

## 21 MAGNETICKÉ POLE

Lorentzova síla, Ampérův zákon silového působení  
 Siotův-Savartův zákon, Ampérův zákon celkového proudu  
 Síly v magnetickém poli  
 Magnetické pole v reálném látkovém prostředí  
 Indukční tok

Již v úvodu ke klasické teorii pole jsme uvedli, že fyzikální pole mají svou příčinu v primárních vlastnostech základních částic látky: gravitační pole v jejich hmotnosti, elektrické pole v jejich elektrickém náboji a magnetické pole v jejich magnetickém momentu. Jak uvidíme, magnetické pole vzniká i jako následek pohybu elektrického náboje, proto situace v magnetickém poli není zcela analogická situaci v gravitačním poli, ale je přirozeným důsledkem aplikace speciální teorie relativity.

### 21.1 Lorentzova síla, Ampérův zákon silového působení

Již skutečnost, že se jako základní charakteristika základních částic látky s ohledem na magnetické jevy uvádí tzv. magnetický moment (a ne např. magnetický "náboj") nasvědčuje tomu, že elementární zdroje magnetismu jsou analogy elektrických dipólů. Analogická definice magnetického momentu by však předpokládala existenci dvou samostatných základních množství magnetizmu, např. kladného a záporného. Doposud se takový magnetický "náboj" nepodařilo izolovat.

Principálním poznatkem v magnetizmu bylo zjištění, že magnetické pole vzniká i v okolí vodičů protékanych elektrickým proudem. Uzavřený elektrický obvod se tedy rovněž chová jako magnetický dipól, který může mít makroskopické rozměry. Poznatek, že příčinou magnetického pole je pohybující se elektrický náboj, vedl k tomu, že se hledal původ magnetických momentů základních částic látky v rotaci elektrického náboje. Toto úsilí však narazilo na vážné překážky, např. elektrický náboj na "rovniku" elementárních částic by se musel pohybovat větší rychlostí, než je rychlost světla, což by znamenalo porušení základního fyzikálního principu. Rovněž obtížné by bylo vysvětlit nenulový magnetický moment, např. neutronu, který je elektricky neutrální.

S ohledem na uvedené skutečnosti se zdá být nevyhnutelné vycházet i v současnosti z představy, že zdrojem magnetického pole jsou magnetické dipóly a to "primární" (nebo elementární), které souvisí s existencí elementárních částic a "sekundární" (nebo makroskopické), které vznikají pohybem elektrického náboje. Ukážeme v úvodu, že vznik těchto sekundárních, makroskopických magnetických dipólů souvisí s relativistickou transformací elektrostatické síly (věta 21.1 a 21.3).

#### 21.1

Bodový náboj  $Q$  působí ve vakuu na náboj  $q$  v inerciální soustavě  $S$  tzv. Lorentzovou silou, která má tvar (obr. 21.1)

Pro odvození Lorentzovy síly vyšetřme silové působení mezi dvěma náboji  $Q$  a  $q$  v inerciální soustavě  $S'$ , vůči které je náboj  $Q$  v klidu a náboj  $q$  se pohybuje libovolnou rychlostí  $u'$  ( $u' < c$ ).

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{es} + \mathbf{F}_{mg} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{\mu_0 qQ}{4\pi r^3} [\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})]. \quad (21.1)$$

Síla  $\mathbf{F}_{es}$  je elektrostatičká síla,  $\mathbf{F}_{mg}$  je elektrodynamická (magnetická síla). Vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  jsou rychlosti nábojů  $q$  a  $Q$  vzhledem k inerciální soustavě  $S$  a  $\mathbf{r}$  je polohový vektor náboje  $q$  vzhledem k  $Q$ .

### 21.2

Proudový element je součin intenzity protékajícího proudu  $I$  a diferenciální délky proudovodiče  $ds$ , tj. součin  $I ds$  (obr. 21.2). Délkový element  $ds$  a tím i proudový element orientujeme ve směru proudu.

### 21.3

Ampérův zákon silového působení: Element proudovodiče  $I_1 ds_1$  působí na element proudovodiče  $I_2 ds_2$  (obr. 21.3) silou

$$d^2 \mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left| I_2 ds_2 \times \frac{(I_1 ds_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} \right|, \quad (21.2)$$

kde  $\mathbf{r}_{12}$  je polohový vektor proudovodiče  $I_1 ds_1$  vzhledem k proudovodiči  $I_2 ds_2$  a  $\mu_0$  je permeabilita vakua. Permeabilita vakua  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ m kg s}^{-2} \text{ A}^{-2}$  vyplývá z definice jednotky proudové intenzity (definice ve 4. kapitole) založené na zákoně (21.2).

### 21.4

Permeabilita vakua  $\mu_0$  a permitivita vakua  $\epsilon_0$  splňují vztah

$$c = \frac{1}{(\mu_0 \epsilon_0)^{\frac{1}{2}}}, \quad (21.3)$$

kde  $c$  je rychlost šíření elektromagnetických vln ve

Podle zobecněného Coulombova zákona, který vyplývá z neměnnosti náboje při přechodu z jedné inerciální soustavy do druhé, budou na sebe oba náboje působit elektrostatičkou (Coulomb) silou

$$\mathbf{F}_{es} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}.$$

Přejdeme-li do inerciální soustavy  $S$ , v níž má náboj  $Q$  rychlost  $\mathbf{v}$  a částice s nábojem  $q$  rychlost  $\mathbf{u}$ , musíme provést transformaci síly  $\mathbf{F}_{es}$  podle vztahu (16.38), čímž získáme vztah (21.1).

Pro odvození Ampérova zákona silového působení (21.2) si představme dva elektricky neutrální (tj. nenabitě) vodiče (obr. 21.3), v kterých pro jednoduchost předpokládáme pohyb kladných nábojů rychlostí  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{u}$ , záporné náboje necht' jsou nepohyblivé. Intenzity proudů ve vodičích můžeme vyjádřit na základě definic (20.1) a (20.3)

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{dq}{dt} = \rho v S_1 \\ a \\ I_2 &= \frac{dq}{dt} = \rho u S_2. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Celkový pohybující se náboj  $dQ$  obsažený v elementu vodiče  $ds_1$  je  $dQ = \rho S_1 ds_1$  a celkový volný náboj  $dq$  v elementu vodiče  $ds_2$  je  $dq = \rho S_2 ds_2$ . Dále platí

$$\mathbf{v} = a \mathbf{s}_1 / at \quad a \quad \mathbf{u} = a \mathbf{s}_2 / at. \quad (21.5)$$

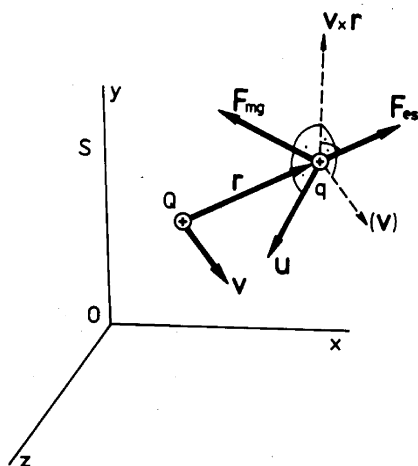
Spojením rovnic (21.4) a (21.5) získáme pro proudové elementy

$$\begin{aligned} aQ \mathbf{v} &= I_1 a \mathbf{s}_1 \\ a \\ dq \mathbf{u} &= I_2 a \mathbf{s}_2. \end{aligned} \quad (21.6)$$

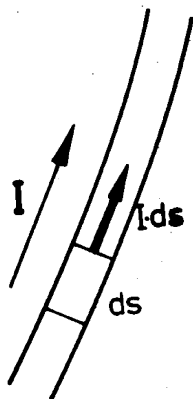
Dosadíme-li rovnice (21.6) do vztahu (21.1) získáme vztah pro sílu mezi dvěma proudovodiči.

Podle Ampérova zákona silového působení (21.2) se dva rovnoběžné proudové elementy

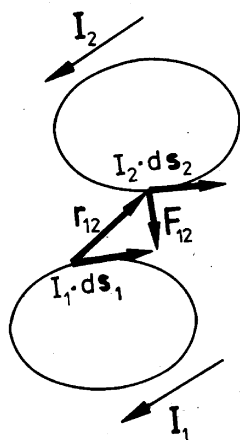
vakuu.



Obr. 21.1 K objasnění směru a orientace magnetické síly



Obr. 21.2 K definici proudového elementu



Obr. 21.3 Význam symbolů vystupujících v Ampérově zákonu silového působení

přitahují, dva nesouhlasné rovnoběžné elementy odpuzují a dva elementy na sebe kolmé na sebe silově nepůsobí.

Ze zákona (21.2) dále vyplývá, že uzavřený obvod 1 působí na element proudovodiče  $I_2 ds_2$  silou

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} ds_2 \times \phi \frac{as_1 \times r}{r^3}. \quad (21.7)$$

Uzavřený obvod  $\ell_1$  s proudem  $I_1$  působí na uzavřený obvod  $\ell_2$  s proudem  $I_2$  silou

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \phi ds_2 \times \phi \frac{as_1 \times r}{r^3}. \quad (21.8)$$

Tuto sílu můžeme experimentálně měřit a tím ověřit Ampérův zákon (21.2).

AMPÉRE André Marie (ampér), 1775-1836, francouzský matematik a fyzik, všestranně vzdělaný encyklopedický myslitel. I když větší část svého života se zabýval matematikou, jeho hlavním vědeckým přínosem jsou práce o vzájemném silovém působení proudovodičů. Je objevitelem významných zákonů z této oblasti fyziky, první přesně vymezil pojem elektrického proudu a definoval jeho směr, zavedl pojem severního a jižního pólu magnetu aj. Právem je považován za zakladatele elektrodynamiky. Kromě matematiky a fyziky se zabýval rovněž chemií, botanikou, zoologií a filosofií. Na jeho počest je jeho jménem pojmenována jednotka elektrického proudu.

## 21.2 Biotův - Savartův zákon, Ampérův zákon celkového proudu

Ampérův zákon ve tvaru (21.2) a (21.8) můžeme považovat za analogii Newtonova gravitačního a Coulombova zákona v tomto směru, že zdroj silových účinků spatřuje v magnetických dipólech a předpokládá jejich vzájemné působení na dálku. Víme ale, že žádné působení na dálku bez existence pole není možné. Musíme proto podobně jako v případě předcházejících dvou polí přejít od charakteristik korpuskulárních zdrojů k charakteristice pole mezi nimi (věty 21.5 až 21.10). Tyto charakteristiky pole musí být takové, aby zákony (21.1) a (21.2) byly splněny, protože byly spolehlivě experimentálně ověřeny. K popisu magnetického pole zavedeme proto vektor magnetické indukce.

21.5

Bodový náboj  $Q$  pohybující se v inerciální soustavě  $S$  rychlostí  $\mathbf{v}$  vytváří magnetické pole. Magnetická indukce tohoto magnetického pole  $\mathbf{B}$  v místě  $\mathbf{r}$  je (obr. 21.4)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o Q}{4\pi r^3} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}). \quad (21.9)$$

Magnetická indukce  $\mathbf{B}$  a intenzita elektrického pole  $\mathbf{E}$  téhož náboje  $Q$  pohybujícího se rychlostí  $\mathbf{v}$  v spolu souvisí vztahem

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}). \quad (21.10)$$

Jednotka magnetické indukce  $[B]=kg \ s^{-2}A^{-1}=T$  (tesla).

21.6

Biotův - Savartův - Laplaceův zákon: vektor magnetické indukce  $\mathbf{B}$  elementu proudovodiče  $I ds$  v místě  $\mathbf{r}$  je definován vztahem (obr. 21.5)

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{(I ds \times \mathbf{r})}{r^3}. \quad (21.11)$$

21.7

Velikost vektoru magnetické indukce  $B$  ve středu kruhového závitu poloměru  $r$  protékaného proudem  $I$  je rovna

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o I}{2r}, \quad (21.12)$$

Silové účinky mezi dvěma náboji  $Q$  a  $q$  si můžeme vysvětlit tak, že v okolí obou pohybujících se nábojů se vytváří kromě elektrických polí i pole magnetická, která na sebe působí. Vyšetřme obě pole náboje  $Q$  v místě náboje  $q$  (obr. 21.4). Podle rovnice (21.1) můžeme na základě definice intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$  bodového náboje  $Q$  (19.3) psát pro Lorentzovu sílu

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (21.18)$$

kde jsme zavedli vektor magnetické indukce  $\mathbf{B}$  náboje  $Q$  pohybujícího se rychlostí  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o Q}{4\pi r^3} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}). \quad (21.19)$$

Pro vzájemný vztah obou polí  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  platí na základě srovnání (21.1) a (21.35) vztah (21.10).

Obdobným postupem si můžeme na základě rovnice (21.2) zavést vektor magnetické indukce  $d\mathbf{B}$  proudovodiče  $I_1 ds_1$  v místě proudovodiče  $I_2 ds_2$  (obr. 21.5). Tím získáme vztah pro sílu na element  $ds_2$

$$d^2 \mathbf{F}_{12} = I_2 (ds_2 \times d\mathbf{B}) \quad (21.20)$$

a současně Biotův-Savartův-Laplaceův zákon (21.11).

Stanovme nyní magnetickou indukci ve dvou pro praxi významných případech: ve středu kruhového závitu a v okolí nekonečně dlouhého přímého proudovodiče. V prvním případě (obr. 21.6) je vektor  $ds$  kolmý na vektor  $\mathbf{r}$ , takže můžeme psát

přičemž vektor magnetické indukce je orientován v souladu s Biotovým - Savartovým zákonem.

21.8

Velikost vektoru magnetické indukce  $B$  v okolí nekonečně dlouhého přímého proudovodiče protékaného proudem  $I$  ve vzdálenosti  $a$  je rovna

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi a}. \quad (21.13)$$

21.9

Ampérův zákon celkového proudu (integrální tvar): Křivkový integrál po uzavřené křivce  $\ell$  indukce magnetického pole  $B$  je roven (obr. 21.6)

$$\oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o I, \quad (21.14)$$

kde  $I$  je celkový proud procházející plochou, která je ohraničená křivkou  $\ell$ . Formulace Ampérova zákona celkového proudu v diferenciálním tvaru je

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{i}, \quad (21.15)$$

kde  $i$  je hustota proudu v daném bodě.

21.10

Magnetické indukční čáry jsou takové křivky, jejichž tečna v každém bodě má směr vektoru magnetické indukce  $B$ . Magnetické indukční čáry jsou uzavřené křivky, které nemají konec ani začátek.

21.11

V magnetickém poli platí pro indukční magnetický tok  $\Phi$  uzavřenou plochou (pro tok indukce magnetického pole  $B$  uzavřenou plochou  $S$ )

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (21.16)$$

což je možno psát i v diferenciálním tvaru

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (21.17)$$

Jednotka magnetického indukčního toku  $[\Phi] = [B][dS] = T \cdot m^2 = Wb$  (weber)

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint \frac{r d\mathbf{s}}{r^3} \mathbf{v} = \\ &= \frac{\mu_o I}{4\pi r^2} \oint d\mathbf{s} \mathbf{v} = \frac{\mu_o I}{2r} \mathbf{v}, \end{aligned}$$

kde jednotkový vektor  $\mathbf{v}$  má směr  $d\mathbf{s} \times \mathbf{r}$  a určuje směr magnetické indukce  $B$ . Velikost vektoru magnetické indukce je proto určena vztahem (21.12).

Magnetickou indukci v okolí nekonečně dlouhého přímého proudovodiče vypočítáme tak, že jako nezávislou integrační proměnnou zvolíme úhel  $\alpha$  (obr. 21.7). Podle tohoto obrázku je možno psát

$$s = -a \text{ctg } \alpha,$$

takže

$$ds = \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

a dále platí

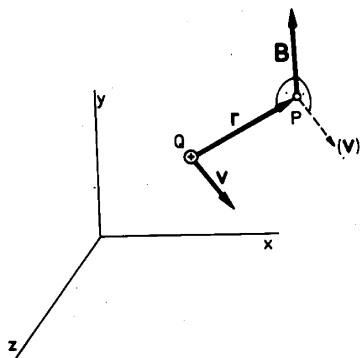
$$r = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Magnetická indukce v bodě P je tedy, uvážíme-li směr vektoru  $d\mathbf{s} \times \mathbf{r}$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds \sin \alpha}{r^2} = \\ &= \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \alpha}{a} d\alpha = \frac{\mu_o I}{2\pi a}, \end{aligned}$$

což je vztah (21.13)

Pomocí předchozího výsledku můžeme lehce zjistit sílu mezi dvěma paralelními proudovodiči (obr. 21.8). Magnetická indukce v libovolném místě vodiče 2 má velikost  $B = \mu_o I_1 / 2\pi a$  a směřuje naznačeným směrem. Vzhledem ke kolmosti vektorů  $d\mathbf{s}_2$  a  $B$  (obr. 21.8) bude využitím zákona (21.2) pro velikost síly na délku  $L$  vodiče 2 platit



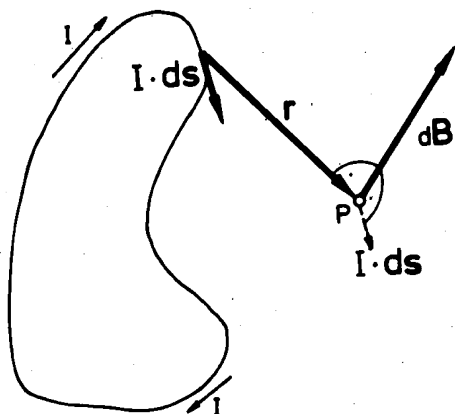
Obr. 21.4 K zavedení magnetické indukce pohybujícího se náboje

$$F = \int dF = \int_0^L BI_2 ds_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi a}$$

Pomocí předchozího vztahu je definována jednotka proudové intenzity 1A (kapitola 4).

Vypočítáme ještě křivkový integrál magnetické indukce v okolí nekonečného přímého vodiče, přičemž integrační křivku zvolme pro jednoduchost kruhovou a veďme ji tak, aby protínala rovinu závitu a její střed ležel na vodiči (obr. 21.9). Dostaneme výsledek

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= \oint B dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \oint dl = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot 2\pi a = \mu_0 I. \end{aligned}$$



Obr. 21.5 K objasnění symbolů vystupujících v Biotovu - Savartonovu zákonu

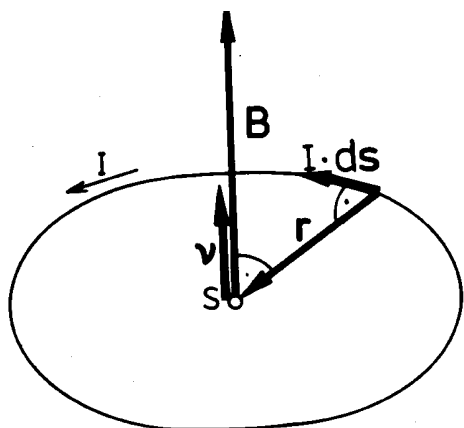
V následujícím článku dokážeme, že tento výsledek platí obecně pro libovolný elektrický okruh a pro libovolnou integrační dráhu, jestliže proudovodič protíná plochu ohraničenou integrační křivkou. Při n-násobném protínání této roviny je hodnota křivkového integrálu n-krát větší. Jestliže proudovodič plochu ohraničenou integrační křivkou neprotíná, je křivkový integrál  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ . To je obsahem Ampérova zákona celkového proudu 21.9. Na rozdíl od elektrického pole je tedy magnetické pole nepotenciálové, jelikož obecně není splněna podmínka  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ .

Použitím Stokesovy věty (7.9) získáme diferenciální tvar Ampérova zákona celkového proudu (21.15).

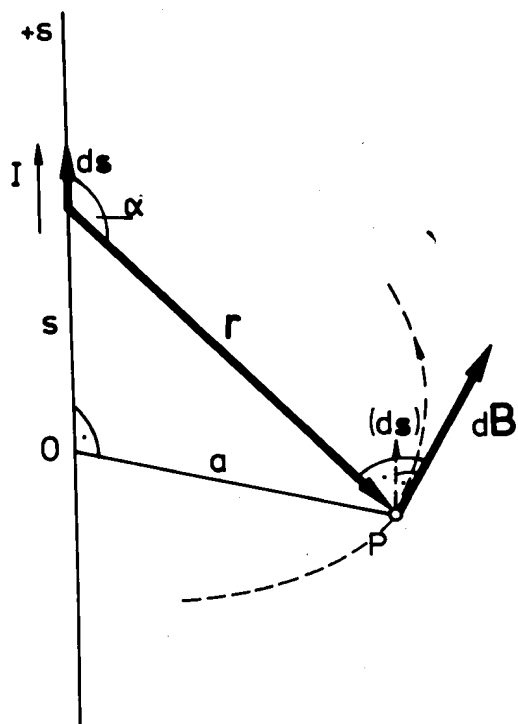
Dalším důležitým zákonem, který odlišuje magnetické pole od pole elektrostatického je obdoba Gaussovy věty pro magnetické pole. Z neexistence magnetického náboje vyplývá, že indukční magnetické čáry jsou uzavřené křivky, a tudíž musí být vždy splněna podmínka

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (21.21)$$

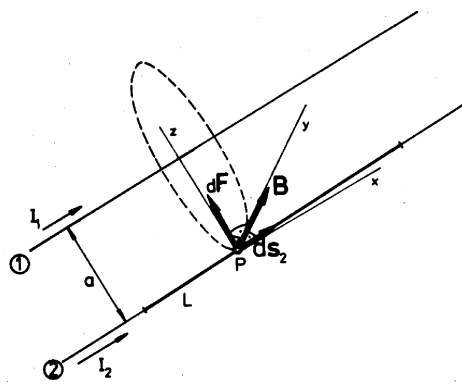
S využitím Gaussovy-Ostrogradského věty (7.7) získáme tvar rovnice (21.21) v diferenciálním tvaru (21.17).



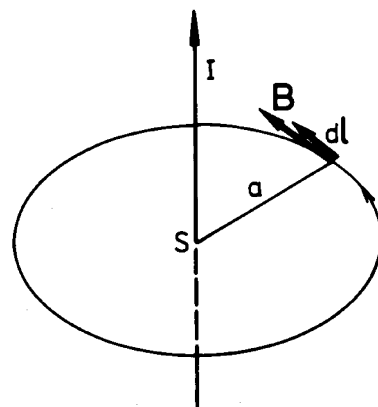
Obr. 21.6 Magnetická indukce ve středu kruhového závitu



Obr. 21.7 Magnetická indukce přímého vodiče



Obr. 21.8 K silovému působení mezi dvěma paralelními proudovodiči



Obr. 21.9 K Ampérovu zákonu celkového proudu

BIOT Jean Baptist, 1774-1862, vystudoval matematiku, fyziku a astronomii. Jeho jméno nese (spolu se jménem F.Savarta) zákon určující indukci magnetického pole v okolí proudovodiče. Méně známé jsou jeho práce z jiných oblastí fyziky (astronomie, vedení tepla), resp. z analytické geometrie.

SAVART Félix (savár), 1791-1841, francouzský lékař a fyzik. Zabýval se akustikou, optikou a elektromagnetismem. Spolu s J.B.Biotem formuloval zákon o magnetickém působení elementu proudovodiče (Biotův-Savartův zákon).

TESLA Nikola, 1856-1943, srbský vědec v oblasti elektro a radiotechniky. Studoval v Grazu a v Praze. Pracoval v Budapešti, Paříži a od r. 1884 ve Spojených státech. Vynalezl řadu přístrojů jako elektrický generátor, vysokofrekvenční transformátor (transformátor Teslův) aj. Zabýval se rovněž možnostmi bezdrátového přenosu signálů a energie. R. 1899 předvedl žárovky a elektrické motory poháněné energií přenášené elektromagnetickými vlnami. Postavil r. 1899 radiový vysílač s výkonem 200 kW. Na jeho počest je pojmenována jednotka indukce magnetického pole jeho jménem.

### 21.3 Magnetický dipól a soustava magnetických dipólů

I přes rozdílnost elektrického a magnetického pole (neexistence magnetického náboje) je často užitečné při výpočtu magnetických polí sledovat postup, který jsme přijali v elektrostatickém poli, a to zavedení pojmu dipólu. V tomto článku si zavedeme magnetický dipól a magnetický moment (věta 21.12).

Dále víme, že jako charakteristiku jak gravitačního, tak i elektrostatického pole bylo velmi užitečné zavést pojem potenciálu jako skalární funkci polohy, pomocí které můžeme určit např. intenzitu elektrického pole vztahem  $E = -\text{grad } V$ . Vzhledem k tomu, že magnetické pole není potenciálové, nelze zavést skalární magnetický potenciál obecně a jednoznačně, ale jen v určitých zvláštních případech (věty 21.13 a 21.14).

Větší význam pro magnetické pole má tzv. vektorový potenciál (věta 21.17), který splňuje podmínku jednoznačnosti a umožňuje nalézt vektor magnetické indukce v každém místě prostoru.

21.12

Magnetický dipól je charakterizován magnetickým momentem  $m$ . Definice magnetického momentu

$$\mathbf{m} = I \, d\mathbf{S}, \quad (21.21)$$

se jednoznačně týká proudové smyčky o ploše  $dS$  obtékané proudem  $I$ . Směr vektoru  $d\mathbf{S}$  volíme ve shodě se směrem proudu  $I$  tak, aby splňoval pravidlo  $d\mathbf{S}^0 \equiv \mathbf{v} = \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\tau}$  (obr. 21.10), kde  $\boldsymbol{\rho}$  a  $\boldsymbol{\tau}$  jsou jednotkové vektory. Jednotka magnetického momentu je  $[m] = A \, m^2$ .

21.13

Skalární magnetický potenciál splňuje rovnici

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \, \text{grad } V_m. \quad (21.22)$$

Jednotka skalárního magnetického potenciálu je  $[V_m] = A$ .

21.13

Skalární magnetický potenciál splňuje rovnici

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \, \text{grad } V_m. \quad (21.22)$$

Jednotka skalárního magnetického potenciálu je  $[V_m] = A$ .

Výraz pro skalární potenciál magnetického dipólu vyplývá z formální shody elektrického pole elektrického dipólu a magnetického pole elektrického dipólu. Rovnici (21.23) proto můžeme psát pouze formálním přepisem rovnice (19.22), v které jsme pouze zaměnili elektrický moment  $p$  magnetickým momentem  $m$ . Proto i vektor  $\mathbf{B}/\mu_0$  odvozený na základě definice (21.22) bude mít obdobný tvar jako rovnice (19.32), popisující intenzitu elektrického pole dipólu. Magnetická indukce magnetického dipólu pak bude (analogicky s elektrickým dipólem /19.32/)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right]. \quad (21.30)$$

Na základě obdobného srovnání s elektrickým polem soustavy dipólů (19.40) můžeme psát pro skalární magnetický potenciál  $V_m$  uzavřeného obvodu protékaného proudem  $I$

$$V_m = \pm \frac{\Omega I}{4\pi},$$

kde  $\Omega$  je prostorový úhel, pod kterým vidíme obvod z daného místa.

Z předcházejícího vyplývá další možné odvození Ampérova zákona celkového proudu (21.14) (obr. 21.11). Provádíme-li křivkový integrál po uzavřené křivce vektoru indukce magnetického



21.14

Magnetický potenciál  $V_m$  magnetického dipólu v bodě  $\mathbf{r}$  (analogicky s elektrickým potenciálem elektrického dipólu) je

$$V_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (21.23)$$

Magnetický potenciál uzavřeného elektrického obvodu protékaného proudem je (analogicky s elektrickým potenciálem elektrické dvojvrstvy)

$$V_m = \pm \frac{\Omega I}{4\pi}, \quad (21.24)$$

kde  $\Omega$  je prostorový úhel, pod kterým vidíme uzavřený obvod z daného bodu.

21.15

V homogenním magnetickém poli indukce  $\mathbf{B}$  působí na magnetický dipól dvojice sil s momentem  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (21.25)$$

Kromě toho v nehomogenním magnetickém poli působí na magnetický dipól síla  $\mathbf{F}$ , jejíž velikost je

$$\mathbf{F} = \mathbf{m} \operatorname{grad} \mathbf{B}. \quad (21.26)$$

21.16

Potenciální energie magnetického dipólu v magnetickém poli o indukci  $\mathbf{B}$

$$W_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}. \quad (21.27)$$

21.17

Vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  magnetického pole je definován rovnicí

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (21.28)$$

pole  $\mathbf{B}$  a protíná-li integrační křivka plochu, ohraničenou uzavřeným obvodem s proudem (obdobu vztahu 19.44) je

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_o \oint_l \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} \cdot d\mathbf{r} = \mu_o (V_{m1} - V_{m2}) = \mu_o I \quad (21.31)$$

kde jsme využili toho, že magnetický potenciál se při průchodu plochou ohraničenou proudem  $I$  mění skokem

$$\Delta V_m = V_{m1} - V_{m2} = I \Delta \Omega / 4\pi = (I/4\pi) / 4\pi = I, \quad \text{protože změna prostorového úhlu } \Delta \Omega = 4\pi.$$

Vztahy (21.25), (21.26) a (21.27) získáme na základě formální shody polí elektrického a magnetického dipólu podle vztahů (19.23), (19.24) a (19.25).

Vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  (21.28) je jednoznačnou funkcí polohy a skutečně definuje magnetickou indukci  $\mathbf{B}$ , protože platí což je Biotův - Savartův - Laplaceův zákon.

Vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  umožňuje výpočet magnetických polí i např. uvnitř vodičů. Využijeme-li rovnosti  $I ds = \rho v d\tau = i d\tau$ , kde  $d\tau$

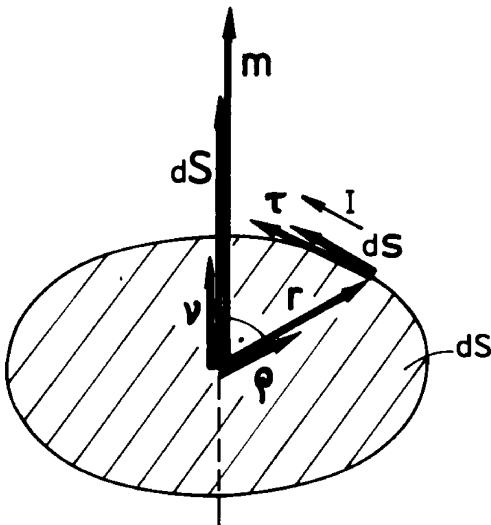
$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \nabla \times \oint \frac{I ds}{r} = \\ &= \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint \nabla \times \frac{ds}{r} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times ds = \\ &= \frac{-\mu_o I}{4\pi} \oint ds \times \left( -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint \frac{ds \times \mathbf{r}}{r^3} = \end{aligned}$$

je element objemu a dosadíme do rovnice (21.29), získáme pro vektorový potenciál

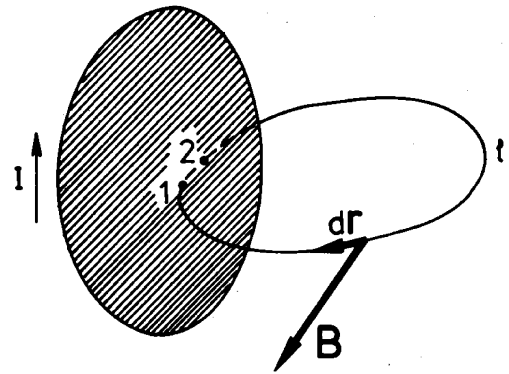
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint \frac{i d\tau}{r}. \quad (21.32)$$

jednotka vektorového potenciálu  $[A] = \text{Wb m}^{-1}$ .  
 Vektorový potenciál  $A$  libovolného uzavřeného  
 obvodu protékaného proudem  $I$  v místě  $r$  je roven

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I ds}{r}. \quad (21.29)$$



Obr. 21.10 K definici magnetického momentu magnetického dipólu



Obr. 21.11 K odvození Ampérova zákona celkového proudu

#### 21.4 Síly v magnetickém poli

Zavedením pojmu magnetická indukce do vztahu pro vzájemné působení mezi dvěma pohybujícími se náboji do Ampérova zákona silového působení mezi dvěma elementy proudovodičů jsme vlastně přenesli vzájemné působení nábojů nebo proudovodičů do prostředí mezi nimi - magnetického pole. Každý pohybující se elektrický náboj je tedy zdrojem magnetického pole, takže vždy, když dojde k vzájemnému prolínání těchto polí, vznikne silový účinek. Podle toho, každé magnetické pole působí určitou silou na náboj v pohybu (věta 21.18) a na proudovodič protékaný proudem (věta 21.19).

21.18  
 Elektrické pole intenzity  $E$  a magnetického pole indukce  $B$  působí na pohybující se elektrický náboj tzv. Lorentzovou silou

$$F = q(E + v \times B), \quad (21.30)$$

Vztahy (21.30) a (21.31) byly zavedeny v článku 21.2 rovnicemi (21.18) a (21.20).

Integrací vztahu (21.31) získáme pro uzavřený proudovodič

$$F = I \oint ds \times B.$$

kde  $q$  je velikost náboje a  $v$  jeho rychlost.

21.19

V magnetickém poli o indukci  $\mathbf{B}$  působí na element proudovodiče  $I d\mathbf{s}$  síla

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}. \quad (21.31)$$

21.20

V homogenním magnetickém poli o magnetické indukci  $\mathbf{B}$  nepůsobí na uzavřený proudovodič síla

$$\mathbf{F} = I \oint d\mathbf{s} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (21.32)$$

v nehomogenním poli je tato síla různá od nuly  $|\mathbf{F}| \neq 0$ .

21.21

V homogenním magnetickém poli o magnetické indukci  $\mathbf{B}$  působí na uzavřený proudovodič moment síly

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (21.33)$$

kde  $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$  je magnetický moment a  $\mathbf{S}$  je vektor plochy vymezené proudovodičem.

Bez odvození jsou výsledky této integrace pro homogenní a nehomogenní magnetické pole uvedeny ve větě 20.20, podle které v homogenním magnetickém poli je výsledná síla působící na uzavřený proudovodič rovna nule. Proto při měření magnetických momentů je nutno použít nehomogenního magnetického pole (tak je tomu např. při Sternově Gerlachově pokusu).

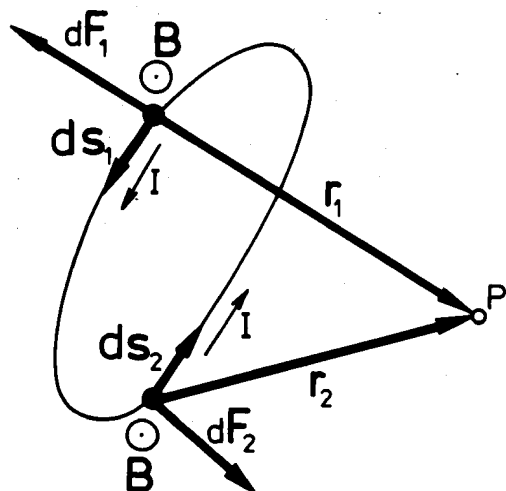
Moment sil působící na uzavřený proudovodič vzhledem k libovolnému bodu se však ani v homogenním poli nerovná nule (obr. 21.12). Jeho hodnota je

$$\mathbf{M} = \oint \mathbf{r} \times (I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}). \quad (21.34)$$

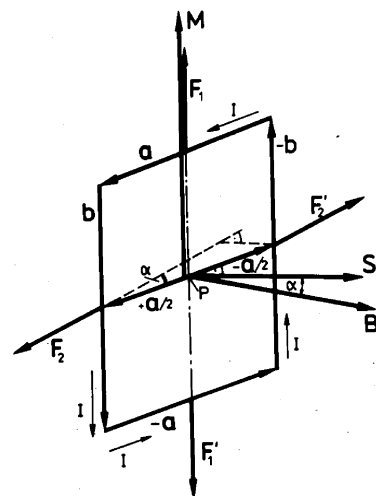
Abychom našli vhodnější vyjádření této důležité veličiny, předpokládejme uzavřený obvod ve tvaru obdélníka určeného vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  (obr. 21.13) a vypočteme moment sil vzhledem k některému bodu  $P$  ležícímu na ose závitu. Jelikož je magnetické pole podle předpokladu homogenní, platí pro celkovou sílu  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}'_2 = \mathbf{0}$  a dále vzhledem k tomu, že je splněno  $\mathbf{B} \perp \mathbf{b}$  můžeme psát pro moment síly

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \left( \frac{\mathbf{a}}{2} \times \mathbf{F}_2 \right) + \left( -\frac{\mathbf{a}}{2} \times \mathbf{F}'_2 \right) = \\ &= \frac{\mathbf{a}}{2} \times (I\mathbf{b} \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{a}}{2} \times (-I\mathbf{b} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) I \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

Jestliže uvážíme, že součin  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{S}$  definuje vektor plochy vytvořené proudovodičem, dostaneme ihned vztah (21.33). Homogenní magnetické pole se tedy snaží natočit uzavřený proudovodič tak, aby vektory  $\mathbf{S}$  a  $\mathbf{B}$  byly rovnoběžné. Je možno dokázat, že tento vztah platí i obecně. Vztah (21.31) pro uzavřený proudovodič je obdobou vztahu (21.25) pro elementární magnetický dipól.



Obr. 21.12 K výpočtu momentu sil na proudovou smyčku libovolného tvaru v magnetickém poli



Obr. 21.13 K výpočtu momentu sil na proudovou smyčku v magnetickém poli

### 21.5 Magnetické pole v reálném látkovém prostředí

Pod pojmem "reálné látkové prostředí" rozumíme prostor, v kterém se nacházejí látkové objekty, tj. atomy a molekuly, případně i volné elektrony. Atomy a molekuly se vyznačují zpravidla nenulovým magnetickým momentem. Tyto momenty, které se za nepřítomnosti vnějšího pole vzájemně úplně kompenzují, ve vnějším magnetickém poli (buzeném např. makroskopickými proudy) se stáčí tak, aby jejich magnetické momenty byly rovnoběžné se směrem působení vnějšího pole. Podobný, avšak podstatně efektivnější účinek má vnější magnetické pole na látky, v kterých se již bez přítomnosti magnetického pole celé oblasti (tzv. domény) vyznačují se stejně orientovanými elementárními magnetickými dipóly (souvisí s tzv. spiny elektronů). V obou případech se tedy původní magnetické pole zesiluje. Příslušné jevy nazýváme paramagnetické resp. feromagnetické.

Je však možný i další proces, který je analogický polarizaci dielektrika. Jestliže prostředí obsahuje volné elektrony, potom v důsledku magnetické síly vyjádřené vztahem (21.30) se tyto částice začínají pohybovat po kruhových (přesněji šroubovitých drahách). Tyto dráhy představují uzavřený (nebo částečně uzavřený) proudový obvod, kterému odpovídá nenulový magnetický moment. Jeho vektor směřuje, jak je možno se lehce přesvědčit, proti vektoru indukce vnějšího magnetického pole, takže výsledné magnetické pole je, podobně jako v dielektriku, slabší než původní magnetické pole. Tyto jevy nazýváme diamagnetické.

Jako charakteristiku magnetického pole vytvořeného magnetizovaným prostředím zavedeme vektor magnetizace  $\mathbf{M}$  (věta 21.22). Uvidíme dále, že funkci vektoru indukce  $\mathbf{D}$  v elektrickém poli bude mít vhodně definovaný vektor intenzity magnetického pole  $\mathbf{H}$  (věta 21.25).

21.22

Vektor magnetizace daného prostředí  $\mathbf{M}$  je definován jako objemová hustota magnetického momentu

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{d\tau}. \quad (21.35)$$

Podobně jako v elektrickém poli, kdy jsme si nahradili polarizované těleso zdánlivými náboji, které byly rozmístěny jak v objemu, tak i na povrchu tělesa, ukazuje se i v magnetickém poli účelné nahradit magnetizované těleso zdánlivými proudy. Odvodíme rozmístění těchto proudů na základě energie magnetického dipólu v

Jednotka magnetizace je  $[M]=A\ m^{-1}$ .

21.23

Při magnetizaci magnetik vzniká tzv. záporný (Ampérův) proud: Plošná proudová hustota vázaného proudu  $j_A$  na povrchu magnetika je rovna

$$\mathbf{j}_A = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad (21.36)$$

kde jednotka plošné proudové hustoty  $[j]=Am^{-1}$ ,  $M$  je magnetizace a  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor kolmý k plošnému elementu povrchu magnetika  $dS$ . Objemová proudová hustota vázaného proudu  $i_A$  v objemu magnetika je určena vztahem

$$\mathbf{i}_A = \text{rot } \mathbf{M}. \quad (21.37)$$

Jednotka (objemové) proudové hustoty  $[i]=Am^{-2}$

21.24

V tzv. měkkých magnetikách je vektor magnetizace  $\mathbf{M}$  přímo úměrný intenzitě magnetického pole  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (21.38)$$

kde  $\chi_m$  je tzv. magnetická susceptibilita.

21.25

Vektor intenzity magnetického pole  $\mathbf{H}$  je zaveden vztahem

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_o} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (21.39)$$

neboli platí vztah

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_o (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_o \mathbf{H} + \mu_o \chi_m \mathbf{H} = \\ &= \mu_o \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (21.40)$$

kde  $\mu = \mu_o \mu_r = \mu_o (1 + \chi_m)$  je permeabilita prostředí. Podíl

magnetickém poli. Energie magnetického dipólu v magnetickém poli je (21.27)  $W_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$  a energie zmagetovaného magnetika v magnetickém poli je pak  $W_p = \int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} d\tau = \int_V \mathbf{M} \cdot \text{rot } \mathbf{A} d\tau$ , kde jsme využili definice vektorového potenciálu  $\mathbf{A}$ . Z vektorové analýzy víme, že platí  $\mathbf{M} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{M} + \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  (vztah /6.13/), takže bude

$$\begin{aligned} W_p &= \int_V \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{M}) d\tau + \int_V \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{M} d\tau = \\ &= \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S} + \int_V \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{M} d\tau, \end{aligned} \quad (21.44)$$

přičemž jsme v prvním integrálu použili Gauss-Ostrogradského větu (7.7). Stejnou energii bude mít i makroskopický obvod, protékaný makroskopickým proudem

$$W_p = \int_S I d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \int_S I \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot I d\mathbf{s} \quad (21.45)$$

kde jsme v posledním členu využili Stokesovu větu (17.9). Jak již víme, můžeme vyjádřit součin  $I \cdot d\mathbf{s} = i d\tau = \mathbf{j} dS$ , kde  $i$  je (objemová) hustota proudu a  $\mathbf{j}$  je plošná hustota proudu, takže rovnici (21.45) můžeme vyjádřit

$$W_p = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_A dS + \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_A d\tau, \quad (21.46)$$

kde jsme zavedli symbol  $A$  k odlišení Ampérových (vázaných) od volných makroskopických proudů. Srovnáním obou výrazů (21.44) a (21.46) získáme pro plošnou a objemovou proudovou hustotu vázaných (Ampérových) proudů (21.36) a (21.37). Tyto rovnice jsou analogické rovnicím (19.49) a (19.50), které udávaly plošnou a objemovou hustotu vázaného náboje.

Vyšetřme výsledné magnetické pole soustavy,

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} = 1 + \chi_m \quad (21.41)$$

se nazývá relativní permeabilita a má hodnoty  $\mu_r < 1$  pro látky diamagnetické,  $\mu_r \gg 1$  pro látky feromagnetické a  $\mu_r > 1$  pro látky paramagnetické.

21.26

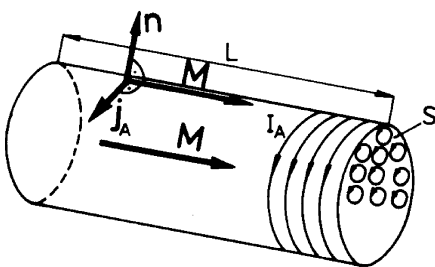
Plošná proudová hustota volného proudu  $j_e$  na povrchu reálného prostředí vyhovuje rovnici

$$\mathbf{j}_o = \mathbf{H} \times \mathbf{n}, \quad (21.42)$$

kde  $\mathbf{n} = d\mathbf{S}/dS$  je jednotkový vektor ve směru vnější normály.

Objemová proudová hustota volného proudu  $\mathbf{i}_o$  v objemu reálného prostředí vyhovuje rovnici

$$\mathbf{i}_o = \text{rot} \mathbf{H}. \quad (21.43)$$



Obr. 21.14 Vázaný (Ampérov) proud na povrchu magnetovaného válce

tvořené volným a vázaným proudem. Na obr. 21.14 je znázorněno magnetikum ve tvaru válce homogenně magnetizované ve směru podélné osy válce s vektorem magnetizace  $\mathbf{M}$ . Podle věty 21.23 si můžeme tento magnetizovaný válec nahradit solenoidem s plošnou proudovou hustotou  $\mathbf{j}_A = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$ . Pro jednoduchost nejprve stanovme magnetické pole v případě tohoto homogenně magnetizovaného tenkého válce (obr. 21.15) na jehož povrchu protéká makroskopický proud  $I_o$ . Podle Ampérova zákona celkového proudu (21.14) můžeme psát pro křivkový integrál po uzavřené křivce  $\ell$  (obdélník ABCD)

$$\oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o (NI_o + I_A), \quad (21.47)$$

kde na pravé straně je  $N$  počet závitů solenoidu a  $I_o$  je volný proud a  $I_A$  je vázaný proud. Vzhledem k tomu, že se jedná o tenký válec,  $d \ll L$ , můžeme předpokládat, že magnetická indukce vně válce je zanedbatelná vzhledem k indukci uvnitř válce. Pak můžeme psát

$$B L = \mu_o (NI_o + I_A)$$

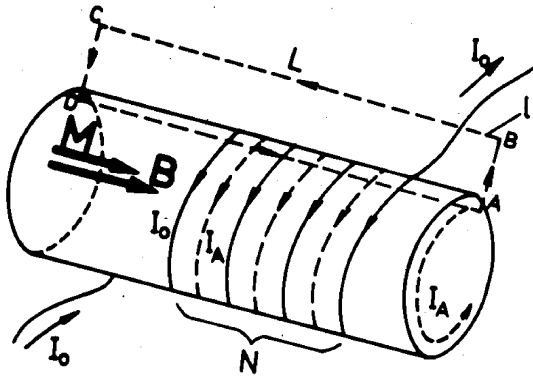
a dále výslednou rovnici

$$B = \mu_o (ni_o + |j_A|) = \mu_o (ni_o + M), \quad (21.48)$$

kde jsme zavedli  $n = N/L$ , což je počet závitů na jednotku délky solenoidu a  $j_A$  je plošná proudová hustota, která má význam proudu na jednotku délky. Z rovnice (21.48) je zřejmé, že platí

$$nI_o = \frac{1}{\mu_o} B - M. \quad (21.49)$$

Zavedeme novou vektorovou veličinu - intenzitu



Obr. 21.15 K výpočtu magnetické indukce solenoidu s jádrem z magnetika

pole  $H$ , jejíž absolutní velikost v tomto případě položíme  $|H|=ni_0$ , takže rovnici (21.49) můžeme psát ve tvaru

$$H = \frac{1}{\mu_0} B - M. \quad (21.50)$$

Vyšetřme dále magnetické pole soustavy, tvořené nehomogenně magnetizovaným tenkým válcem, v kterém protékají volné objemové proudy s proudovou hustotou  $i_0(r)$ . Vliv povrchu tělesa zatím zanedbejme. Magnetické pole je buzeno všemi proudy, tj. jak volnými, tak i vázanými. Celková hustota  $i$  je pak

$$i = i_0 + i_A. \quad (21.51)$$

S uvážením rovnice (21.51) můžeme psát Ampérův zákon celkového proudu (21.14) ve tvaru

$$\oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{\sigma} (\mathbf{i}_0 + \mathbf{i}_A) \cdot d\mathbf{S}. \quad (21.52)$$

Jestliže využijeme k úpravě integrálu na levé straně Stokesovu větu a vztah (21.37) získáme porovnáním obou stran

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{i}_0 + \text{rot} \mathbf{M}), \quad (21.53)$$

takže platí rovněž i rovnice

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) &= \mu_0 \text{rot} \mathbf{H}, \\ \text{neboli} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{aligned}$$

kde jsme položili

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i}_0,$$

což je rovnice (21.43), která představuje jinou formulaci Ampérovy věty celkového proudu v diferenciálním tvaru. Použitím Stokesovy věty pak získáme i integrální tvaru Ampérova zákona celkového proudu,

$$\oint_{\ell} \mathbf{H} \cdot d\ell = I_o, \quad (21.55)$$

kteřá se od formulace (21.14) odlišuje jen tím, že místo magnetické indukce  $\mathbf{B}$  vystupuje intenzita magnetického pole  $\mathbf{R}$  a na pravé straně nestojí celkový proud  $I=I_o+I_A$ , ale pouze volný proud  $I_o$ . Z rovnice (21.54), která je vektorovým tvarem rovnice (21.50) vyplývá i rovnice (21.40).

Proveďme diskusi rovnice (21.40) na základě dvou dosud diskutovaných případů (homogenní tenký válec a nehomogenní tenký válec), v kterých bylo možno zanedbat vliv povrchu tělesa na výsledné magnetické pole. Rovnici (21.40)

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_A = \mu_o \mathbf{H} + \mu_o \mathbf{M} \quad (21.56)$$

můžeme v těchto zvláštních případech vyložit i tak, že výsledná magnetická indukce  $\mathbf{B}$  je složena z příspěvků od makroskopických proudů  $\mathbf{B}_I = \mu_o \mathbf{H}$  a z příspěvků od mikroskopických magnetických momentů  $\mathbf{B}_A = \mu_o \mathbf{M}$ . Jinými slovy, vzhledem k tomu, že vektor magnetizace  $\mathbf{M}$  má význam objemové hustoty magnetického momentu, můžeme členu  $\mathbf{B}/\mu_o$  připsat formálně význam objemové hustoty magnetického momentu, a to jak makroskopických, tak i mikroskopických proudů. Člen  $\mathbf{H}$  má pak význam objemové hustoty magnetického momentu makroskopických proudů. Toto zjednodušení je možné jen v některých speciálních případech (v neohrazeném prostředí, v toroidu a v dlouhých válcích zmagnetovaných ve směru podélné osy), ve kterých je možno zanedbat rozložení dipólů na povrchu těles. V obecném případě se dá očekávat, že příspěvek povrchu tělesa k výslednému magnetickému poli bude záviset na tvaru tělesa a na záporně vzatém vektoru magnetizace  $\mathbf{M}$ . Rovnice (21.40) pak má tvar

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_A + \mathbf{B}_P = \mathbf{B}_I + \mu_o (\mathbf{M} - \alpha \mathbf{M}) = \mathbf{B}_I + \mu_o N \mathbf{M},$$

kde  $N \leq 1$  je tzv. magnetizační faktor (např. pro toroid a dlouhý válec je  $N=1$ ). Tuto rovnici můžeme formálně ještě upravit na tvar podobný (21.40)

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_I + \mu_o \mathbf{M} - \mu_o (1 - N) \mathbf{M} = (\mathbf{B}_I - \mu_o K \mathbf{M}) + \mu_o \mathbf{M} = \mu_o \mathbf{H} + \mu_o \mathbf{M} \quad (21.57)$$

Vidíme, že první člen  $\mu_o \mathbf{H}$  přestává již mít význam indukce, buzené makroskopickými proudy (ve vakuu) a je oproti ní zmenšen o hodnotu  $\mu_o K \mathbf{M} = \mu_o (1-N) \mathbf{M}$ , kde koeficient  $K$  se nazývá demagnetizační faktor. Jeho hodnota pro pravidelná tělesa je známa, např. pro kouli je  $K=1/3$ , pro dlouhé válce, zmagnetované ve směru jejich podélné osy je  $K=0$ , ve směru kolmém  $K=1/2$  atd. Intenzitu magnetického pole  $\mathbf{H}$  v tomto obecném případě můžeme rovněž stanovit z rovnice (21.43) resp. (21.55), kde vystupují pouze volné proudy, avšak nedá se říci, že závisí pouze na volných proudech.

Platnost vztahu (21.38) vyplývá z úvahy, že výsledný magnetický moment závisí na intenzitě "zorientování" původně chaoticky uspořádaných elementárních magnetických dipólů. Tento orientující účinek je tím větší, čím je větší intenzita magnetického pole. Podobná závislost se pozoruje i v případě, jestliže vnější pole indukuje nové dipóly. Je však zřejmé, že tato závislost může platit jen do určité hodnoty intenzity magnetického pole,



protože při silných magnetujících polích nastane jev saturace. Kromě toho v reálných látkách mohou vznikat jevy související s jejich anizotropií, takže místo vektorové algebry bude nutné používat tenzorovou algebru. Všechny tyto problémy lze však adekvátně řešit až s přihlédnutím ke konkrétním vlastnostem látek, zejména jejich struktury, složení atd.

## 21.6 Indukční tok, podmínky na rozhraní

V teorii jevů souvisejících s magnetickým polem se velmi často používá veličina magnetický tok (věta 21.27). Můžeme ji chápat jako určitou analogii elektrického proudu, takže nepřekvapuje, jestliže v technické praxi na ni navazují i další analogické veličiny: magnetomotorické napětí a magnetický odpor (věta 21.30 a 21.31). Úlohu Ohmova zákona má tzv. Hopkinsov zákon (věta 21.32).

21.27

Magnetický indukční tok definujeme plošným integrálem

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (21.58)$$

Jednotka magnetického indukčního toku je  $[\Phi] = Wb$  (weber).

21.28

Na rozhraní dvou prostředí splňují normálové složky magnetické indukce a tečné složky intenzity magnetického pole podmínku

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (21.59)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = j_o, \quad (21.60)$$

kde  $j_o$  je plošná proudová hustota volného proudu na rozhraní.

21.29

Zákon lomu magnetických indukčních čar: na rozhraní dvou prostředí po kterých neprotékají žádné volné proudy platí pro lom magnetických indukčních čar

Rovnice  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  značí, že magnetické pole nemá zdroje v podobě kladného a záporného magnetického množství, proto magnetické indukční čáry nikde nezačínají a nikde nekončí (obr. 21.17). Soustava indukčních čar procházející zvoleným průřezem  $\Delta S$  tvoří tzv. indukční trubici. Jestliže indukční čára prochází plochami, ohraničenými  $N$  závitů (obr. 21.17) říkáme, že je  $N$ -krátě spřáhnutá s uzavřeným obvodem. V tom případě křivkový integrál intenzity magnetického pole splňuje podle (21.55) rovnici

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = NI = \epsilon_m.$$

Tuto veličinu nazýváme magnetomotorické napětí a označujeme ji  $\epsilon_m$ . Jestliže integrujeme podél magnetické indukční čáry, je  $\mathbf{H} \parallel d\mathbf{r}$ , takže  $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = H \cdot ds$  a jestliže délce kolmý průřez zvolené indukční trubice označíme  $\Delta S$ , je podle definice 21.27  $\Delta\Phi = \mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{S} = B\Delta S = \mu H\Delta S$ , takže platí vztah

$$H = \frac{\Delta\Phi}{\mu \Delta S}. \quad (21.65)$$

$$\epsilon_m = \Phi \frac{ds}{\mu \Delta S} \Delta\Phi = R_m \Delta\Phi$$

Rovnici (21.62) můžeme potom přepsat do tvaru

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (21.61)$$

kde  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  jsou úhly sevřené magnetickou indukční čarou a normálou k rozhraní (obr. 21.16) a  $\mu_1$  a  $\mu_2$  jsou permeability obou prostředí.

21.30

Magnetomotorické napětí  $\epsilon_m$  je definováno křivkovým integrálem intenzity magnetického pole

$$\epsilon_m = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = NI, \quad (21.62)$$

kde  $N$  je počet integrační dráhou obepnutých proudovodičů vytvářejících magnetické pole.

21.31

Magnetický odpor  $R_m$  definujeme vztahem

$$R_m = \oint \frac{ds}{\mu \Delta S}, \quad (21.63)$$

kde  $\mu$  je permeabilita prostředí a  $\Delta S$  je element plochy indukční trubice.

21.32

Hopkinsův zákon: Magnetomotorické napětí v uzavřeném magnetickém obvodu je rovno součinu indukčního toku a magnetického odporu

$$\epsilon_m = R_m \Delta \Phi. \quad (21.64)$$

21.33

Pro skládání magnetických odporů platí stejné zákony jako pro elektrické odpory.

což je rovnice (21.64). Jestliže srovnáme výraz pro magnetický odpor  $R_m = \int ds/\mu \Delta S$  s výrazem pro elektrický odpor (20.5) zjistíme, že permeabilita  $\mu$  zde má význam měrné elektrické vodivosti. Jestliže magnetický obvod sestává z více úseků s rozličnými parametry, můžeme integrál  $\oint (ds/\mu \Delta S)$  rozepsat na tolik integrálů, z kolika úseků se magnetický obvod skládá. Místo rovnice (21.64) platí v tomto případě rovnice

$$\epsilon_m = \sum_i \int \frac{ds}{\mu_i \Delta S_i} \Delta \Phi = \sum_i R_{mi} \Delta \Phi = R_m \Delta \Phi$$

takže při zapojení do serie se jednotlivé magnetické odpory  $R_{mi}$  sčítají. To je v soulase s tvrzením 21.33. Jako příklad na skládání magnetických odporů můžeme uvést častý problém výpočtu magnetické indukce v mezeře železného jádra vloženého do toroidu (obr. 21.18). Magnetický obvod má dvě části: železné jádro průřezu  $S$ , délky  $\ell$  s permeabilitou  $\mu$  a mezeru šířky  $d$ , průřezu  $S$  s permeabilitou  $\mu_o$ . Celkový magnetický odpor magnetického obvodu tedy je

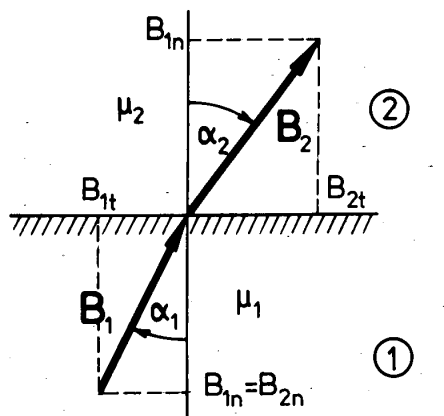
$$R_m = \frac{\ell}{\mu} S + \frac{d}{\mu_o S} = \frac{1}{S} \left( \frac{\ell}{\mu} + \frac{d}{\mu_o} \right),$$

takže příslušný indukční tok je určen vztahem

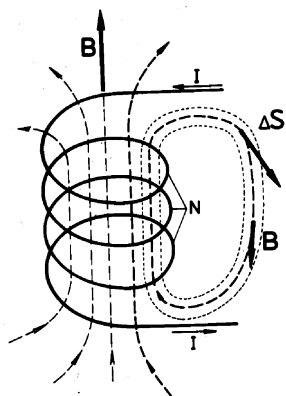
$$\Phi = \frac{\epsilon_m}{R_m} = \frac{NI}{\frac{1}{S} \left( \frac{\ell}{\mu} + \frac{d}{\mu_o} \right)}.$$

Pro indukci magnetického pole v mezeře dostáváme

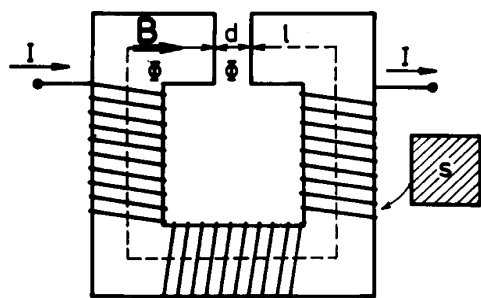
$$B = \frac{\Phi}{S} = \mu_o \frac{NI}{d + \frac{\mu_o \ell}{\mu}}.$$



Obr. 21.16 Lom magnetických indukčních čar na rozhraní dvou prostředí



Obr. 21.17 K zavedení veličiny magnetomotorického napětí



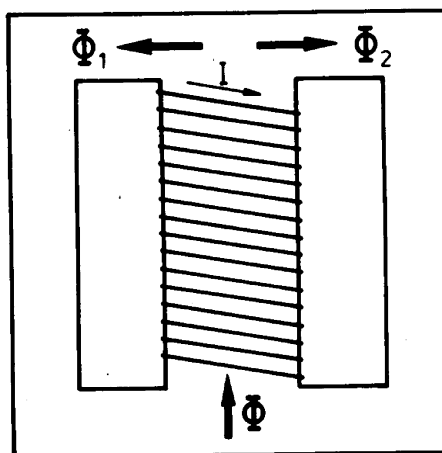
Obr. 21.18 Příklad magnetického obvodu

Příklad na paralelní spojování magnetických odporů je na obr. 21.19. Indukční magnetický tok ve střední části jádra je roven součtu indukčních toků ve větvích. V obou větvích působí stejné magnetomotorické napětí, proto můžeme psát rovnici

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\epsilon_m}{R_{m1}} + \frac{\epsilon_m}{R_{m2}} = \\ &= \epsilon_m \left( \frac{1}{R_{m1}} + \frac{1}{R_{m2}} \right) = \epsilon_m \frac{1}{R_m} \end{aligned}$$

z které vyplývá pravdivost tvrzení 21.33.

Zůstává nám ještě dokázat platnost tvrzení 21.28 a 21.29. Při důkazu zákona lomu elektrických siločar v článku 19.7 jsme využili dvou základních zákonů platných pro elektrické pole na rozhraní dvou dielektrik, s volným nábojem  $Q_0$  a sice  $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_0$  a  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ . Podobné rovnice však platí pro magnetické pole pro rozhraní dvou prostředí protékaného proudem  $I_0$  a sice  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$  a  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_0$ . Rovnice (21.59) a (21.60) stejně jako zákon (21.61) získáme proto obdobným způsobem.



Obr. 21.19 Paralelní řazení magnetických odporů

