# 11 DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

Newtonovy zákony dynamiky
Impulz a hybnost, moment síly a moment hybnosti
Energie, práce, výkon
Kinetická a potenciální energie, zákon zachování mechanické energie

Dynamika řeší problémy příčiny a důsledku v mechanice. Hledá odpověď na otázky: co způsobuje pohyb a jaký druh pohybu vzniká, je-li známá jeho příčina. Je třeba zdůraznit, že při těchto úvahách máme na mysli jen relativní pohyb a jeho změny. Nemá smysl se ptát, co je příčinou pohybu vůbec, protože pohyb je spjat se samotnou existencí hmoty. Změny pohybu těles vznikají jako následek interakce hmotných objektů, což je poznatek mnohokráte ověřený zkušeností. Pro jednodušší charakteristiku těchto jevů si člověk vytvořil velmi užitečný pojem -sílu. Vždy, jakmile dochází k vzájemnému působení dvou a nebo více hmotných objektů, říkáme, že působí síla. Mechanická aplikace pojmu síly však v minulosti vedla k jeho "absolutizaci", jakoby síla mohla existovat "sama o sobě". Podnět k takovému chápání síly poskytly jevy způsobené "na dálku", kdy silové působení bylo možno pozorovat i bez zjevné interakce hmotných objektů; např. kámen padá k Zemi bez toho, aniž by byl s ní v přímém dotyku, Země obíhá okolo Slunce v důsledku působení síly mezi nimi, i když se vzájemně "nedotýkají". Podobné problémy se vyskytly i v případě elektrických a magnetických jevů. Další vývoj ukázal, že je v uvedených případech síla vyjádřením interakce tělesa s hmotnými objekty, tvořícími gravitační pole nebo elektrická pole, takže pojem síly má skutečně smysl jen v souvislosti se vzájemným bezprostředním působení hmotných objektů.

Síly, vytvářené poli, zejména gravitačním polem, sloužily v minulosti k srovnávacím měřením různých sil. V současnosti však měříme sílu na základě její definice, a to pomocí účinků, které vyvolává.

Pojem síly je velmi užitečný při formulaci základních zákonů fyziky.

## 11.1 Newtonovy zákony dynamiky

Otázku souvislosti pohybu a sil, které ho vyvolávají, poprvé exaktně řešil Newton. Zobecnil do té doby známé poznatky a zformuloval je do třech principů, nebo zákonů, které tvoří základ tzv. klasické mechaniky.

11.1
I.Newtonův zákon - zákon setrvačnosti.
V inerciálních soustavách, tj. takových, které jsou buď v klidu, nebo se navzájem pohybují rovnoměrným přímočarým pohybem, těleso setrvává ve stavu klidu, nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, dokud na něj nepůsobí jiná tělesa.

Na prvý pohled se nám zdá prvý zákon dynamiky triviálním konstatováním skutečnosti vyplývající z druhého zákona dynamiky. Nepůsobí-li žádná síla ($F = 0$), musí být i zrychlení nulové a není tedy důvodu pro změnu rychlosti, tj. pohybového stavu. Ve skutečnosti je situace složitější, protože nemůžeme vyloučit změny v pohybu (bez vnějších sil) následkem nějakých neznámých vnitřních příčin a kromě toho

11.2

Hmotnost tělesa m je míra jeho setrvačních účinků. Její velikost vzhledem k hmotnosti zvolené za

$$m = m_o \frac{a_o}{a}, \tag{11.1}$$

základ určuje vztah

kde $a$, $a_o$ jsou zrychlení vyvolaná stejnou silou. Jednotka hmotnosti je $[m] = kg$ (kilogram)

11.3

II.Newtonův zákon - zákon síly.

Zrychlení tělesa a je přímo úměrné působící síle $\boldsymbol{F}$ a nepřímo úměrné jeho hmotnosti $m$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}. \tag{11.2}$$

Jednotka síly v soustavě SI je $[F] = [m][a] = kg\, m\, s^{-2} = N$ (newton).

11.4

III.Newtonův zákon - zákon akce a reakce.

Působí-li na sebe dvě tělesa, absolutní hodnota na prvé těleso $|\boldsymbol{F}_1|$ je rovna absolutní hodnotì síly na druhé těleso $|\boldsymbol{F}_2|$ a směry obou sil jsou opačné $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2$.

11.5

Setrvačné síly jsou síly, které musíme přidat k reálným silám, vyjadřujeme-li pohyby vzhledem k neinerciální soustavě, která se pohybuje vůči referenční inerciální souřadné soustavě se zrychlením $a_o$ s úhlovou rychlostí $\omega_o$. Hlavní setrvačné síly jsou unášivá setrvačná síla

$$\boldsymbol{F}_u^* = -m\boldsymbol{a}_o, \tag{11.3}$$

odstředivá setrvačná síla

nemůžeme realizovat experiment, který by mohl tento zákon v úplné obecnosti dokázat. Proto se I. zákon dynamiky ponechává jako samostatný zákon.

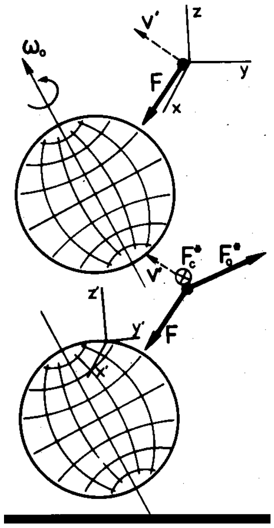
Kdybychom I.Newtonův zákon nevztahovali na inerciální soustavy, lehce bychom našli celou řadu případů, ve kterých by byl tento princip zjevně "porušen". Například vždy, sledujeme-li nějaký pohyb vzhledem k pohyblivému stanovišti, které se pohybuje se zrychlením. Ze stanoviště pozorovatele na kolotoči se všechny okolní předměty pohybují se zrychlením i když na ně nepůsobí žádná vnější síla. Nezdá-li se nám tento případ příliš vhodný pro dynamické úvahy, potom si musíme uvědomit, že přesně v této situaci je každý pozorovatel na Zemi - všechny okolní pohyby, např. pohyby letadel, raket, padajících předmětů atd. hodnotí ze stanoviště podobného stanovišti na sedačce kolotoče. Chyba samozřejmě není v tom, že se naráz změnil pohybový stav těles, i když na ně nezačala působit síla, ale v tom, že sledujeme pohyb z "nevhodného" stanoviště. Jaké podmínky tedy musí splňovat stanoviště pozorovatele, ze kterých by I.Newtonův zákon bezvýhradně platil? Lehce se můžeme přesvědčit, že to musí být soustavy, které jsou buď v klidu, nebo ve vzájemném rovnoměrném přímočarém pohybu. Takové soustavy se nazývají inerciální soustavy. Jelikož vše je v pohybu, absolutní souřadná soustava neexistuje a tedy přísně vzato - neexistuje ani inerciální soustava. Jestliže však zkoumáme pohyby v takovém časovém intervalu, za který se vztažná soustava zanedbatelně málo posune, můžeme ji považovat za inerciální. Soustava spojená se stálicemi je např. inerciální pro zkoumání pohybů na planetách, soustava spojená se Zemí je inerciální pro zkoumání krátkodobých pohybů na ní.

Formulace II.Newtonova zákona (11.2) je v podstatě definice síly, jestliže již máme zavedeny veličiny hmotnost a zrychlení. Zrychlení jsme definovali ve větě 10.4, veličinu hmotnosti můžeme zavést jako míru odporu, který klade každé těleso změně pohybového stavu. Zkušenost ukazuje, že

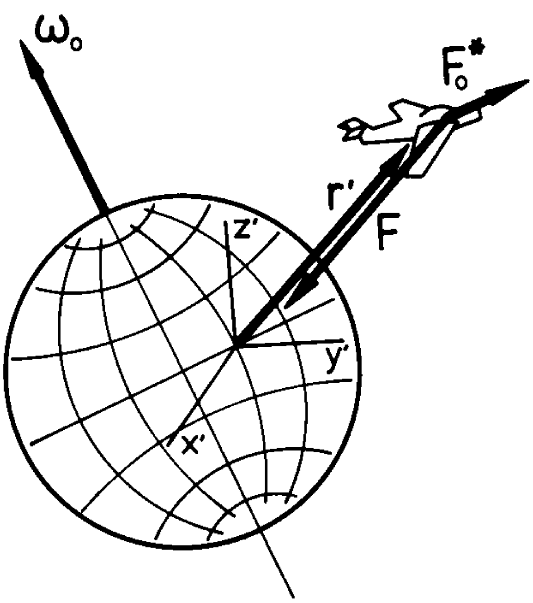
$$\boldsymbol{F}_o^* = -m[\omega_o x(\omega_o x \boldsymbol{r}')], \qquad (11.4)$$

Coriolisova síla

$$\boldsymbol{F}_c^* = -2m(\omega_o x \boldsymbol{v}'). \qquad (11.5)$$




**Obr. 11.1** K zavedení odstředivé a Coriolisovy setrvačné síly v neinerciální soustavě x' y' z' spojené se Zemí




**Obr. 11.2** K závislosti tíhové síly na zeměpisné poloze

čím je tato míra, tj. hmotnost větší, tím menší zrychlení udělí stejná síla danému tělesu. Jestliže tedy změříme zrychlení $a$ a $a_o$, které stejná síla udělí danému tělesu a tělesu s hmotností zvolenou za základ, můžeme hmotnost tělesa vypočítat pomocí vztahu (11.1). Experiment potvrzuje, že mezi příčinou (silou) a součinem hmotnosti a vyvolaného zrychlení je přímá úměra. II.Newtonův zákon tuto závislost kvantifikuje tím, že určuje jednotku pro měření síly. Je jí newton, který je definován jako $N = kg\ m\ s^{-2}$, tj. síla, která hmotnosti 1 $kg$ udělí zrychlení 1 $m\ s^{-2}$.

S uvážením II.Newtonova zákona můžeme pohyby v neinerciálních souřadných soustavách vyšetřovat i jiným způsobem. Neinerciálnost soustavy můžeme respektovat tím, že zavedeme pomocné - setrvačné síly, působící na těleso. Jaké to musí být síly? Tvar II. pohybového zákona (11.2) $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ pro neinerciální souřadnou soustavu, pokud k výslednici reálných sil $\boldsymbol{F}$ připočteme příslušné setrvačné síly $\boldsymbol{F}'$,

$$\boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{a}_o - m\omega_o x(\omega_o x \boldsymbol{r}') - \\ - 2m(\omega_o x \boldsymbol{v}') - m\epsilon_o x \boldsymbol{r}',$$

a po úpravě

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_u^* + \boldsymbol{F}_c^* + \boldsymbol{F}_o^* + \boldsymbol{F}_e^* = m\boldsymbol{a}$$

kde $\boldsymbol{F} = m\ \boldsymbol{a}$ představuje reálnou sílu danou vzájemným působením okolních těles a vyšetřovaného tělesa, $\boldsymbol{F}_u^* = -m\ \boldsymbol{a}_o$ představuje setrvačnou sílu unášivou odpovídající zrychlení soustavy S' vůči S, $\boldsymbol{F}_o^* = -m[\bar{\omega}_o \text{ x } (\bar{\omega}_o \text{ x } v)]$ se nazývá Coriolisova síla $\boldsymbol{F}_e^* = -m(\varepsilon_o \text{ x } r')$ je Eulerova setrvačná síla (věta 11.5), obr. 11.1.

Odstředivá setrvačná síla způsobuje, že tíhové zrychlení závisí na zeměpisné poloze (obr. 11.2).

Coriolisova síla způsobuje např. změnu směru pasátových větrů na jižní polokouli z poledníkového směru na směr jihozápadní, NEWTON, sir Isaac (ňutn), 1643-1727, anglický fyzik, matematik, astronom, právem zařazován mezi nejvýznamnější přírodovědce všech dob. Již jako student projevoval samostatnost a originálnost v řešení problémů. Jeho fyzikální bádání započalo experimentálními pracemi v optice. Objevil rozklad bílého světla hranolem, vysvětlil interferenci světla, zkonstruoval první zrcadlový dalekohled a vyslovil principy korpuskulární teorie světla. Druhá fáze jeho vědeckých prací zahrnuje rozsáhlé dílo z mechaniky, kterým bylo dovršeno budování dynamiky. V monumentálním trojsvazkovém díle "Matematické základy přírodní filozofie" (1697) je zahrnuto vše, co fyzika do té doby zjistila o mechanickém pohybu a navíc o geniálně formulované pohybové zákony a zákon gravitace. Newtonovou formulací základních zákonů dynamiky byl ve fyzice poprvé matematicky jasně zobrazen pohyb, vybudováno komplexní učení o prostoru a čase, hmotnosti a síle, které poznamenalo celý vývoj fyziky ještě i v následujících stoletích. Až Einsteinova teorie relativity ukázala na omezenou platnost klasické mechaniky. Newton zanechal za sebou i rozsáhlé dílo z matematiky. Na jeho počest je jeho jménem pojmenována jednotka síly.

CORIOLIS Gustave Gaspard (korioli), 1792-1843, francouzský fyzik a matematik. Zabýval se aplikací matematiky na teorii strojů. Objevil zrychlení při pohybu tělesa v neinerciálním systému.

silnější erozi břehů na jedné straně řek, různé opotřebení kolejnic u vlaků nebo odchylky při střelbě.

Na závěr je nutno uvést, že původní znění Newtonových zákonů bylo jiné, než jsme uvedli v rovnici (11.2). O tom, co přesně myslel Newton když formuloval své zákony tak, jak je uveřejnil, se dodnes vedou diskuse. Jedno je však jisté, že zákon síly formuloval v takové podobě, že nepotřebuje úpravu ani po 300 letém bouřlivém rozvoji fyziky.
Jeho formulace je

$$\boldsymbol{F} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}. \qquad (11.6)$$

V této formulaci musíme pravděpodobně spatřovat geniální intuici Newtona, že hmotnost nemusí být veličina nezávislá na pohybu.

Teorie relativity skutečně potvrdila, že hmotnost není konstanta a je určena vztahem

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

přičemž $m_0$ je tzv. klidová hmotnost a $c$ je rychlost světla ve vakuu. Vztah (11.2) vyplývá z tohoto obecnějšího vztahu (11.6) úpravou $\boldsymbol{F} = d(m\,\boldsymbol{v})/dt = m(d\boldsymbol{v}/\,dt) = m\,\boldsymbol{a}$, to je za předpokladu, že je splněno $dm/dt = 0$.

**11.2 Impuls síly a hybnost, moment síly a moment hybnosti**

Newtonovy zákony dynamiky nutno chápat jako nejobecnější zákony pohybu, takže kterýkoliv konkrétní pohyb hmotných bodů je pomocí nich v zásadě principiálně řešitelný. Tato cesta může být někdy dosti zdlouhavá, proto si z Newtonových zákonů odvodíme několik dalších "zákonů", pomocí kterých bude řada problémů dynamiky hmotných bodů řešitelná podstatně jednodušeji. Definujeme si proto další důležité veličiny - impuls síly, hybnost, impuls momentu síly a moment hybnosti (věty 11.7, 11.8, 11.10 a 11.11) a jejich souvislosti (věty 11.9 a 11.13)

11.7
Impuls síly $\boldsymbol{I}$, vyjadřující časový účinek síly, definujeme pomocí integrálu

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}.dt. \tag{11.7}$$

Jednotka impulsu síly je $[I] = N\,s = kg\,m\,s^{-1}$.

11.8
Hybnost hmotného bodu $\boldsymbol{p}$ je vektorová veličina určená součinem jeho hmotnosti a rychlosti

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{11.8}$$

Jednotka hybnosti je $[p] = kg\,m\,s^{-1}$.

11.9
Věta o impulsu síly a hybnosti: změna hybnosti hmotného bodu je rovna impulsu působící síly za dobu, po kterou síla působila

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{I} \tag{11.9}$$

11.10
Moment síly $\boldsymbol{M}$ vzhledem k počátku souřadné soustavy definujeme vektorovým součinem polohového vektoru působící síly a síly (obr. 11.3)

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} x \boldsymbol{F}. \tag{11.10}$$

Jednotka momentu síly je $[M] = m\,N = kg\,m^2\,s^{-2}$.

11.11
Impuls momentu síly $\boldsymbol{L}$, vyjadřující časový účinek momentu síly definujeme pomocí integrálu

Větu o impulsu síly a hybnosti (11.9) odvodíme jednoduše tak, že do definičního vztahu pro impuls síly (11.7) dosadíme za sílu z II.Newtonova zákona

$$\boldsymbol{I} = \int_0^t \boldsymbol{F} dt = \int_0^t m\boldsymbol{a} dt = \int_0^t m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} =$$
$$= \int_{\boldsymbol{v}_1}^{\boldsymbol{v}_2} m\, d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 .$$

Podle tohoto výsledku je rozdíl na konci a začátku pohybu roven impulsu působící síly.

Moment síly je definován vztahem (11.10) z kterého vyplývá, že moment síly je roven součinu velikosti síly a tzv. ramene síly a (obr. 11.3), protože $M = r\,F \sin \alpha = F\,a$. Směr vektoru $\boldsymbol{M}$ určuje směr vektoru úhlové rychlosti $\vec{\omega}$, který by charakterizoval otáčivý pohyb hmotného bodu vyvolaného tímto momentem síly. Moment síly je proto velmi důležitá veličina pro zkoumání rotačních pohybů.

Lehce si dokážeme užitečný poznatek, že součet momentů vzhledem k témuž bodu 2 sil, které jsou ve vztahu akce a reakce působících na dvě tělesa se rovná nule.
Podle obr. 11.4 a věty 11.4 můžeme psát

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{r}_1 x \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{r}_2 x \boldsymbol{F}_{21} =$$
$$= (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) x \boldsymbol{F}_{12} = 0, \tag{11.14}$$

protože vektory ( $\boldsymbol{r}_1$ - $\boldsymbol{r}_2$) a $F_{12}$ jsou rovnoběžné.

$$\boldsymbol{L} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M} dt. \qquad (11.11)$$

Jednotka impulsu momentu je $[L] = kg\ m^2\ s^{-1}$.

11.12

Moment hybnosti hmotného bodu ***b*** vzhledem k počátku souřadné soustavy definujeme vektorovým součinem polohového vektoru hmotného bodu a jeho hybnosti

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}\ x\ m\boldsymbol{v}. \qquad (11.12)$$

Jednotka momentu hybnosti je $[b] = kg\ \mathrm{m}^2\ s^{-1}$.

11.13

Věta o impulsu momentu síly a momentu hybnosti hmotného bodu je rovna impulsu momentu síly za dobu, po kterou moment síly působí

$$\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{L}. \qquad (11.13)$$

Větu 11.13 odvodíme pomocí definice momentu síly (11.10), dosazením za sílu ze zákona síly ve tvaru (11.6)

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} x \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} x m\boldsymbol{v}) = \\ = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} x \boldsymbol{p}) = \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}. \qquad (11.15)$$

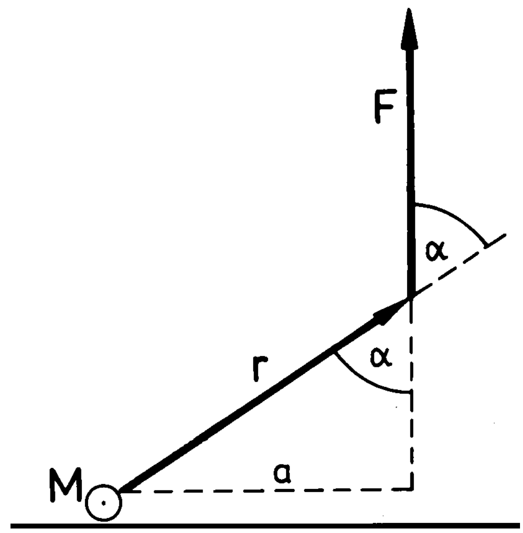
Úpravou a integrací získáme konečný tvar

$$\boldsymbol{L} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M} dt = \int_{b_1}^{b_2} d\boldsymbol{b}$$

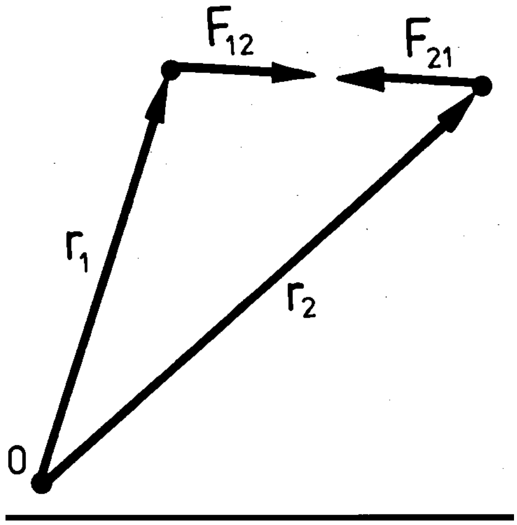
neboli

$\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{L}$.

Pomocí hybnosti a momentu hybnosti můžeme s výhodou formulovat Newtonovy pohybové zákony pro soustavu hmotných bodů.




**Obr. 11.3** K definici momentu síly




**Obr. 11.4** K výpočtu momentu dvojice sil

HAMILTON, sir William Rowan (hamiltn), 1805-1865, irský matematik a fyzik. Zabýval se nejprve optikou a mechanikou. Již jako 19 letý předložil originální práce z této problematiky, poukázal na matematickou podobnost geometrické optiky a dynamiky. Sleduje tehdejší tendenci v matematickém zpracování fyzikálních problémů (nahrazování pohybových rovnic variačními principy), zformuloval princip nejmenšího účinku, dlouho považovaný za nejobecnější princip přírodních věd. Základem jeho obecné metody byla jím zavedená charakteristická funkce, která sehrála velmi užitečnou roli i v moderní fyzikální teorii - kvantové mechanice. Za realizaci Hamiltonových myšlenek můžeme považovat i elektrostatický elektronový mikroskop. Hamilton vypracoval i přesnou algebru komplexních čísel a teorii vektorů.

### 11.3 Práce, výkon, energie

Viděli jsme, že některé fyzikální veličiny, např. rychlost a zrychlení, jsou závislé na volbě vztažné soustavy. Hmotnost pohybujícího se tělesa je však stejná v soustavě pevné $S$ i v pohyblivé $S'$ (nepřihlížíme-li zatím k relativistickým jevům při velkých rychlostech). Hmotnost má však ještě jednu "invariantnost" - nemění se ani s časem. Takových časových invariantů existuje celá řada. Jedním z nejvýznamnějších je energie. Je to veličina, která v izolovaných soustavách zachovává svou hodnotu při jakýchkoliv dějích, což vyjadřujeme zákonem zachování energie. Mění se přitom formy energie. Příslušné definice jsou obsaženy ve větách 11.14 - 11.16.

11.14
Práce A vykonaná silou $\boldsymbol{F}$, která způsobila posunutí z polohy $\boldsymbol{r}_1$ do $\boldsymbol{r}_2$ je definována

$$A_{12} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r}. \qquad (11.16)$$

Jednotka práce je $[A] = [F][r] = N\ m = J$ (joule). Práci jednoho joulu tedy vykoná konstantní síla jednoho newtonu způsobující posunutí jednoho metru ve směru dráhy.

11.15
Věta o přírůstku energie: energií $W$ nazýváme takovou veličinu, charakterizující stav soustavy, jejíž přírůstek je roven soustavou přijaté práci $A$

$$\Delta W = A. \qquad (11.17)$$

Z této definice energie vyplývá, že jednotka energie je $[W] = [A] = J$.

Práci konáme vždy, jestliže přemísťujeme těleso působením určité síly po určité dráze. Prací rozumíme součin složky síly působící ve směru pohybu $F_p$ a dráhy $s$, po které se těleso hmotný bod přesunul (obr. 11.5), neboli

$$A = F_p\ s. \qquad (11.19)$$

Protože z celkové působící síly $\boldsymbol{F}$ spadá do směru pohybu jen část $F_p = |\boldsymbol{F}| \cos \alpha$, můžeme s ohledem

$$A = F_p s = |\boldsymbol{F}| s \cos\alpha = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{s}. \qquad (11.20)$$

na (11.16) psát
S ohledem na předchozí vyjádření práce síly vidíme, že práce může být jak kladná, nulová i záporná, $A \gtrless 0$.

V obecném případě nemusí být síla $\boldsymbol{F}$ stálá. V takovém případě můžeme postupovat tak, že si celou dráhu, po kterou je práce vykonávána, rozdělíme na tak malé intervaly, charakterizované

energie. Průkopnickou práci vykonal i v kinetické teorii plynů. Na jeho počest je jeho jménem pojmenována jednotka práce a energie.

WATT James (wat), 1736 - 1819, anglický vynálezce. Pracoval na zdokonalení parního stroje, navrhl využití rozpínání páry, navrhl regulátor otáček parního stroje. Na základě všech těchto zdokonalení r. 1784 zkonstruoval univerzální parní stroj, který se rychle rozšířil a sehrál významnou roli při přechodu od manufakturního způsobu výroby k průmyslové velkovýrobě. Na jeho počest je jeho jménem pojmenována jednotka výkonu.

### 11.4 Kinetická a potenciální energie - zákon mechanické energie

V mechanice se setkáváme se dvěma formami energie. Práce síly definovaná vztahem (11.16) se může projevit buď tak, že hmotný bod změní svou rychlost (např. práce motoru automobilu), nebo že hmotný bod změní polohu (např. napínání pružiny, zvedání tělesa apod.). Vykonaná práce se projeví jako změna energie. V prvém případě se práce síly projeví ve změně tzv. pohybové, kinetické energie, ve druhém případě ve změně polohové, potenciální energie. Tyto energie jsou definovány větami 11.17 a 11.20. Součet kinetické a potenciální energie soustavy se nazývá mechanická energie, která se v izolovaných soustavách zachovává (věta 11.21).

11.17
Přírůstek kinetické energie hmotného bodu mezi dvěma místy 1 a 2 je určen prací výslednice všech sil mezi těmito dvěma místy

$$W_{k2} - W_{k1} = A \,. \qquad (11.24)$$

11.18
Kinetická energie $W_k$ hmotného bodu hmotnosti m pohybujícího se rychlostí $\boldsymbol{v}$ ($v \ll c$, kde $c$ je rychlost

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \,. \qquad (11.25)$$

světla ve vakuu) je dána vztahem

11.19
Nezávisí-li práce síly při přemísťování hmotného bodu na tvaru dráhy, ale jen na počátečním a koncovém bodu dráhy, nazýváme příslušnou sílu konzervativní a odpovídající pole potenciálové. U potenciálových polí můžeme zavést veličinu potenciální energie.

11.20
Přírůstek potenciální energie soustavy (tj, hmotného bodu a dalších těles, která působí na hmotný bod) při přemístění hmotného bodu z místa 1 do místa 2 je roven práci $A'_{12}$ síly $F'$, přemáhající sílu pole $\boldsymbol{F}$, mezi těmito dvěma místy 1 a 2 neboli

Vztah (11.25) odvodíme dosazením do vztahu pro práci (11.16) za sílu $\boldsymbol{F}$ ze zákona síly (11.2). Dostaneme

$$A = \int_1^2 \Sigma \boldsymbol{F} . d\boldsymbol{r} = \int_1^2 m\boldsymbol{a} . d\boldsymbol{r} = m \int_1^2 \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} . d\boldsymbol{r} =$$
$$= m \int_{v_1}^{v_2} \boldsymbol{v} . d\boldsymbol{v} = m \int_{v_1}^{v_2} v dv =$$
$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W_{k2} - W_{k1} \,, \qquad (11.31)$$

kde jsme využili poznatek, že libovolný vektor vynásobený skalárně svým diferenciálem se rovná součinu hodnot těchto vektorů. Je totiž $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} = v$, takže diferencováním dostaneme $\boldsymbol{v}.d\boldsymbol{v} = v dv$. Dále jsme předpokládali nezávislost hmotnosti hmotného bodu na rychlosti, což je splněno jen při rychlostech $v \lll c$, kde $c$ je rychlost světla.

Potenciální energie závisí na povaze konzervativní síly, která charakterizuje silové pole působící na hmotný bod. Například okolí pružiny (obr. 11.7) můžeme označit za silové pole, protože při umístění hmotného bodu upevněného

$$W_{p2} - W_{p1} = A'_{12}. \tag{11.26}$$

Protože při přemísťování ale stále platí $\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}$, platí rovněž pro práci obou sil vztah $A'_{12} = -A_{12}$.

11.21
<u>Zákon zachování mechanické energie:</u> působí-li na hmotný bod pouze konzervativní síly, je mechanická energie izolované soustavy (tvořené vyšetřovaným hmotným bodem a ostatními tělesy, která na hmotný bod působí) konstantní

$$W_k + W_p = konstanta, \tag{11.27}$$

kde $W_k$ je kinetická energie hmotného bodu a $W_p$ je potenciální energie soustavy.

11.22
Síla působící na hmotný bod v potenciálovém poli je určena vztahem

$$\boldsymbol{F} = -grad\, W_p. \tag{11.28}$$

Jednotlivé složky síly jsou proto

$$\boldsymbol{F}_x = -\frac{\delta W_p}{\delta x}, \quad F_y = -\frac{\delta W_p}{\delta y}, \quad F_z =$$

Potenciální energie vztažená na jednotkovou hmotnost (později uvidíme, že i náboj) se nazývá potenciál V příslušného potenciálového pole $\boldsymbol{E}$

$$V = \frac{W_p}{m}, \quad \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}. \tag{11.29}$$

Platí mezi nimi vztah

$$\boldsymbol{E} = -grad\, V. \tag{11.30}$$

na pružině do libovolného místa, působí na hmotný bod síla určité velikosti a směru. Přibližně platí, že při napnutí pružiny ve směru osy o výchylku $\boldsymbol{x}$ působí na hmotný bod síla pole úměrná této výchylce, směřující do rovnovážné polohy

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{x}, \tag{11.32}$$

kde k je konstanta úměrnosti. Přírůstek potenciální energie soustavy hmotný bod - pružina při přemístění z $x_1$ do $x_2$ definovaná vztahem (11.26) pak je

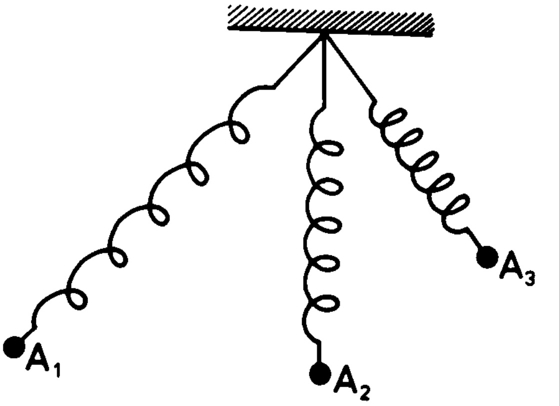
$$W_{p2} - W_{p1} = -A_{12} = -\int_1^2 \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = \int_{x_1}^{x_2} -k\boldsymbol{x}.d\boldsymbol{x} =$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2. \tag{11.33}$$

Elastická potenciální energie soustavy hmotný bod - pružina je v tomto případě $W_p$ = 2 $kx^2$, přičemž platí, že $W_p = 0$ pro $x = 0$.

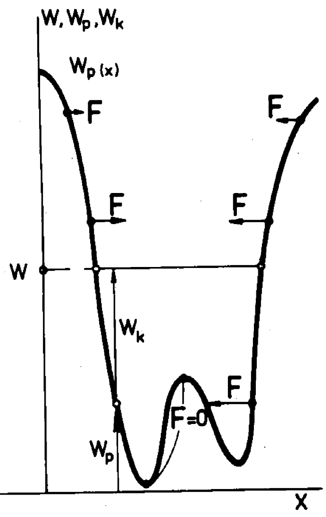
Jiným příkladem potenciálového pole je pole gravitační. Síla působící na hmotný bod hmotnosti $m$ v blízkosti povrchu Země je $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$, kde $\boldsymbol{g}$ je gravitační zrychlení. Proto změna potenciální energie soustavy hmotný bod - Země při změně polohy z místa 1 do místa 2 je

$$W_{p2} - W_{p1} = -\int_1^2 \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = \int_1^2 F\,dx =$$
$$= mg\int_{x_1}^{x_2} dx = mgx_2 - mgx_1, \tag{11.34}$$

takže potenciální energie soustavy hmotný bod - Země v blízkosti povrchu Země je $W_p = m\ g\ x$,




**Obr. 11.7** K vyložení pojmu potenciálového pole




**Obr. 11.8** K vyšetřování pohybů pomocí závislostí potenciální energie na poloze

kde $x$ je výška nad povrchem Země a kde jsme položili $W_p = 0$ pro $x = 0$.

Dalším příkladem potenciálového pole je elektrické pole, pole jaderných sil a jiná pole.

Působí-li na hmotný bod kromě sil konzervativních, jejichž práci můžeme vyjádřit pomocí potenciální energie $W_p$ také síly disipativní, můžeme práci všech sil ve vztahu (11.31) ještě dále rozepsat na práci sil konzervativních $A_{12}$ a disipativních $A_{d12}$, takže bude

$$W_{k2} - W_{k1} = A = \int_1^2 \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} + \int_1^2 \boldsymbol{F_d} d\boldsymbol{r} =$$
$$= A_{12} + A_{d12}.$$

(11.35)

Dosadíme-li do předchozího vztahu za práci sil konzervativních z definičního vztahu (11.26) získáme

$$W_{k2} - W_{k1} = -(W_{p2} - W_{p1}) + A_{d12}$$

*a po úpravě*

$$W_{k2} + W_{p2} = W_{k1} + W_{p1} + A_{d12}.$$

(11.36)

kde práce disipativních sil na dráze z bodu 1 do bodu 2 je vždy $A_{d12}<0$.

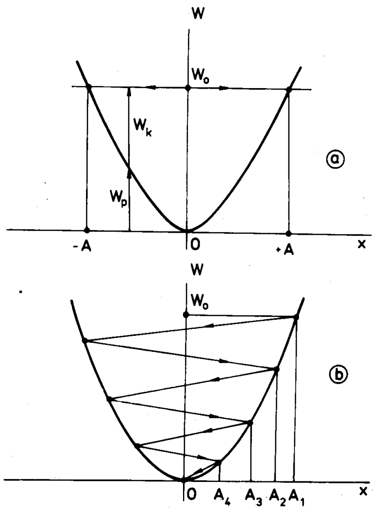
V praxi se často postupuje obráceně - hmotný bod v silovém poli je popsán potenciální energií a z ní chceme stanovit velikost a směr síly. Potřebný vztah získáme z definice potenciální energie (11.26)

$$W_{p2} - W_{p1} = -A_{12} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r}$$

*a diferencováním*

$$dW_p = -\boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r}.$$

(11.37)




**Obr. 11.9** K vyšetření pohybu soustavy hmotný bod - pružina
a) bez disipativních sil
b) s disipativními silami

LAGRANGE Joseph Louis (lagranž), 1736-1813, francouzský matematik a fyzik, původem z Itálie, prvý profesor geometrie na Polytechnice v Paříži. Lagrange velmi úspěšně pracoval skoro ve všech oblastech čisté a aplikované mechaniky. V letech 1760-1761 vypracoval důvtipný analytický variační počet, aplikoval ho na problémy mechaniky a tak významně přispěl k jejímu rozvoji. Později podal definici potenciálu, jehož gradient určuje intenzitu pole a tím i přitažlivou gravitační sílu. Zabýval se rovněž problémem pohybu tří těles a našel některé dílčí řešení.

Diferenciál funkce $W_p$ $(x, y, z)$ můžeme napsat ve tvaru

$$dW_p = \frac{\delta W_p}{\delta x}dx + \frac{\delta W_p}{\delta y}dy + \frac{\delta W_p}{\delta z}dz =$$
$$= \left( \frac{\delta W_p}{\delta x}\boldsymbol{i} + \frac{\delta W_p}{\delta y}\boldsymbol{j} + \frac{\delta W_p}{\delta z}\boldsymbol{k} \right) (dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}) =$$
$$= \left( \frac{\delta}{\delta x}\boldsymbol{i} + \frac{\delta}{\delta y}\boldsymbol{j} + \frac{\delta}{\delta z}\boldsymbol{k} \right) W_p . d\boldsymbol{r} = grad\, W_p . d\boldsymbol{r} . \tag{11.38}$$

Porovnáním obou vztahů (11.37) a (11.38) získáme konečný vztah $\boldsymbol{F}$ = -grad $W_p$, který je obsahem 11.22.

Je zajímavé si ještě všimnout,jak můžeme jednoduše matematicky formulovat kriterium pro konzervativnost síly (věta 11.19) a sice

$$\oint \boldsymbol{F} . d\boldsymbol{r} = 0 , \tag{11.39}$$

což je křivkový integrál po uzavřené křivce a je roven nule, jinými slovy práce konzervativní síly po uzavřené dráze $A_{11}$=0.

Zákon zachování mechanické energie lze s výhodou použít při rozboru pohybu hmotného bodu bez řešení pohybových rovnic. K tomu se využívají závislosti potenciální energie soustavy na poloze $W_p = W_p (\boldsymbol{r})$.

Jednorozměrný příklad těchto závislostí je na obr. 11.8. Z věty 11.28 vyplývá, že pro sílu v tomto případě platí $F = -dW_p/dx$, takže velikost a směr směrnice závislosti v daném bodě x je přímo úměrná velikosti a směru působící síly. V bodech, kde dosahuje potenciální energie maxima nebo minima $dW_p/dx$ = 0 platí $F$ = 0.Z grafu je možno rovněž zjistit nejen velikost potenciální energie $W_p$ v každém místě pohybu, ale rovněž i hodnotu kinetické energie $W_k$, je-li splněn zákon $W_k + W_p$ = konst. Na obr. 11.9 je jako příklad uveden pohyb soustavy hmotný bod - pružina s počáteční energií $W_o$ a amplitudou $A$ pro případ bez disipativních sil (obr. 11.9a) a s disipativními silami (obr. 11.9b).