

13 DYNAMIKA DOKONALE TUHÉHO TĚLESA

Skládání sil v tuhém tělese
 Pohybová rovnice tuhého tělesa
 Reaktivní pohyb
 Otáčení kolem osy - kyvadlový pohyb
 Moment setrvačnosti a deviační moment
 Ráz dokonale tuhých těles
 Tření

Uvedli jsme již, že představa systému hmotných bodů může postačovat i pro tuhá tělesa, protože tato jsou složena z navzájem pevně svázaných částic - atomů a molekul - která samy velmi dobře vyhovují modelu hmotného bodu. Atomy jsou velmi malé (průměr jejich jader je řádově 10^{-13} cm). Z toho je zřejmé, že všechny zákony odvozené pro systém hmotných bodů budeme moci beze změny aplikovat na pohyb tuhých těles. Abychom se vyhnuli případným komplikacím souvisejícími se změnami meziatomových vzdáleností, zavedeme si pojem dokonale tuhého tělesa (definice 13.1).

13.1 Skládání sil v tuhém tělese

I když to vždy nebudeme zdůrazňovat, budeme mít v této kapitole vždy na mysli dokonale tuhé těleso. Působí-li na dané tuhé těleso více sil, můžeme jejich počet skládáním redukovat. Lehce se však přesvědčíme o tom, že z hlediska pohybu tuhého tělesa nemůžeme všechny síly redukovat jen na jedinou výslednici. Síly znázorněné na obr. 13.1 jsou si rovny, ale mají opačný směr. Součet takových sil je nulový, ale proto, že působí na tuhé těleso v různých bodech, které na přímce neleží, nemůžeme tvrdit, že se jejich účinek vzájemně ruší. Neuvažovali bychom pak o rotaci tuhého tělesa, kterou takové dvě síly mohou vyvolat. Při "redukci" sil působících na tuhé těleso proto musíme postupovat opatrně. Pravidla, která je nutno dodržet, jsou formulována ve větách 13.2 až 13.5.

13.1
 Dokonale tuhé těleso je takové těleso, které nemění svůj tvar ani při působení velmi velkých sil. Dokonale tuhé těleso je tedy nedeforovatelné.

13.2
 Sílu F působící na tuhé těleso můžeme posunout do libovolného bodu ležícího na přímce síly (obr. 13.2).

13.3
 Dvojici sil nazýváme takové dvě stejně velké a opačně orientované síly, neležící v jedné přímce, které působí ve dvou různých bodech tuhého tělesa vzdálených od sebe o vzdálenost r (obr. 13.1). Výslednice takových sil je nulová, jejich výsledný moment (moment dvojice sil) je

Tvrzení 13.2 vyplývá z předpokladu, že se jedná o dokonale tuhé těleso. Chceme-li sílu F přenést z působiště A do působiště B , přidáme v působišti B dvě opačně orientované, stejně velké síly ležící v přímce síly F (obr. 13.2). Tyto síly se navzájem zruší, ale právě tak můžeme tvrdit, že se v důsledku nedeforovatelnosti tuhého tělesa zruší jedna z nich s původní silou F . Zůstane proto jen původní síla, ale v novém působišti.

Moment dvojice sil (13.1) jsme definovali vzhledem k působišti jedné síly. Můžeme ale dokázat, že na volbě vztažného bodu nezáleží, protože součet obou sil se rovná nule. Zvolme vztažný bod libovolně (bod A na obr. 13.4). Výsledný moment dvojice sil je

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 = \\ &= \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + (\bar{r}_1 + \bar{r}) \times \bar{F}_2 = \bar{r} \times \bar{F}_2 \end{aligned} \quad (13.3)$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (13.1)$$

13.4

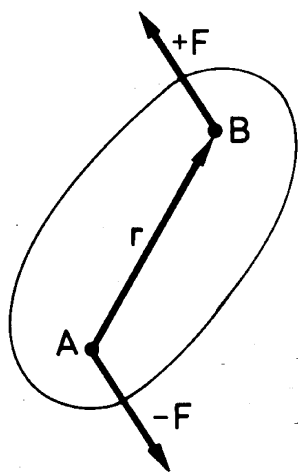
Sílu F můžeme přesunout do bodu ležícího mimo přímku síly jestliže současně přidáme dvojici sil s momentem rovnajícím se momentu dané síly vzhledem k jejímu novému působišti (obr.13.3)

$$\vec{F} \rightarrow \vec{F} ; \quad \vec{r} \times \vec{F}. \quad (13.2)$$

13.5

Všechny síly působící na tuhé těleso můžeme redukovat na jedinou sílu a jeden moment dvojice sil.

Naznačený postup můžeme prakticky realizovat jen v případě, když počet sil není příliš velký. Fyzikální pole, např. gravitační, elektrická a jiná pole, působí na každý atom pevné látky podle jeho hmotnostních, elektrických, příp. jiných vlastností. V takovém případě nelze výslednou sílu součtem jednotlivých sil najít, i kdyby se jednalo o relativně malý objekt. Pomáháme si pak tím, že přejdeme na tzv. na tzv. model kontinua, ve kterém se příslušné vlastnosti vyjadřují pomocí měrných veličin (měrné hmotnosti, měrného náboje atd.). Pomocí těchto charakteristik vyjádříme nejprve sílu (nebo její moment), který působí na elementárně malý objemový element tělesa a výsledné veličiny vypočítáme integrováním přes celé těleso.



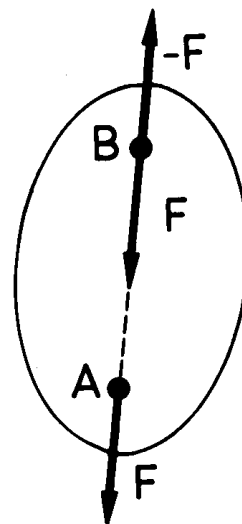
Obr. 13.1 Dvojice sil

protože je $F_1 + F_2 = 0$.

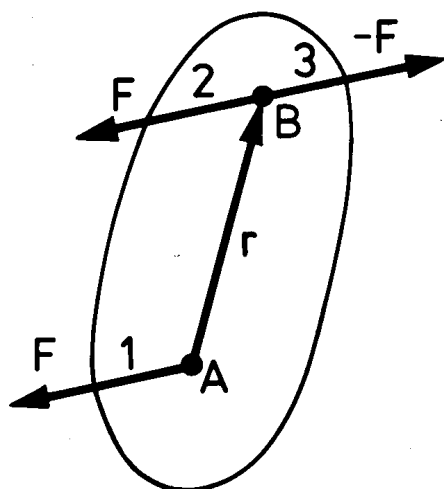
Lehce můžeme ukázat, že velikost momentu dvojice sil se rovná součinu velikosti síly a kolmé vzdálenosti mezi přímkami obou sil ($M = r F \sin \alpha = a F$).

Tvrzení 13.4 dokážeme tak, (obr. 13.3) že v novém působišti (B) přidáme dvě stejné a opačně orientované síly ležící v přímce rovnoběžné s přímkou původní síly. Tím se nic nezmění, protože přidané síly se vzájemně zruší. Novou situaci můžeme však zhodnotit také i tak, že místo síly 1 v bodě A máme nyní stejnou sílu v novém působišti B ležícími mimo přímku této síly 2 a dvojici sil 1+3 s momentem $M = r \times F$.

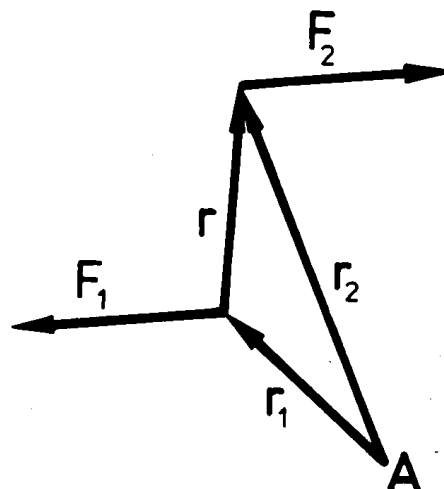
Věta 13.5 vyplývá z předcházejících - všechny síly přesuneme do jednoho bodu a najdeme jejich výslednici F a všechny momenty dvojic, které jsme přitom museli přidat, složíme do jediného momentu M . Síla F vyvolává translaci (posuv) tuhého tělesa, moment M jeho otáčení (rotaci).



Obr. 13.2 Přemístění působiště síly v tuhém tělese do bodu ležícího na přímce síly



Obr. 13.3 Přemístění působíště síly v tuhém tělese do bodu ležícího mimo přímku síly



Obr. 13.4 K výpočtu momentu dvojice sil

13.2 Pohybová rovnice tuhého tělesa

Uvedli jsme již, že na tuhé těleso můžeme beze změny aplikovat pohybové zákony odvozené pro systém hmotných bodů. Vzhledem na velkou hustotu hmotných bodů v tuhém tělese můžeme však přejít od diskrétní představy ke kontinuální představě tuhého tělesa, což nám umožní výpočet mnoha jeho charakteristik (např. těžiště) nikoliv složitým sčítáním, ale integrací. Pohybové rovnice můžeme napsat ve tvaru (12.5) a (12.9), ale vzhledem k různým význačným typům tuhého tělesa - klidu, pohybu bez působení vnějších sil, rotaci kolem bodu a kolem osy - můžeme je vždy vhodně přepsat (věty 13.7 až 13.9).

13.6

Polohový vektor těžiště tuhého tělesa je

$$\bar{r}^* = \frac{1}{M} \int \bar{r} dm = \frac{1}{M} \int \bar{r} \rho dV, \quad (13.4)$$

takže souřadnice těžiště jsou

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{M} \int x dm, & g^* &= \frac{1}{M} \int y dm \\ g^* &= \frac{1}{M} \int z dm \end{aligned} \quad (13.5)$$

Naznačené integrace se vztahují vždy k celému tělesu.

13.7

Obecné pohybové rovnice tuhého tělesa jsou

Správnost vztahů (13.4) a (13.5) dokážeme tak, že si tuhé těleso představíme jako kontinuum složené z "nekonečného" počtu "nekonečně" malých hmotných elementů dm_i (obr. 13.5). Polohový vektor těžiště definovaný pro systém hmotných bodů vztahem (12.3) můžeme nyní napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \bar{r}^* &= \lim_{dm \rightarrow 0} \frac{\sum_i \bar{r}_i dm_i}{\sum_i m_i} = \frac{\int \bar{r} dm}{\int dm} = \\ &= \frac{1}{M} \int \bar{r} dm, \end{aligned}$$

což je vztah (13.4).

Věty 13.7 a 13.8 není nutno dokazovat, protože jsou zřejmé na základě předcházejících výsledků. Větu 13.9 dokážeme tak, že vypočítáme celkový moment hybnosti hmotných bodů systému,

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}, \quad \bar{M} = \frac{db}{dt}, \quad (13.6)$$

kde F je výslednice všech sil působících na těleso, p je výsledná hybnost, M je výsledný moment sil působících na těleso a b je výsledný moment hybnosti.

13.8

Je-li tuhé těleso izolováno od okolí, je $p = \text{konst. vektor}$ a $b = \text{konst. vektor}$ (srovnej s 12.6 a 12.7), proto podle (13.6) platí i rovnice

$$\bar{F} = \sum_i \bar{F}_i = 0, \quad (13.7)$$

$$M = \sum_i M_i = 0. \quad (13.8)$$

Tyto podmínky nazýváme podmínkami rovnováhy tuhého tělesa.

13.9

Je-li průmět momentu hybnosti resp. momentu sil do osy rotace b_v resp. M_v , můžeme pohybovou rovnici pro tuhé těleso psát ve tvaru

$$b_v = J \bar{\omega} \quad (13.9)$$

resp.

$$M_v = J \bar{\epsilon}, \quad (13.10)$$

kde $J = \sum_i m_i a_i^2$ je moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k ose rotace.

který rotuje okolo osy (obr. 13.6). Polohový vektor i -tého bodu rozložíme na dvě složky: jednu spadající do směru osy rotace (jednotkový vektor v), druhou kolmo na tuto osu, tj.

$$r_i = r_{io} + a_i.$$

Celkový moment hybnosti pak je

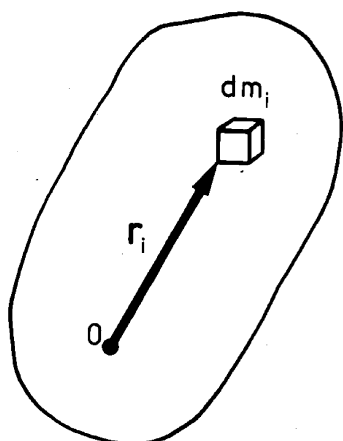
$$\begin{aligned} b &= \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \\ &= \sum_i m_i (\bar{r}_{io} + \bar{a}_i) \times \bar{v}_i. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Podle vztahu (10.13) můžeme vektor rychlosti v_i vyjádřit vektorovým součinem $v_i = \omega \times a_i$, takže po dosazení do rovnice (13.11) dostaneme /s využitím (16.13)/

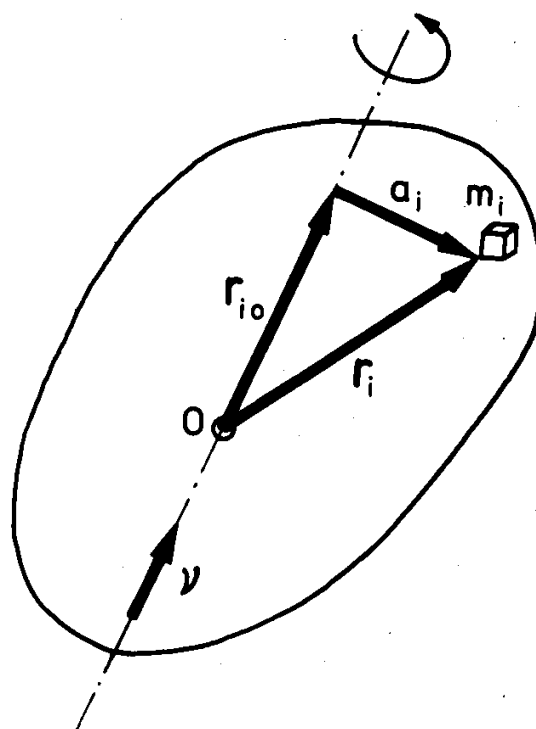
$$\begin{aligned} \bar{b} &= \sum_i m_i \bar{r}_{io} \times (\bar{\omega} \times \bar{a}_i) + \\ &\quad + \sum_i m_i \bar{a}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{a}_i) = \\ &= \sum_i m_i [\bar{\omega} (\bar{r}_{io} \cdot \bar{a}_i) - \bar{a}_i (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_{io})] \\ &\quad + \sum_i m_i [\bar{\omega} (\bar{a}_i \cdot \bar{a}_i) - \bar{a}_i (\bar{\omega} \cdot \bar{a}_i)] \\ &= \sum_i m_i a_i^2 \bar{\omega} - \sum_i m_i \bar{\omega} \cdot \bar{r}_{io} \bar{a}_i \end{aligned} \quad (13.12)$$

protože $r_{io} \cdot a_i = \omega \cdot a_i = 0$. Vynásobením rovnice (13.12) skalárně jednotkovým vektorem v dostaneme rovnici (13.9) a z ní na základě rovnice (13.6) a definice $\epsilon = d\omega/dt$ i rovnici (13.10).

Podmínky (13.7) a (13.8) definují dva případy rovnováhy: statistickou rovnováhu, rovnají-li se rychlosti těžiště i všech ostatních bodů tuhého tělesa nule, a dynamickou rovnováhu, při které jsou rychlosti různé od nuly. příkladem prvního druhu rovnováhy může být např. rovnováha při vážení, žebřík opřený o stěnu apod., příkladem dynamické rovnováhy je např. Wattův odstředivý regulátor. Ve všech uvedených případech se musí rovnat nule nejen součet všech sil v systému, ale i součet momentů sil vzhledem k libovolnému



Obr. 13.5 Objemový element v kontinuu



Obr. 13.6 K výpočtu momentu setrvačnosti tuhého tělesa

13.3 Reaktivní pohyb

Reaktivní pohyb je založen na platnosti zákona zachování hybnosti izolované soustavy. Jednoduchými příklady takového pohybu jsou např. zpětný pohyb pušky při výstřelu, pohyb loďky na klidné hladině vzad, pohybuje-li se osoba na loďce vpřed, ale i např. zpětný pohyb jádra atomu při emisi záření, složitějším příkladem takového pohybu je reaktivní pohyb; věty (13.10 a 13.11).

13.10

Reaktivní pohyb je pohyb izolované soustavy, založený na platnosti zákona zachování hybnosti, při kterém se soustava uvádí do pohybu unikáním určité hmotnosti s určitou rychlostí vzhledem k soustavě.

13.11

Ciolkovského rovnice je vztah, který udává rychlost rakety jako funkci hmotnosti vyhořelého paliva. Má tvar

$$v = c \log \frac{M_1}{M(t)}, \quad (13.13)$$

kde M_1 je hmotnost rakety na začátku, $M(t)$ je

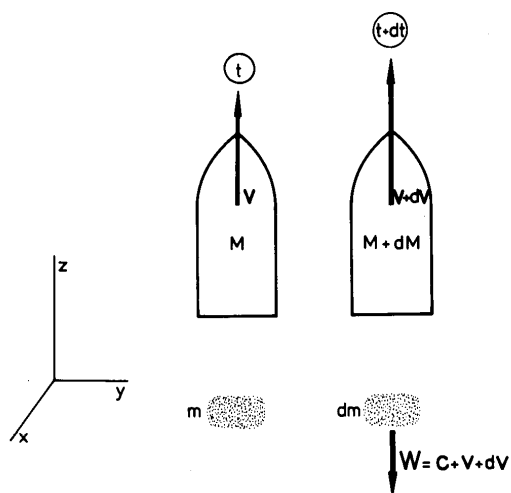
Ve všech těchto případech můžeme izolovaný systém považovat za složený ze dvou těles o hmotnostech m a M , které se pohybují rychlostí v a V .

Byl-li na začátku systém v klidu, zákon zachování hybnosti vyžaduje splnění rovnice

$$\bar{V} = - \frac{m}{M} \bar{v}. \quad (13.14)$$

$mv + MV = 0$, takže rychlost tělesa hmotnosti M je Rychlost V je tedy tím větší, čím je větší hmotnost m (střely, osoby, kvanta záření) a její rychlost v , a čím je menší hmotnost M (pušky, loďky, jádra atomu). Zajímavým a prakticky důležitým výsledkem charakterizujícím tento pohyb je, že kinetická energie se nerozělí stejným dílem na oba

hmotnost rakety v čase t a c je rychlost unikání hmotnosti, $M_1 - M(t)$ je hmotnost vyhořelého paliva.



Obr. 13.7 K odvození Ciolkovského rovnice

CIOLKOVSKIJ Konstantin Eduardovič, 1857-1935, známý sovětský vědec a vynálezce, zakladatel kosmonautiky. Jeho objevy v oblasti aerodynamiky a raketové techniky vytvořily možnosti i pro meziplanetární lety. Ciolkovskij vypracoval teorii raketového pohybu, navrhl konkrétní typy vícestupňových raket a výsledky jeho vědeckovýzkumné práce mají dodnes základní význam v raketové technice.

$$\bar{p} = (M + dM)(\bar{v} + d\bar{v}) + dm\bar{w} = M\bar{v} + Md\bar{v} - dM\bar{c},$$

raketa *plyny*

(13.16)

takže změna hybnosti v čase dt bude

$$d\bar{p} = \bar{p} - \bar{p} = Md\bar{v} - dM\bar{c},$$

neboli

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = M \frac{d\bar{v}}{dt} - \bar{c} \frac{dM}{dt} = \bar{F},$$

(13.17)

kde F je podle I. impulsové věty 12.4 vnější působící síla, která při vertikálním letu rakety z povrchu Země je silou gravitační. Jestliže pro jednoduchost položíme $F = M g$, vynásobíme rovnici (13.17) dt , převedeme do skalárního tvaru a integrujeme, bude

objekty, ale v poměru

$$\frac{W_{k1}}{W_{k2}} = \frac{MV^2}{mv^2} = \frac{M}{m} \left(\frac{m}{M} \right)^2 = \frac{m}{M} \quad (13.15)$$

takže např. při výskoku atleta od Země nezískává Země prakticky žádnou energii. Emituje-li volné jádro záření, vznikají i ztráty v důsledku "zpětného" odrazu, je-li však stejné jádro zabudováno v krystalu, je prakticky $m/M \rightarrow 0$ a všechnu energii "odnáší" jen záření. Tento jev je podstatou tzv. Mössbauerova jevu.

Při realizaci trvalého reaktivního pohybu je situace složitější o to, že unikající hmotnost plynů zmenšuje současně hmotnost celé rakety. Označme hmotnost rakety M , její počáteční a konečnou hmotnost (po spálení paliva) M_1 a M_2 , hmotnost uniklých plynů m , rychlost rakety necht' je v , rychlost unikajících plynů necht' je konstantní a vzhledem k pevnému stanovišti (startovací rampě) $w = c + v$.

Necht' je hybnost rakety v libovolném čase t $p = m v$. Všimněme si hybnosti soustavy složené z rakety a unikajících plynů v čase $t + dt$. Hmotnost rakety se se během tohoto času dt změní o $dM = -dm < 0$, protože hmotnost rakety se zmenšuje, rychlost rakety se však změní o dv , bude proto hybnost

$$\int_{v_o}^v dv + c \int_{M_1}^M \frac{dM}{M} = -g \int_0^t dt, \quad (13.18)$$

získáme pak

$$v = v_o + c \ln \frac{M_1}{M} - gt.$$

Velmi často je $v_o = 0$ a poslední člen v předcházející rovnici je zanedbatelný, což vede k Ciolkovského rovnici (13.13). Konečná rychlost rakety V_k je pak dána vztahem

$$v_k = c \ln \frac{M_1}{M_2}, \quad (13.19)$$

kde M_2 je hmotnost rakety po vyhoření paliva.

Nejefektivnějším palivem pro rakety by podle rovnice (13.19) byla taková látka, která by se měnila na záření, protože záření uniká největší možnou rychlostí - rychlostí světla. Realizace těchto tzv. fotonových raket však naráží na velké technické problémy.

13.4 Otáčení kolem osy - kyvadlový pohyb

Rotace tuhého tělesa kolem osy je velmi častým a důležitým případem pohybu. Jedná-li se o izolované těleso, platí pro něj zákony zachování hybnosti a momentu hybnosti. Jestliže však na rotující těleso působí moment vnější síly, vznikají zajímavé jevy, které se prakticky i využívají. Tyto jevy popisují věty 13.12 a 13.13. Zvláštním případem rotačního pohybu je tzv kyvadlový pohyb (věta 13.15).

13.12

Rotující těleso, na které nepůsobí žádné momenty vnějších sil, nebo jejich výslednice je nulová, zachovává osu své rotace. Nenulový moment síly působící na rotující těleso mění tím méně osu jeho rotace, čím větší je moment hybnosti rotujícího tělesa.

13.13

Působí-li na rotující těleso moment síly, má těleso tendenci změnit osu své rotace s osou vynucené rotace.

Tvrzení 13.12 vyplývá přímo ze vztahu (12.9), který napíšeme ve tvaru

$$db = Mdt.$$

Je-li $M = 0$, je $db = 0$, a proto rotující těleso, jehož osa rotace není upevněna, nemění osu své rotace. Jestliže však vystavíme těleso účinku konstantního momentu síly M na nerotující těleso, dostaneme pro jejich momenty hybnosti integrací předcházející rovnice vztahy

13.14

Kinetická energie rotujícího tělesa je

$$W_k = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (13.20)$$

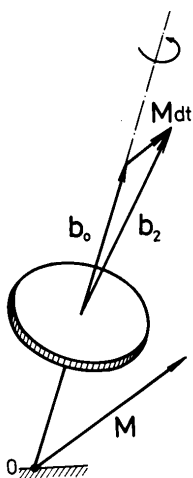
kde J je moment setrvačnosti tělesa a ω je jeho úhlová rychlost.

13.15

Kyvadlový pohyb je periodický pohyb kolem pevné osy rotace. Vzniká při působení momentu síly o velikosti přímo úměrné výchylce z rovnovážné polohy α

$$M_v = k \alpha, \quad (13.21)$$

příčmě působící síla směřuje vždy do rovnovážné polohy.



Obr. 13.8 Pohyb setrvačnicku upevněného v bodě

$$\bar{b}_1 = \bar{M} dt$$

$$a \quad \bar{b}_2 - \bar{b}_0 = \bar{M} dt = \bar{b}_1.$$

Z nich vyplývá, že působení momentu vnější síly se u rotujícího tělesa projeví tím méně, čím je větší b_0 (obr. 13.8). Tuto vlastnost rotujících volně uložených těles využívají tzv. gyroskopy. Je zřejmé, že rotace masivních těles může zabezpečit stabilitu soustavy.

Tvrzení 13.13 dokážeme na příkladě setrvačnicku, který může rotovat tak, že jeden jeho bod je stálý (obr. 13.8). Opět použijeme II. impulsové věty ve tvaru $db = M dt$ a zjistíme, že přírůstek momentu hybnosti má směr působícího momentu síly, takže setrvačnick se vychýlí tak, že má tendenci ztotožnit osu své rotace s osou vynucené rotace.

Větu 13.14 dokážeme tak, že napíšeme celkovou kinetickou energii soustavy hmotných bodů rotujících kolem společné osy

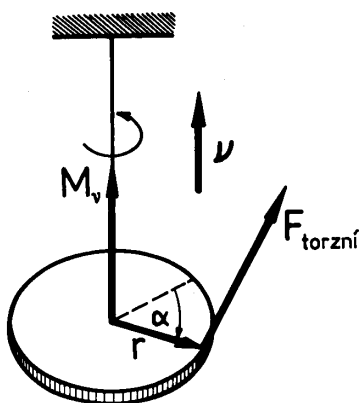
$$W_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

a rychlosti v_i vyjádříme součinem $v_i = r_i \omega$, kde ω je úhlová rychlost otáčení stejná pro všechny body tělesa. Dostaneme

$$\begin{aligned} W_k &= \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 J; \\ &= \frac{1}{2} J \omega^2. \end{aligned}$$

Zvláštním případem rotace tuhého tělesa je kyvadlový pohyb. Ukážeme, že velmi dobrým příkladem takového pohybu je pohyb tzv. fyzikálního a matematického kyvadla, případně torzního kyvadla (obr. 13.9). Vyjádříme-li v rovnici (13.10) vektor M pomocí (13.21), získáme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{k}{J} \alpha = 0 \quad (13.22)$$



Obr. 13.9 Vznik kyvadlového pohybu

Je to diferenciální rovnice II. řádu, jejímž obecným řešením je rovnice

$$\alpha = A \sin \omega t + b \cos \omega t, \quad (13.23)$$

kde A a b jsou neurčité konstanty a $\omega = (k/J)^{1/2}$. Hodnoty konstant A a b vyplývají z tzv počátečních podmínek, které charakterizují vznik kyvadlového pohybu. Nejjednodušeji můžeme tento pohyb vyvolat tak, že v čase $t = 0$ vychýlíme těleso do polohy $\alpha = \alpha_0$ a volně pustíme ($v_{t=0} = 0$). Za těchto podmínek platí rovnice

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= A \sin 0 + B \cos 0, \\ v &= r\omega = r \frac{d\alpha}{dt} = \\ &= Ar \cos 0 - Br \sin 0 = 0 \end{aligned}$$

Těmto rovnicím vyhovují konstanty $A = 0$ a $B = \alpha_0$, takže

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega t.$$

Vznikl tedy periodický pohyb s amplitudou α_0 , periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left(\frac{J}{k} \right)^{1/2} \quad (13.24)$$

a kmitočtem

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k}{J} \right)^{1/2}. \quad (13.25)$$

13.5 Moment setrvačnosti a deviační moment

S momentem setrvačnosti jsme se střetli již při formulaci pohybové rovnice rotujícího tělesa (věta 13.9) a při vyjádření jeho kinetické energie (věta 13.14). Je to pojem v mechanice tuhých těles velmi důležitý, proto si uvedeme několik podrobností. Rotuje-li těleso kolem osy, která není tzv. volnou osou, vznikají nežádoucí síly na osu, které vyjadřujeme pomocí tzv. deviačního momentu (věta 13.18).

13.16

Momenty setrvačnosti hmotného bodu, systémy hmotných bodů a tělesa jsou určeny vztahy

$$J = mr^2, \quad J = \sum_i m_i r_i^2, \quad J = \int \quad (13.26)$$

kde r je kolmá vzdálenost hmotného bodu resp. hmotného elementu od osy rotace.

13.17

Steinerova věta: Moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k ose, která neprochází těžištěm, je roven součtu momentu setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose procházející těžištěm J^* a součinu celkové hmotnosti tělesa m a čtverce kolmé

$$J = J^* + ma^2. \quad (13.27)$$

vzdálenosti obou os

13.18

Deviační moment definujeme vztahem

$$\bar{U} = m_i \bar{r}_{io} \times \bar{r}_i, \quad (13.28)$$

přičemž význam symbolů je zřejmý z obr. 13.6. Složky vektoru deviačního momentu jsou

Význam Steinerovy věty je zejména v tom, že umožňuje výpočet momentu setrvačnosti vzhledem k libovolné ose pomocí momentu setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm, který se většinou lehce vypočítá. Platnost Steinerovy věty dokážeme pomocí obr. 13.10.

Bez újmy na obecnosti důkazu si můžeme pro jednoduchost představit, že celé těleso je ve směru osy rotace stlačeno do rovinného útvaru se zachováním kolmých vzdáleností od osy rotace jeho jednotlivých elementů. Podle pravidla o sčítání vektorů je $r_i = a + r_i^*$, takže

$$\begin{aligned} \bar{r}_i^2 &= \bar{r}_i \cdot \bar{r}_i = (\bar{a} + \bar{r}_i^*) (\bar{a} + \bar{r}_i^*) = \\ &= a^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{r}_i^* + r_i^{*2}. \end{aligned}$$

Moment setrvačnosti J je podle definice (13.26)

$$J = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i a^2 + 2\bar{a} \cdot \sum m \quad (13.31)$$

První člen na pravé straně této rovnice můžeme napsat ve tvaru $m a^2$, kde m je celková hmotnost, druhý člen se rovná nule, protože $\sum m_i r_i^* = 0$ (polohový vektor těžiště vzhledem k těžišti je nulový) a třetí člen má význam momentu setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm. Rovnici (13.31) můžeme tedy přepsat do tvaru (13.27).

Další dvě věty (13.18 a 13.19) dokážeme tak, že vypočítáme moment odstředivých sil působících na rotující těleso. Použijeme-li k tomu obr. 13.6 s příslušným označením. Odstředivá síla působící na hmotný bod m_i je podle (11.4)

$$\begin{aligned} U_{xy} &= \sum_i m_i x_i y_i, & U_{yz} &= \sum_i m_i x_i z_i, \\ U_{yz} &= \sum_i m_i y_i z_i. \end{aligned} \quad (13.29)$$

Pro tuhé těleso jsou sumace nahrazeny integrálem a hmotnosti m_i elementem dm .

13.19

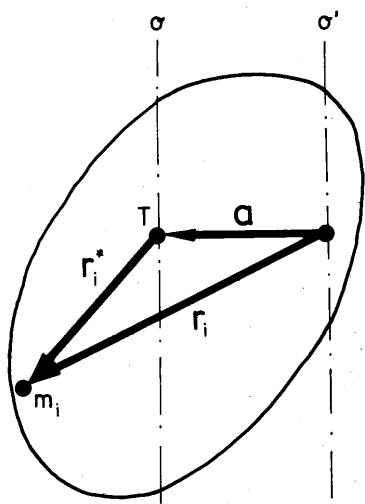
Moment odstředivých sil rotujícího tělesa je

$$\bar{M} = \omega^2 \bar{U}. \quad (13.30)$$

vyjádřený pomocí deviačního momentu

13.20

Otáčí-li se těleso kolem osy jdoucí jeho těžištěm, je celkový moment odstředivých sil vzhledem ke všem bodům osy stejný a můžeme ho vyjádřit jediným momentem dvojice sil.



Obr. 13.10 K důkazu Steinerovy věty

$F_o = m_i a_i \omega^2$, takže moment všech odstředivých sil vzhledem k libovolnému bodu 0 ležícímu na ose rotace je

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \sum_i m_i \bar{r}_i x \bar{a}_i \omega^2 = \sum_i m_i \omega^2 \bar{r}_i x \\ &= \omega^2 \sum_i m_i \bar{r}_i x \bar{r}_i. \end{aligned} \quad (13.32)$$

Z tohoto vyjádření vyplývají bezprostředně obě věty, které bylo nutno dokázat. Ztotožníme-li osu rotace např. s osu x , můžeme psát

$$\begin{aligned} U &= \sum_i m_i x_i i x (x_i i + y_j j + z_k k) = \\ &= \sum_i m_i (x_i y_i \bar{k} - x_i z_i \bar{j}) = U_{xy} \bar{k} - U_{xz} \bar{j}. \end{aligned} \quad (13.33)$$

Podobné výsledky můžeme dostat i pro další dvě osy.

Poslední věta 13.20 vyplývá z toho, že v případě osy jdoucí těžištěm je $\sum_i m_i a_i = 0$, proto i součet všech odstředivých sil se rovná nule. Deviační moment můžeme upravit na tvar

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \sum_i m_i \bar{r}_{io} x \bar{r}_i = \sum_i m_i r_{io} r_i \sin \alpha \bar{v}_i = \\ &= \sum_i m_i r_{io} a_i \bar{v}_i. \end{aligned}$$

Zvolili-li bychom jiný vztahový bod na ose rotace,

$$\bar{U} = \sum_i m_i (r_{io} + c) a_i \bar{v}_i = \sum_i m_i r_{io} a_i$$

např. posunutý oproti původnímu o vzdálenost c , bylo by $r_{io} = r_{io} + c$ a dále protože $c \sum_i m_i a_i \bar{v}_i = 0$, což vyplývá z definice těžiště. Moment odstředivých sil je tedy v takovém případě skutečně nezávislý na volbě vztahového bodu na ose rotace. Je možno dokázat, že existují takové osy rotace procházející těžištěm, vzhledem ke kterým je moment odstředivých sil nulový. Nazývají se volné osy. V takovém případě nejsou s rotací spojeny nežádoucí síly v ložiskách.

13.6 Ráz dokonale tuhých těles

Při pohybu tělesa může dojít k nárazu na jiné těleso, při kterém vznikají relativně velké "nárazové" síly, které podstatně mění pohyb tělesa. Jestliže považujeme v makrofyzice tento jev spíše za nežádoucí, protože při něm může dojít k poškození těles, v mikrofyziice má tento jev velký význam a často ho uměle vyvoláváme. Tak např. srážky mezi částicemi plynu zabezpečují jeho rovnováhu, přenos tepla, atd., uměle vyvolané srážky neutronů s jinými částicemi (jádry těžkého vodíku) vedou ke zmenšení jejich rychlosti a tím ke zvýšení účinnosti jaderných reakcí (to je princip moderátorů v reaktorech). Vidíme, že z fyzikálního hlediska je srážka těles velmi důležitým jevem a je užitečné najít jeho zákonitosti (věta 13.21).

13.21

Dvě dokonale tuhé (pružné) koule s hmotnostmi m_1 a m_2 pohybujícími se rychlostmi v_1 a v_2 se po nárazu pohybují rychlostmi (obr. 13.11)

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \\ \dot{v}_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}, \end{aligned} \quad (13.34)$$

přičemž všechny rychlosti $v_i < 0$ podle směru rychlosti vzhledem ke zvolené souřadné ose.

13.22

Po srážce dokonale nepružných koulí se obě koule pohybují dále společnou rychlostí

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (13.35)$$

Nejprve se budeme zabývat jen tzv. přímým rázem dokonale tuhých pružných těles ve tvaru koulí zanedbatelných rozměrů. Při tomto rázu nedochází k vybočení jejich rychlostí z přímky, proto můžeme problém řešit skalárně.

Vztahy (13.34) odvodíme ze zákona zachování energie a hybnosti. Oba tato zákony můžeme použít, protože obě koule tvoří izolovanou soustavu a jelikož jsou koule dokonale pružné, žádná energie se nevratně nespotřebuje na deformaci. Můžeme tedy psát (obr. 13.11)

$$m_1\dot{v}_1^2 + m_2\dot{v}_2^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2 \quad (13.36)$$

$$m_1\dot{v}_1 + m_2\dot{v}_2 = m_1v_1 + m_2v_2. \quad (13.37)$$

Úpravou dostaneme jiné dvě rovnice

$$\begin{aligned} m_1(\dot{v}_1^2 - v_1^2) &= m_2(v_2^2 - \dot{v}_2^2) \\ m_1(\dot{v}_1 - v_1) &= m_2(v_2 - \dot{v}_2). \end{aligned}$$

Jejich vzájemným dělením vznikne rovnice

$$\dot{v}_1 + v_1 = v_2 + \dot{v}_2.$$

Z posledních dvou rovnic již lehce dostaneme vztahy (13.34). Ve speciálních případech vyplývají z těchto vět tyto důsledky:

1. Jsou-li hmotnosti obou koulí stejné, je

$$\dot{v}_1 = \frac{2m v_2}{m + m} = v_2, \quad \dot{v}_2 = v_1,$$

takže koule si vymění svoje rychlosti i svoji

energii. Právě tento efekt se využívá při brzdění rychlých neutronů na přibližně stejně těžkých jádrech vodíku.

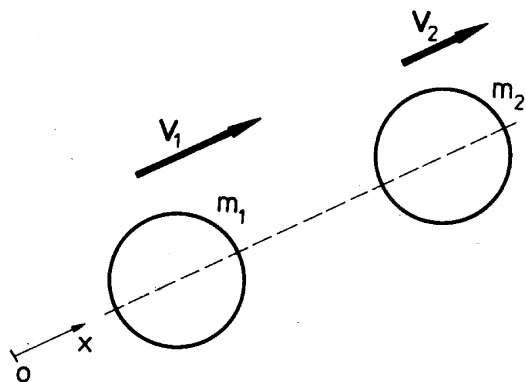
2. Je-li např. $m_2 \rightarrow \infty$ a $v_2 = 0$ (náraz na pevnou stěnu), je

$$v_1' = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)v_1 + 2v_2}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = -v_1, \quad (13.38)$$

takže koule se od dokonale tuhé stěny odráží se stejnou rychlostí opačného směru. Impuls, který uděljuje kulička stěně při nárazu je tedy

$$I = F \Delta t = mv - (-mv) = 2mv \quad (13.39)$$

Obr. 13.11 Ráz dvou koulí



kde Δt je čas trvání nárazu.

Jestliže za 1 s dopadne na stěnu N stejných částic, je celkový impuls za čas Δt $N \cdot \Delta t$ - krát větší, takže $F \Delta t = Z m v N \Delta t$. Proud částic působí tedy na stěnu silou

$$F = 2mNv = 2l_m v, \quad (13.40)$$

kde l_m je hmotnost částic, které dopadnou na stěnu za jednotku času (tzv. tok hmotnosti).

V případě rázu dokonale nepružných koulí pokračuje proces rychlostí změn jen tak dlouho, dokud se nevyrovnají jejich rychlosti, tj. do okamžiku, kdy je splněna rovnice

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v.$$

Z této rovnice přímo vyplývá vztah (13.35).

13.7 Tření

Tření nazýváme jev, který vzniká při posouvání nebo při odvalování těles na podložce. Na místě styku tělesa a podložky vzniká síla, která brzdí pohyb - nazýváme ji síla tření. Na první pohled je tření nežádoucím jevem, protože zmenšuje efektivnost pohybu, ve skutečnosti si život bez tření nedovedeme představit. Pohyb strojů pomocí kol, pohyb chůzí, přenos síly, upevňování součástek hřebíky a šrouby, psaní perem - to všechno by nebylo možné, kdyby nebylo tření.

Základními typy tření jsou tření vlečné a tření valivé. Podle toho, zda jde o tření při statické rovnováze, nebo o tření za pohybu, hovoříme o statickém a kinematickém tření. Kinematické tření je vždy menší (nebo rovno) než statické. Základní poznatky o tření obsahují věty 13.23 a 13.26.

13.23

Síla vlečného tření T_v je přímo úměrná kolmé síle od podložky N

$$T_v = \mu N, \quad (13.41)$$

kde μ je součinitel vlečného tření.

13.24

Součinitel vlečného tření, můžeme určit podle tzv. třecího úhlu na nakloněné rovině

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha. \quad (13.42)$$

13.25

Síla valivého tření T_{val} je úměrná kolmé síle od podložky N $T_{\text{val}} = \mu_{\text{val}} N$, přičemž součinitel valivého tření je

$$\mu_{\text{val}} = \frac{a}{r}, \quad (13.43)$$

kde r je poloměr kola a a je vzdálenost působíště síly od podložky N od svislé přímky procházející středem kola.

13.26

Maximální tažná síla tažného mechanismu je

$$F_{\text{max}} = \mu \frac{mG}{n}, \quad (13.44)$$

kde μ je součinitel tření, G je celková tíha tažného mechanismu, m je počet poháněných kol a n je počet všech kol.

13.27

$$T = F_o (e^{\mu \alpha} - 1), \quad (13.45)$$

Maximální síla, kterou můžeme přenášet řemenicí

Tvrzení 13.23 vyplývá z četných měření. Kolmá síla od podložky je nejčastěji určena tíhou tělesa, případně sklonem podložky. Měření součinitele vlečného tření pomocí vztahu (13.42) vyplývá z pokusu na nakloněné rovině s podložkou, na které je umístěno těleso, jehož součinitel tření s podložkou chceme měřit (obr. 13.12). Zvyšujeme sklon nakloněné roviny dokud se těleso neuvede do pohybu konstantní rychlostí. V kritickém stavu je pak síla vyvolávající pohyb $F = G \sin \alpha$ právě rovna síle tření $T = \mu G \cos \alpha$, takže platí rovnice

$$G \sin \alpha = \mu G \cos \alpha,$$

ze které vyplývá vztah (13.42). Několik hodnot součinitele vlečného tření ve statickém a kinematickém režimu můžeme najít v tabulce.

Na dokonale tuhé podložce by se dokonale tuhé těleso valilo bez tření. Ve skutečnosti se podložka vždy částečně deformuje (obr. 13.13), takže síla od podložky je oproti přímce, procházející středem kola, posunutá o určitou vzdálenost a . Pohyb může nastat tehdy, jestliže se moment síly od podložky vzhledem k bodu styku s podložkou (N, a) vykompenzuje momentem tažné síly (F, r), to je, je-li splněna podmínka

$$F \cdot r = N \cdot a, \quad (13.46)$$

z které vyplývá vztah

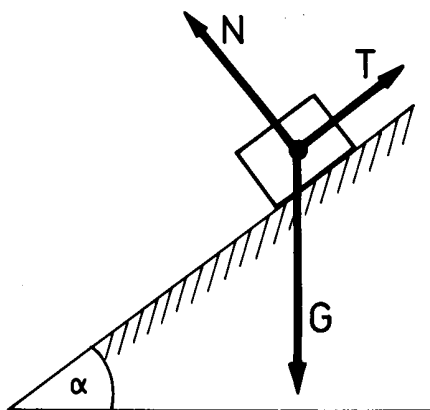
$$F = \frac{a}{r} N = \mu_{\text{val}} N,$$

čímž je dokázána věta 13.25.

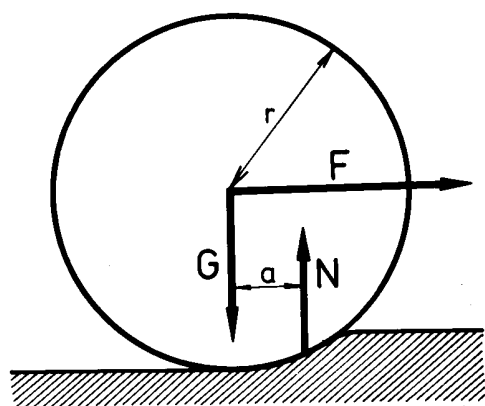
Tvrzení 13.26 je přímým důsledkem poznatku, že maximální tažná síla je totožná se silou vlečného tření. Při větší síle se již kola začínají na podložce smýkat, takže z hlediska pohybu je už tato síla neúčinná. Na jedno kolo připadá kolmá síla od podložky G/n , kde G je tíha a n počet kol tažného mechanismu. Jelikož jen m ze všech n kol je poháněných, je celková síla tření $T = \mu m G/n$, což je rovno maximální tažné síle.

Vztah (13.45) vyplývá z této úvahy: síla napínání na straně na které je řemenice povolována nechť je F_o , na straně tahu $F = F_o + T_o$ (obr. 13.14), kde T_o je síla tření, která se současně rovná maximální síle, kterou může řemenice přenést. Přírůstek celkového namáhání řemenice na

je
kde F_o je síla působící na řemen na straně povolování řemenu, μ je součinitel tření a α je úhel obepnutí kola řemenem.



Obr. 13.12 Měření součinitele vlečného tření



Obr. 13.13 Vznik valivého tření

úseku $d\alpha$ je $dF = \mu dN$, kde dN je přírůstek kolmé síly na kolo. Tento přírůstek najdeme rozložením síly $dF = d(F)$ na tečnou a normálovou složku

$$d\bar{F} = dF\bar{\tau} + Fd\bar{\tau} = dF\bar{\tau} - F \quad (13.47)$$

protože $d\tau = -\rho d\alpha$ (obr. 13.14).

Velikost přírůstku normálové síly je tedy

$$dF = \mu F d\alpha .$$

takže

$$dN = F d\alpha ,$$

Úpravou dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{dF}{F} = \mu d\alpha , \quad (13.48)$$

jejímž řešením je při okrajové podmínce $F_{\alpha=0} = F_o$ funkce

$$F = F_o + T_o = F_o e^{\mu\alpha} . \quad (13.49)$$

Z této rovnice vyplývá bezprostředně vztah (13.45).

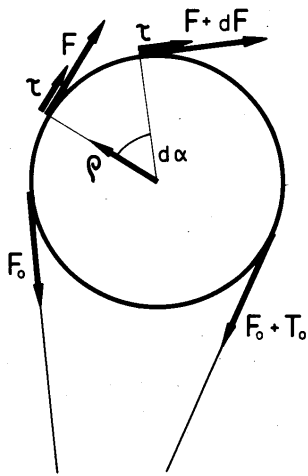
Přenášená síla tedy závisí na napnutí řemenice, na úhlu obepnutí kola a na součiniteli vlečného tření (zvyšuje se pomocí kalafuny).

Na tření je založena metoda měření výkonu motorů pomocí tzv. Pronyho brzdy. Kroučící moment motoru $M = F \cdot r$ vykompenzujeme momentem závaží o tíže G na rameni délky d (obr. 13.15) ($M' = G \cdot d$). Výkon motoru, který je určen vztahem

$$P = F \cdot n \cdot 2\pi r ,$$

kde n je počet otáček za jednotku času, můžeme potom změřit na základě vztahu

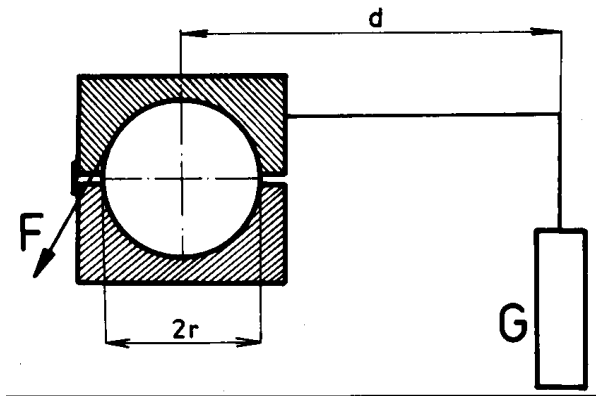
$$P = 2\pi n G d . \quad (13.50)$$



Obr. 13.14 K výpočtu síly přenášené řemenicí

Tabulka
Součinitel tření pro různé materiály

dvojice materiálů	μ_{stat}	μ_{kin}
ocel + led	0.027	0.014
ocel + ocel	0.1 - 0.3	0.07 - 0.25
kov + dřevo	0.2 - 0.5	0.2 - 0.5
kov + kůže	0.2 - 0.6	0.1 - 0.3
dřevo + dřevo	0.4 - 0.6	0.2 - 0.5



Obr. 13.15 Pronyho brzda