{k} = v\lambda.$$

Nejprve budeme zkoumat skládání jen dvou harmonických vln postupujících ve směru osy  $x$  s blízkými úhlovými kmitočty

$$\omega_1 = \omega + d\omega, \quad \omega_2 = \omega - d\omega,$$

(24.23)

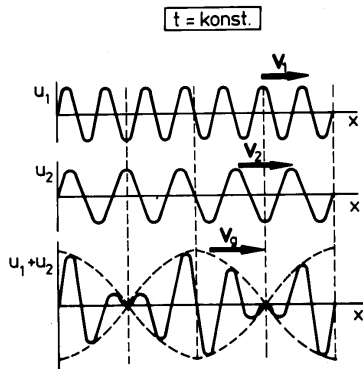
Charakterizuje rychlost šíření fáze monochromatické vlny. (Srovnej s relací /24.1/).

24.9

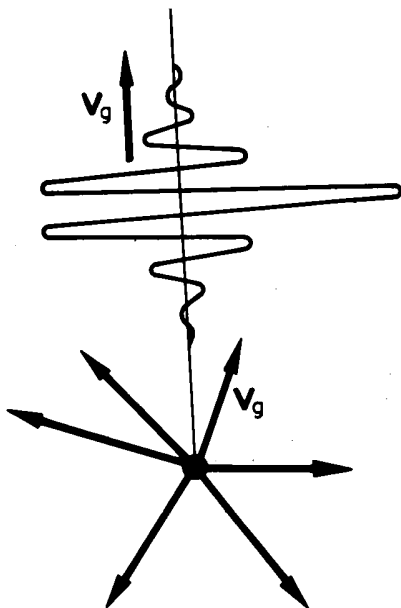
Grupová rychlost  $v_g$  je definovaná vztahem

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (24.24)$$

Charakterizuje jednak rychlost šíření amplitudy skupiny (neboli grupy) vln a současně rychlost přenosu energie vlněním.



Obr. 24.8 Vznik harmonické vlny s periodicky modulovanou amplitudou



Obr. 24.9 Vznik ohraničeného vlnového rozruchu

s vlnovými vektory

$$k_1 = k + dk, \quad k_2 = k - dk.$$

Příslušné vlny jsou popsány funkcemi

$$u_1 = u_o \sin[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x]$$

a dále

$$u_2 = u_o \sin[(\omega - d\omega)t - (k - dk)x],$$

takže výsledné vlnění můžeme vyjádřit funkcí

$$u = u_1 + u_2 = 2u_o \cos(td\omega - xdk) \sin(\omega t - kx). \quad (24.25)$$

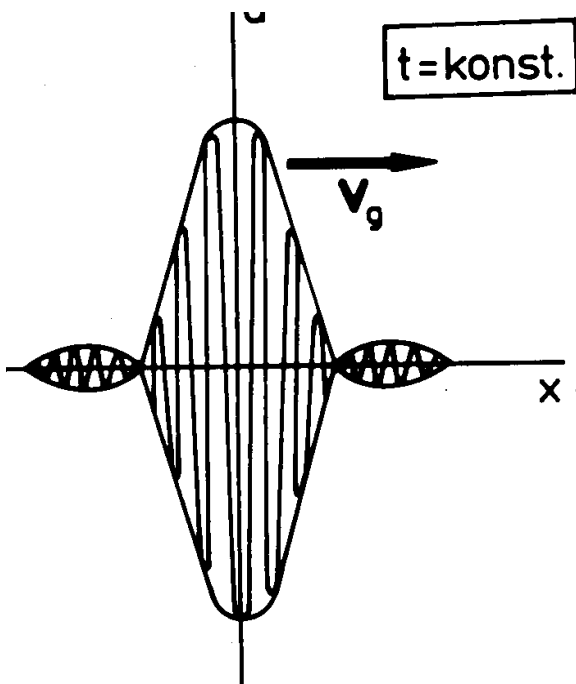
Grafickým obrazem této vlny je křivka znázorněná na obr. 24.8. Je to harmonická vlna s periodicky modulovanou amplitudou. Místa se stejnou amplitudou splňují tedy podmínku

$$t d\omega - x dk = konst.$$

Rychlost, kterou postupují místa stejné amplitudy se nazývá grupová rychlost a z předešlé podmínky pro ni plyne

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (24.26)$$

Jestliže prostředí, ve kterém se vlny šíří nespĺňuje podmínku, že fázová rychlost  $v = \omega/k$  nezávisí na kmitočtu, je  $\omega = vk$  a  $v_g = d\omega/dk = v$ . Jestliže tedy v daném prostředí neexistuje disperze, tj. závislost fázové rychlosti na frekvenci, je fázová a grupová



Obr. 24.10 Vlnový balík

rychlost stejná.

Význam pojmu grupové rychlosti vynikne zejména tehdy, jestliže zkoumáme otázku rychlosti přenosu energie pomocí vlnění. Lehce pochopíme, že fázová rychlost necharakterizuje rychlost přenosu energie. U monochromatické vlny, jejíž fáze se šíří rychlostí  $v = \omega/k$  totiž nemá vůbec smysl zkoumat rychlost přenosu energie, nebo informace. Dokonale monochromatická vlna vyjádřená např. funkcí (24.11) je totiž současně přítomná na celé ose  $x$  (od  $+\infty$  do  $-\infty$ ). Tato vlastnost monochromatické vlny - přesně určená frekvence ale nekonečná rozlehlost - je velmi důležitá v souvislosti s tzv. principem neurčitosti. Monochromatickou vlnu nemůžeme vyrobit, protože nemůže mít začátek a proto ani nemůže přenášet energii. O šíření energie v souvislosti s vlněním můžeme hovořit jen tehdy, jestliže se v určitém místě vytvořil časově ohraničený rozruch (např. otřes půdy, záblesk laseru apod.) a ten se šíří do prostoru (obr. 24.9). Takový v prostoru (a čase) omezený úsek vlnění však nemůžeme vyjádřit harmonickou funkcí a s jedinou frekvencí. Můžeme toho však docílit superpozicí velkého počtu harmonických vln s frekvencemi spojitě se měnícími uvnitř určitého intervalu  $(\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$ . Příslušná věta se dokazuje v matematice. Součet monochromatických vln se spojitě se měnící frekvencí simulují určitý v prostoru omezený vlnový signál

$$u = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) \sin [\omega(k)t - kx] dk$$

(24.27)

se nazývá Fourierův integrál, veličina  $A=A(k)$  se nazývá spektrální funkce a celý soubor vln se nazývá vlnový balík (obr. 24.10). Rychlost šíření takového balíku, tj. rychlost přenosu energie a informace

vlnovým rozruchem, je zřejmě určená rychlostí přesunu fáze amplitudy funkce (24.27), neboli grupovou

rychlostí. Tím jsme kvalitativně (příslušný důkaz je matematicky dosti náročný) dokázali obsah posledního tvrzení věty 24.9.

Náhrada prostorově omezeného vlnového signálu grupou složenou z monochromatických vln nemá jen formální charakter. Mnohé přístroje detekují vlnění tak, že interagují s jeho monochromatickými složkami. Obrazem takového vlnového signálu (obsahující všechny vlnové délky z určitého intervalu) nebude proto limitně úzká čára odpovídající jedné vlnové délce, ale čára s konečnou šířkou. Šířka čáry závisí na intervalu vlnových délek přítomných v balíku a ten je zase funkcí délky signálu, tj. mechanismu jeho vzniku. proto měřením šířky takových čar získáme velmi důležité informace o vzniku zkoumaného vlnění.

#### 24.4 Dopplerův jev, Čerenkovův jev

Ze zkušenosti víme, že kmitočet vlnění (určující výšku tónu) se mění, je-li zdroj, resp. pozorovatel ve vzájemném relativním pohybu. Tento jev se nazývá Dopplerův jev. Ve speciálních případech můžeme příslušné frekvenční změny vypočítat pomocí jednoduchých vztahů (věty 24.10 až 24.12). Jestliže rychlost zdrojů převyšuje rychlost šíření vlnění vzniká nový jev, který se v případě, že jde o elektromagnetické vlnění nazývá Čerenkovův jev (věta 24.13).

##### 24.10

Jestliže je zdroj vlnění s kmitočtem  $\nu$  v klidu vzhledem k prostředí přenášejícímu vlnu a pozorovatel se vůči němu pohybuje rychlostí  $c$ , pozoruje vlnění s kmitočtem

$$\nu' = \nu \left( 1 - \frac{c}{v} \right), \quad (24.28)$$

kde  $v$  je fázová rychlost vlny.

##### 24.11

Jestliže je pozorovatel v klidu a zdroj vysílající vlnění s kmitočtem  $\nu$  se vůči němu pohybuje rychlostí  $w$ , registruje pozorovatel vlnění s kmitočtem

$$\nu'' = \frac{\nu}{1 - \frac{w}{v}}. \quad (24.29)$$

Předpokládejme pro jednoduchost, že zdroj vlnění je v klidu (vzhledem k prostředí přenášejícímu vlnění) a pozorovatel se vůči němu pohybuje rychlostí  $c$  podle obr. 24.11. V takovém případě vnímá pozorovatel o kolik kmitů za jednotku času méně, kolik vlnových délek připadá na ním uraženou dráhu za jednotku  $c$ , takže registruje vlnění o frekvenci

$$\nu' = \nu - \frac{c}{\lambda}, \quad (24.32)$$

z kterého již bezprostředně vyplývá vztah (24.28). Jestliže se tedy pozorovatel vzdaluje od zdroje ( $c < 0$ ) vnímá nižší kmitočet, jestliže se ke zdroji přibližuje ( $c > 0$ ), je pozorovatelem přijímaný kmitočet vyšší.

Je-li pozorovatel v klidu a zdroj se k němu přibližuje rychlostí  $w$  (obr. 24.11) zkracuje se vlnová délka vyšetřovaného vlnění o hodnotu  $wT$ , kde  $T$  je perioda vlnění. Pozorovatel tedy registruje vlnovou délku

24.12

Při vzájemném relativním pohybu zdroje vysílajícího vlnění s kmitočtem  $\nu$  rychlostí  $w$  a pozorovatele rychlostí  $c$  v jedné přímce registruje pozorovatel vlnění s kmitočtem  $\nu''$

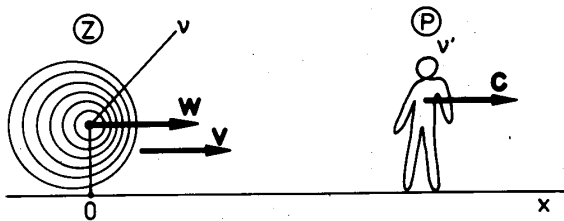
$$\nu'' = \nu \frac{v - c}{v - w} \quad (24.30)$$

24.13

Pohybuje-li se zdroj vlnění rychlostí  $w$ , která je větší než fázová rychlost šíření vlnění  $w > v$ , vysílá zdroj vlnění kužel s vrcholem ve zdroji, přičemž úhel mezi povrchovou přímkou kužele a přímkou, v které se zdroj pohybuje splňuje rovnici

$$\sin \alpha = \frac{v}{w} \quad (24.31)$$

Tento jev se nazývá Čerenkovův jev, je-li zdrojem elektricky nabitá částice, pohybující se v daném prostředí rychlostí větší než je rychlost světla v tomto prostředí.



Obr. 24.11 K Dopplerovu jevu: relativní pohyb zdroje a pozorovatele;

$$\lambda'' = \lambda - wT. \quad (24.33)$$

Jestliže uvážíme platnost vztahů  $\nu' = \nu / \lambda'$ ,  $\nu = \nu / \lambda$  a  $\nu = 1/T$ , lehce odvodíme vztah (24.29).

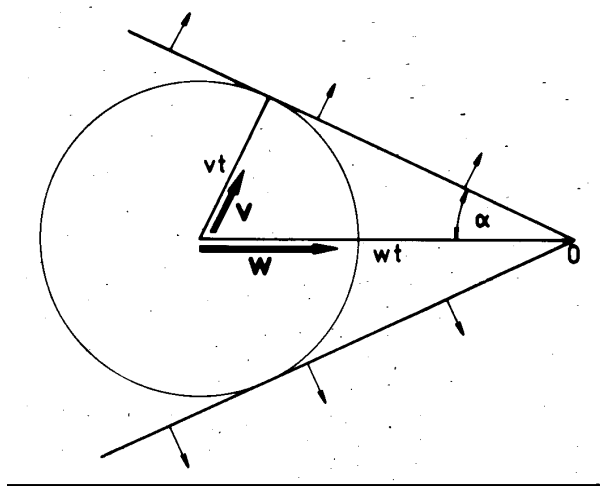
Spojením výsledků (24.28) a (24.29) dostaneme i vyjádřením kmitočtu pozorovatele přijímaného kmitočtu v případě, jestliže se pohybuje jak pozorovatel, tak i zdroj (24.30).

Je zajímavé si všimnout, že při malých rychlostech zdroje  $w \ll v$  je vztah (24.29) možno přibližně psát

$$\nu'' = \frac{\nu}{1 - \frac{w}{v}} = \nu \left( 1 + \frac{w}{v} \right),$$

takže při této podmínce se korekce ovlivněná pohybem zdroje a pozorovatele navzájem co do velikosti rovnají. Dopplerův jev, pozorovaný při elektromagnetickém vlnění (který má však relativistickou povahu) má velký význam v radioastronomii, protože na základě pozorování změny kmitočtu nebeskými tělesy vysílaného záření můžeme určit rychlost jejich vzdalování, resp. přibližování.

Uvažujme nyní o případě, v kterém se zdroj pohybuje větší rychlostí než je rychlost šíření vln v daném prostředí. Takovýmto jevem se zabýváme např. při letech letadel nadzvukovými rychlostmi a při pohybu elektricky nabitých částic rychlostí větší než je rychlost světla v daném prostředí. Předpokládejme, že zdroj je bodový a že se pohybuje rovnoměrně a přímočaře. Za čas  $t$  proběhne dráhu  $wt$  (obr. 24.12) zatímco vlnoplocha vyslaná z něho se rozšíří do vzdálenosti  $vt$ . Je zřejmé, že poměr mezi vzdálenostmi  $vt$  a  $wt$  se zachovává i pro vlnoplochy vyzářené v každém z



Obr. 24.12 Čerenkovův jev

DOPPLER Christian Johan, 1803-1853, rakouský fyzik, krátký čas působil i v Praze a v Bánské Štiavnici. Princip určující změnu pozorovaného kmitočtu vyvolanou pohybem zdroje vlnění nebo pozorovatele odvozený Dopplerem, původně v optice, byl dlouho nedocenený.

následujících okamžiků. Vlnění vyzážené zdrojem se tedy nachází v kuželi, v kterém úhel mezi jeho povrchovou přímkou a jeho osou, po které se pohybuje zdroj splňuje podmínku

$$\sin \alpha = \frac{vt}{wt} = \frac{v}{w}, \quad (24.34)$$

tj. podmínku (24.31). Prakticky se uvedený jev projevuje v podobě rázové vlny, charakteristické pro výbuch v atmosféře, a to i v případě, jestliže samotné pohybující se těleso není zdrojem vlnění. Jde-li o elektricky nabitě částice pohybující se v určitém prostředí rychlostí  $w > v$ , kde  $v$  je rychlost světla v daném prostředí, jde o emisi elektromagnetického vlnění a rázová vlna má povahu záblesku. Tento jev objevil v roce 1934 sovětský fyzik Čerenkov, proto se podle něho uvedený jev nazývá Čerenkovo záření. V současnosti se využívá zejména při detekci elementárních částic, pohybujících se "nadsvětelnými" rychlostmi.

ČERENKOV Pavel Alexejevič, nar. 1904, sovětský experimentální fyzik, jeden ze žáků a blízkých spolupracovníků S.I.Vavilova. Jeho jméno vešlo do dějin fyziky ve spojitosti s objevem zvláštního záření tvořeného tzv. nárazovou světelnou vlnou, která se může šířit kapalinou nebo pevnou látkou při speciálních podmínkách. Fyzikální princip Čerenkova jevu bylo možné využít ke konstrukci detektorů umožňujících s velkou přesností měřit rychlost, energii a náboj rychlých částic, stejně jako směr jejich rychlosti, dále je možno tohoto jevu využít ke konstrukci generátorů velmi krátkých radiových vln. Čerenkovovy detektory jsou dnes jednou z hlavních pomůcek vědců při výzkumech pomocí urychlovačů a při studiu kosmického záření. Za objev a teoretické objasnění tohoto jevu byla trojice sovětských fyziků P.A.Čerenkov, I.M.Frank a I.J.Tamm odměněna Nobelovou cenou za fyziku v r. 1958.

## 24.5 Vlny v omezené prostředí

Doposud jsme se zabývali vlněním v neomezeném prostředí, kde jsme nekladli žádné podmínky omezující kmitočty vlnění. V praxi se však setkáváme s vlněním vznikajícími v geometricky omezených oblastech. Podmínky na hranicích takových prostředí způsobují, že ne všechny kmitočty jsou dovolené. Stykem těchto "vlnících se" prostorově ohraničených látkových objektů o okolním neohraničeným látkovým prostředím (např. vzduchem) vznikají i v něm vlny charakterizované uvedenými tzv. vlastními kmitočty.

V tomto článku ukážeme, že i pro geometricky omezené prostředí platí vlnová rovnice (24.2), kde

rychlost šíření vlny je funkcí parametrů prostředí. Z množství prakticky významných příkladů probereme šíření vln v ohraničené struně (věta 24.14), membráně (věta 24.15) a sloupci plynu (věta 24.16).

24.14

Fázová rychlost vln vytvořených ve struně s měrnou délkovou hmotností  $\tau$  která je napnutá silou  $F_0$  je

$$v = \left( \frac{F_0}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24.35)$$

a dovolené kmitočty  $v$  jsou určeny vztahem

$$v = \frac{n}{2l} \left( \frac{F_0}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (24.36)$$

kde  $l$  je délka struny.

24.15

Fázová rychlost vln v membráně je

$$v = \left( \frac{P_0}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (24.37)$$

kde  $P_0$  je povrchové napětí membrány (síla, působící na jednotku délky membrány) a  $\sigma$  je plošná hustota membrány (hmotnost, připadající na jednotku plochy). Vlastní kmitočty obdélníkové membrány jsou určeny vztahem

$$v = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{P_0}{\sigma} \right) \left[ \left( \frac{n_x}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{n_y}{l_y} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad n_x = 0, 1, 2, \dots, \quad n_y = 0, 1, 2, \dots \quad (24.38)$$

Uvažujme o struně délky  $l$  na obou stranách upevněné a napnuté silami  $F_0$  a  $-F_0$  (obr. 24.13). Jestliže předpokládáme, že je z rovnovážné polohy vnějším zásahem vychýlená tak, že může vykonávat jen malé kmity, můžeme sílu  $dF$  působící na její

$$\begin{aligned} dF &= F_0 \sin(\alpha + d\alpha) - F_0 \sin \alpha \doteq \\ &\doteq F_0 [\operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) - \operatorname{tg} \alpha] = \\ &= F_0 d(\operatorname{tg} \alpha) = F_0 d \left( \frac{\delta u}{\delta x} \right) = F_0 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} dx, \end{aligned} \quad (24.41)$$

element délky  $dx$  vyjádřit vztahem

kde  $u$  je výchylka z rovnovážné polohy. Podle Newtonova pohybového zákona účinkuje tato síla na element struhy hmotnosti  $dm = \tau dx$  podle rovnice

$$dF = dm \frac{\delta^2 u}{\delta t^2},$$

takže je správná i rovnice

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \frac{F_0}{\tau} \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}. \quad (24.42)$$

Je to jednorozměrná vlnová rovnice popisující pohyb struny. Jejím porovnáním s obecnou vlnovou rovnicí (24.12) získáme vztah pro fázovou rychlost vln charakterizující strunu (24.35). Z podmínky, že v bodech upevnění struny jsou vždy uzly, vyplývá, že na její násobek půlvln  $l = n\lambda/2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  (obr. 24.14), takže po uvážení vztahu  $v = \nu/\lambda$  lehce odvodíme i vztah (24.36).

Membrána je rovinný útvar, který má

kde  $l_x, l_y$  jsou rozměry membrány.

24.16

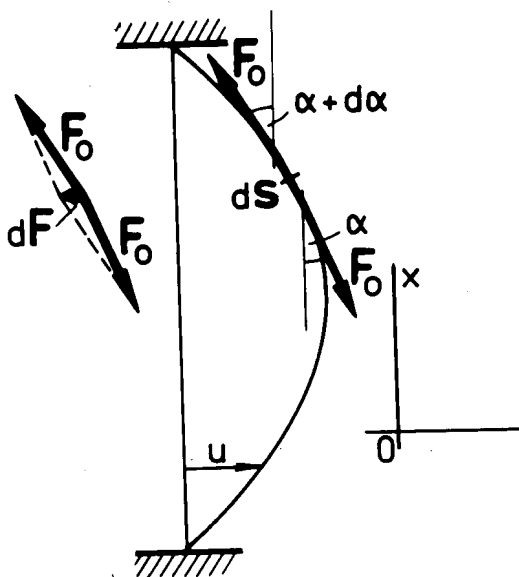
Fázová rychlost vln ve sloupci plynu je

$$v = \left( \frac{1}{\rho K} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\kappa p}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24.39)$$

kde  $K$  je stlačitelnost plynu,  $\rho$  je měrná hmotnost plynu,  $\mathcal{H}$  je Poissonova konstanta a  $p$  je tlak plynu.

Vlastní kmitočty sloupce jsou určeny vztahem

$$v = \frac{2n+1}{4l} \left( \frac{1}{\rho K} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (24.40)$$



Obr.24.13 K odvození vlnové rovnice pro strunu

zanedbatelnou "tuhost". To nám umožňuje řešit její vlnový pohyb bez zřetele na možnost vzniku i podélných kmitů. Na každou délkovou jednotku povrchu membrány nechť působí síla o velikosti  $P_0$ , takže např. úsek  $dy$  je namáhán silou  $dF = P_0 dy$ . Na plošný element  $dx dy$  (obr. 24.15) membrány vychýlené z rovnovážné polohy tak, že může vykonávat jen malé kmity, působí jednak síla  $dF_x$  související s jeho vychýlením, kterou můžeme podle vztahu (24.41) vyjádřit ve tvaru

$$dF_x = P_0 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} dx dy,$$

jelikož sílu  $F_0$  vyjadřujeme nyní součinem povrchového napětí  $P_0$  a šířky  $dy$ , a dále síla  $dF_y$

$$dF_y = P_0 \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} dx dy,$$

Výsledná síla  $dF = dF_x + dF_y$  vyvolává podle Newtonova zákona pohyb podle rovnice

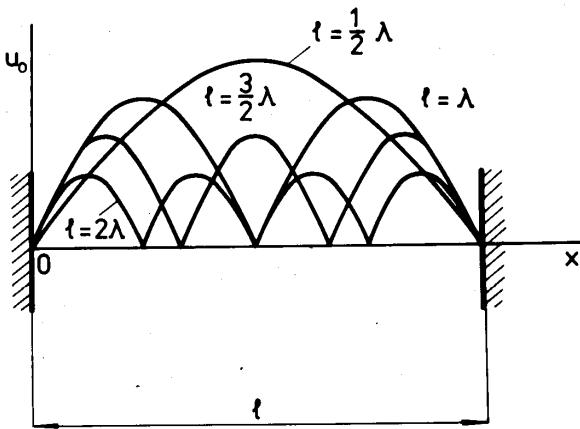
$$\begin{aligned} dF &= P_0 \left( \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} \right) dx dy = \\ &= dm \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \sigma \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} dx dy, \end{aligned}$$

kde  $\sigma$  značí plošnou hustotu membrány. Je tedy správná i rovnice

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \frac{P_0}{\sigma} \left( \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} \right), \quad (24.43)$$

kteřá představuje dvojrozměrnou vlnovou rovnici popisující vlnu s fázovou rychlostí  $v = (P_0/\sigma)^{1/2}$ .





Obr. 24.14 Rozložení amplitudy čtař možných stojatých vln na struně

Tím jsme dokázali platnost vztahu (24.37). Vztah (24.38) nebudeme dokazovat, protože důkaz je dosti zdlouhavý. Zdůrazníme jen, že vyšší frekvence nejsou celočíselnými násobky základního kmitočtu a že počet vlastních kmitočtů je podstatně vyšší, než v případě struny. To způsobuje, že membrány, resp. mechanicky pevné desky (kde jsou poměry podobné), jen vzhledem k přítomnosti i podélných kmitů značně složitější) rezonují prakticky s každým kmitočtem (tónem), čehož se využívá na tlumení resp. zesilování zvuků.

Pro odvození vztahů (24.39) a (24.40) potřebujeme definovat stlačitelnost. Zavádíme ji vztahem

$$K = - \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p} = - \frac{1}{V_0} \frac{V - V_0}{p - p_0}, \quad (24.44)$$

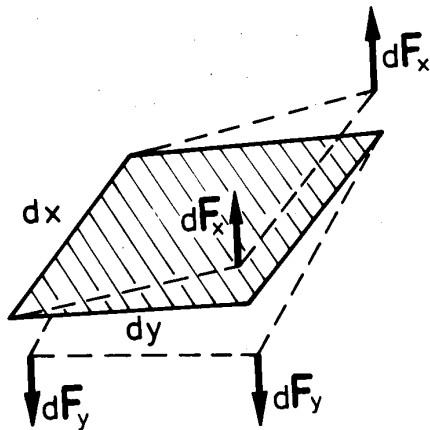
kde  $V_0$  je počáteční objem,  $\Delta V$  změna objemu a  $\Delta p$  změna tlaku. Z této definice vyplývá pro tlak, odpovídající změně objemu plynu (obr. 24.16)

$$\begin{aligned} V - V_0 &= S[u(x + dx) - u(x)] = S \frac{\delta u}{\delta x} dx = \\ &= V_0 \frac{\delta u}{\delta x} \end{aligned}$$

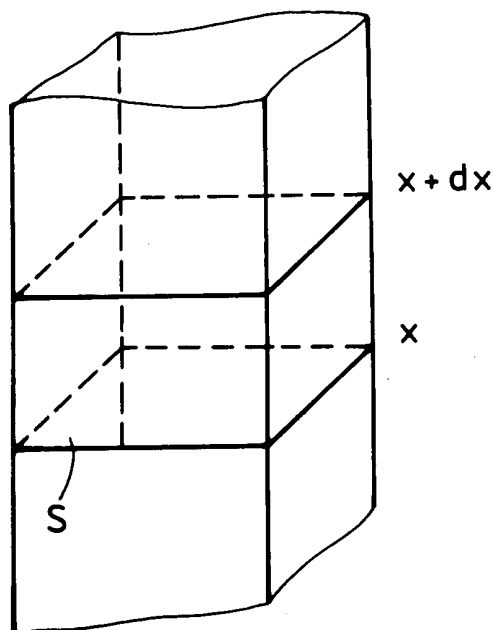
výraz

$$p = p_0 - \frac{1}{KV_0}(V - V_0) = p_0 - \frac{1}{K} \frac{\delta u}{\delta x}. \quad (24.45)$$

Síla působící na element objemu plynu



Obr. 24.15 Vlnění plošného elementu



Obr. 24.16 K odvození vlnění v plynovém sloupci

$$dF = S[p(x) - p(x + dx)] =$$

$$= -S \frac{\delta p}{\delta x} dx = \frac{S}{K} \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} dx$$

vyvolává podle Newtonova zákona pohyb popsany rovnicí

$$dF = \frac{S}{K} \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} dx = dm \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \rho S \frac{\delta^2 u}{\delta t^2},$$

kde  $\rho$  je měrná hmotnost plynu. Tato rovnice je rovnocenná vlnové rovnici

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = \frac{1}{\rho K} \frac{\delta^2 u}{\delta x^2},$$

(24.46)

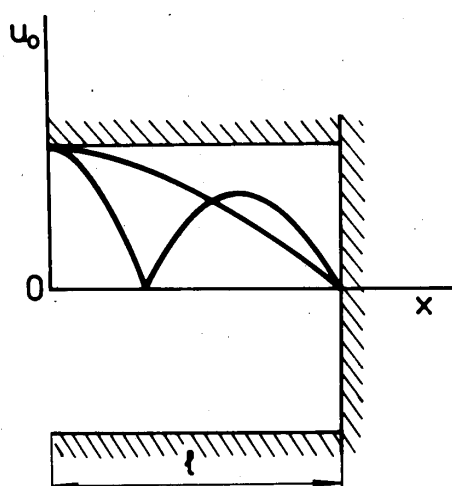
takže rychlost šíření vln ve sloupci s plynem je skutečně  $v = (1/\rho K)^{1/2}$ .

Šíření vlny v plynu probíhá tak, že v místech, kde je tlak plynu  $p$  vyšší než tlak  $p_0$  ve stavu rovnovážném, se plyn zahřeje, v místech, kde je tlak  $p$  nižší, než tlak  $p_0$ , se plyn ochladí. Změny tlaku probíhají tak rychle, že se teploty mezi jednotlivými objemovými elementy plynu nemohou vyrovnat - stavové změny plynu lze tedy pokládat za adiabatické. Stlačitelnost  $K$  vypočteme z rovnice adiabaty (14.58)

$$pV^\kappa = \text{konst.}$$

Diferencováním této rovnice obdržíme

$$\frac{dp}{p} + \kappa \frac{dV}{V} = 0$$



Obr. 24.17 Rozložení amplitudy dvou možných stojatých vln ve sloupci plynu

a odtud získáme dosazením do definičního vztahu (24.44) pro stlačitelnost

$$K = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{\kappa p}, \quad (24.47)$$

takže je splněna i druhá část vztahu (24.39).

Jestliže uvážíme, že u dna nádoby např. se vzduchem je vždy uzel a při otvoru kmitna (obr. 24.17) dostaneme vztah  $l=(2n+1)\lambda/4$   $n=1, 2, \dots$  a z něho pomocí vztahu  $v=\nu/\lambda$  i vztah (24.40).

Uvedené tři zdroje vlnění tvoří základ nejznámějších zdrojů zvuku a tónů (hudebních nástrojů).

## 24.6 Energie a hybnost přenášená vlněním

V souvislosti s hodnocením energie a hybnosti přenášených vlněním se zavádějí tyto tři veličiny: přetlak  $P$ , hustota energie  $w$  a intenzita vlnění  $I$  (věty 24.17 až 24.19). Hybnost přenášená vlněním je definována větou 24.20.

24.17

Přetlak  $P$  je definován jako rozdíl tlaku za přítomnosti vlny a bez ní. V případě kmitání vzdušného sloupce je tento přetlak určen vztahem

$$p = - \frac{1}{K} \frac{\delta u}{\delta x}, \quad (24.48)$$

kde  $K$  je stlačitelnost plynu.

24.18

Hustota energie vlny  $w$  je energie spojená s vlnivým pohybem v objemové jednotce prostředí

Vztah pro přetlak (24.48) vyplývá přímo z rovnice (24.45). Vztahy pro hustotu energie vlnění a intenzitu vlnění odvodíme přímo z vlnové rovnice, kterou pro jednoduchost použijeme v jednorozměrném tvaru (24.12). Jestliže ji vynásobíme rychlostí pohybu jednotlivých částic prostředí  $\delta u/\delta t$  a hmotností připadající na jednotku délky prostředí  $s$ , pak po integraci v mezích od  $a$  do  $b$  (obr. 24.18), dostaneme rovnici

$$s \int_a^b \frac{\delta u}{\delta t} \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} dx = s v^2 \int_a^b \frac{\delta u}{\delta t} \frac{\delta^2}{\delta x^2} dx. \quad (24.56)$$

$$w = \frac{dW}{dV}, \quad (24.49)$$

kde  $W$  je celková energie související s vlněním.

24.19

Intenzita vlnění  $I$  je definována jako energie, která prochází plochou jednotkové velikosti kolmou na směr šíření vlny za jednotku času

$$I = \frac{dW}{dS dt}. \quad (24.50)$$

Jednotka intenzity vlnění je  $[I]=J m^{-2} s^{-1}=W m^{-2}$ .  
Intenzitu vlnění můžeme určit vztahem

$$I = w v, \quad (24.51)$$

kde  $w$  je okamžitá hodnota hustoty energie a  $v$  je fázová rychlost vlny. Z hlediska měření má význam střední hodnota intenzity vlnění  $I_s$

$$I_s = w_s v \quad (24.52)$$

kde  $w_s$  je střední hodnota hustoty energie. Intenzita vlnění jednorozměrné vlny je dána vztahem

$$I = -sv^2 \frac{\delta u}{\delta t} \frac{\delta u}{\delta x}. \quad (24.53)$$

Střední hodnota intenzity harmonické zvukové vlny je pak

Jestliže uvážíme, že platí vztahy

$$\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta u}{\delta t} \right)^2 = \frac{\delta u}{\delta t} \frac{\delta^2 u}{\delta t^2}$$

a dále

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x} \left( \frac{\delta u}{\delta t} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \right) &= \frac{\delta u}{\delta t} \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \\ &+ \frac{\delta}{\delta x} \left( \frac{\delta u}{\delta t} \right) \frac{\delta u}{\delta x} = \\ &= \frac{\delta u}{\delta t} \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta u}{\delta x} \right)^2, \end{aligned}$$

můžeme rovnici (24.56) napsat i ve tvaru

$$sv^2 \int_a^b \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta t} \left[ \frac{1}{v^2} \left( \frac{\delta u}{\delta t} \right)^2 + \left( \frac{\delta u}{\delta x} \right)^2 \right] + \frac{\delta}{\delta x} \left( \frac{\delta u}{\delta t} \frac{\delta u}{\delta x} \right) \right\} dx = 0. \quad (24.57)$$

Porovnáním této rovnice s celkovou energií harmonického oscilátoru lehce zjistíme, že první integrál má význam časové změny celkové energie vlnění  $W$  v intervalu  $\langle a, b \rangle$ , takže rovnici (24.57) můžeme vyjádřit i jednodušeji

$$- \frac{\delta W}{\delta t} = (I_b - I_a), dS \quad (24.58)$$

$$I_s = 2\pi^2 sv v^2 u_o^2 = \frac{P_s^2}{sv}, \quad (24.54)$$

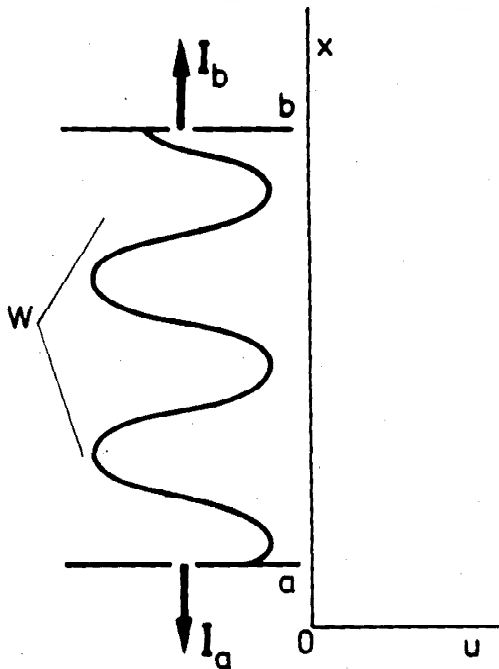
kde  $P_s$  je střední hodnota přetlaku.

24.20

Hybnost přenášená vlněním je

$$p = \frac{W}{v}, \quad (24.55)$$

kde  $W$  a  $p$  značí energii a hybnost vlny v určitém objemu.



Obr. 24.18 K odvození vztahu pro intenzitu vlnění

kde veličiny  $W$  a  $I$  jsou určeny vztahy

$$W = \frac{sv^2 dS}{2} \int_a^b \left[ \frac{1}{v^2} \left( \frac{\delta u}{\delta t} \right)^2 + \left( \frac{\delta u}{\delta x} \right)^2 \right] dx \quad (24.59)$$

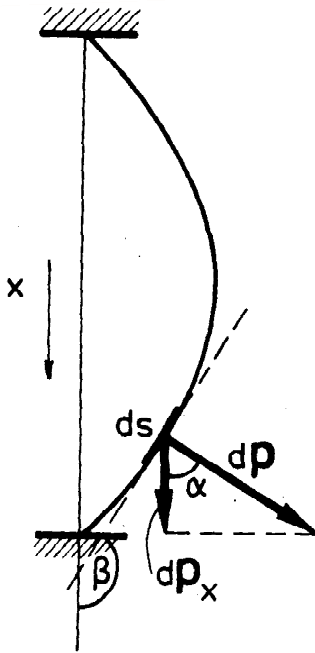
$$I = -sv^2 \frac{\delta u}{\delta t} \frac{\delta u}{\delta x}. \quad (24.60)$$

Rovnice (24.58) má jednoduchou interpretaci - představuje zákon zachování energie. Pokles celkové energie vlnění za jednotku času v intervalu  $\langle a, b \rangle$  se rovná energii, která za jednotku času odejde z této oblasti v místech  $a$  a  $b$  do okolí. Jestliže nás zajímá množství energie šířící se jen jedním směrem, např. ve směru osy  $x$ , potom rovnice (24.58) nabývá tvar

$$\begin{aligned} \frac{1}{dS} \frac{\delta W}{\delta t} &= \frac{\delta W}{\delta V} \frac{\delta x}{\delta t} = w v = \\ &= I = -sv^2 \frac{\delta u}{\delta t} \frac{\delta u}{\delta x}, \end{aligned} \quad (24.61)$$

z kterého ihned vyplývá vztah pro intenzitu vlnění  $I = w v$ . V trojrozměrném prostředí má význam hustoty daného prostředí a veličina  $I$  nabývá význam vyplývající z definice 24.19.

Shora zavedené veličiny, energie  $W$ , hustota energie  $w$  a intenzita vlnění jsou při konkrétním vlnění funkcí času. Z hlediska měření těchto veličin



Obr. 24.19 K odvození vztahu pro hybnost přenášenou vlněním

je výhodné pracovat se středními hodnotami těchto veličin. V případě harmonické vlny  $u = u_0 \sin \omega (t - x/v)$  dostaneme pro okamžitou hodnotu intenzity vlnění vztah

$$I = sv u_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

a pro její střední hodnotu

$$I_s = \frac{1}{T} \int_0^T I dt$$

s ohledem na vztah  $\omega = 2\pi v$  a rovnici

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) dt = \frac{1}{2}$$

výsledek

$$I_s = 2\pi^2 sv v^2 u_0^2,$$

což je prvá část vztahu (24.54), který jsme měli dokázat.

Druhá formulace vztahu pro intenzitu vlnění harmonické zvukové vlny dostaneme hned, jestliže na základě definice přetlaku (24.48) a z rovnice (24.39) vyjádříme střední hodnotu druhé mocniny přetlaku

$$p_s^2 = 4\pi^2 s^2 v^2 v^2 u_0^2 \int_0^T \cos^2 \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) dt = 2\pi^2 s^2 v^2 u_0^2 v^2.$$

Podle těchto výsledků je intenzita vlnění úměrná druhé mocnině jeho kmitočtu a amplitudy.

Důležitý vztah pro hybnost přenášenou vlněním (24.55) odvodíme tak, že určíme nejprve složku hybnosti  $dp_x$ , kterou element vlnícího se prostředí, např. struny, je schopen odevzdat při interakci částici prostředí, např. struny, je schopen odevzdat při interakci částici prostředí. Na základě obr. 24.19 můžeme psát

$$dp_x = dp \cos \alpha = dp \cos \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right) = -dp \sin \beta,$$

takže pro malé úhly  $\sin \beta \doteq \tan \beta = \delta u / \delta x$  je

$$dp_x = -dp \frac{\delta u}{\delta x} = -dm \frac{\delta u}{\delta t} \frac{\delta u}{\delta x} = -s \frac{\delta u}{\delta t} \frac{\delta u}{\delta x} dx.$$

Celková hybnost, kterou může vlna z intervalu  $\langle a, b \rangle$  přenést je proto

$$P_x = -s \int_a^b \frac{\delta u}{\delta t} \frac{\delta u}{\delta x} dx.$$

(24.62)

Pro monochromatickou vlnu šířící se např. ve směru osy  $x$ , platí rovnice

$$\frac{\delta u}{\delta t} = -v \frac{\delta u}{\delta x},$$

takže platí i

$$P_x = \frac{s}{v} \int_a^b \left( \frac{\delta u}{\delta t} \right)^2 dx.$$

Obdobně pak můžeme psát pro energii na základě (24.59)

$$W = s \int_a^b \left( \frac{\delta u}{\delta t} \right)^2 dx.$$

Porovnáním obou posledních vztahů dostaneme přímo vztah (24.55), který jsme měli dokázat.

**Poznámka:**

Ze způsobů odvození vztahů v této části se dá očekávat, že by měly platit pro každé vlnění, nejen akustické. Skutečnost je však taková, že i pro akustické vlnění platí jen přibližně, protože jsme předpokládali nezávislost stlačitelnosti na tlaku, což platí jen pro malé amplitudy. V souvislosti s objevením tzv. kvantové povahy elektromagnetického vlnění bylo potřebné vztahy korigovat.