

## Charakter odporových síl pôsobiacich na pohybujúce sa teleso

Peter Griger, Peter Bokes<sup>1</sup>

Ústav jadrového a fyzikálneho inžinierstva Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Slovenská technická univerzita, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava, Slovenská republika  
p.griger@gmail.com

### Abstrakt

Cieľom práce je testovanie charakteru odporových síl pôsobiacich na pohybujúce sa teleso. Meranie je zamerané na hľadanie závislosti trenia od rýchlosti telesa. Na meranie používame meraciu sadu PHYWE, ktorá sa skladá z dvoch vozíkov, dráhy, meracieho prístroja a závaží. Používame aj nehmotnú kladku na urýchľovanie vozíka. Vychádzame z minuloročnej ŠVOČ, ktorej úlohou bolo navrhnuť laboratórne meranie pre túto meraciu sadu.

### 1. Úvod

V školskom roku 2011/2012 získala škola meraciu sadu PHYWE, pre ktorú bolo potrebné vytvoriť laboratórne meranie pre študentov. Po úspešnom splnení tejto úlohy sa otvoril priestor pre ďalšie úlohy.

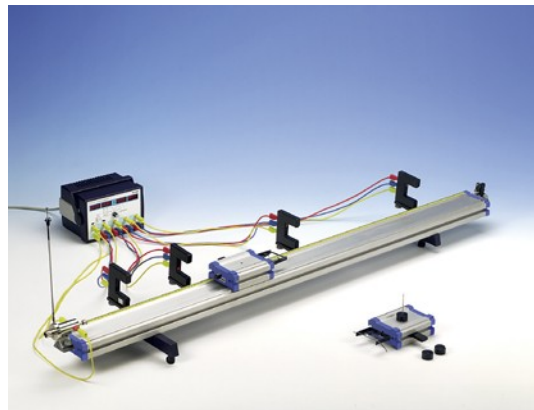
Prvou z nich sa stalo overenie nezávislosti trenia pre pohybujúce sa teleso. Keďže výsledkom tejto úlohy bolo zistenie, že trenie je nezávislé len pri malých rýchlostiach, vyvstala otázka, aká ďalšia sila pôsobí proti pohybu telesa.

Rozhodli sme sa overiť závislosti týchto zmien od rýchlosti a aerodynamicky aktívnej plochy vozíka. Urýchľovanie sme uskutočňovali pomocou kladky, kde na jednej strane bolo zavesené závažie a druhá strana bola pripevnená k vozíku.

### 2. Popis zostavy

Zostava PHYWE sa skladá z dráhy, po ktorej sa pohybujú vozíky pomocou ložísk a kolies, ktoré vykazujú minimálne trenie. Vozíky sa rozbiehajú pomocou pružinového mechanizmu alebo nehmotnej kladky a sady závaží, na konci dráhy. Na vozíky sa môžu umiestňovať závažia a násadky, ktoré zabezpečujú pružnú a nepružnú zrážku alebo zväčšujú jeho účinnú aerodynamickú odporovú plochu. Pomocou aparatury je možné získať dobu, za ktorú

prejde vozík cez senzor a od nej potom odvodiť napríklad rýchlosť jeho pohybu. Tieto doby prechodov sa zaznamenávajú na elektronických stopkách, ktoré sú napojené na foto-detektory.



Meracia sada PHYWE

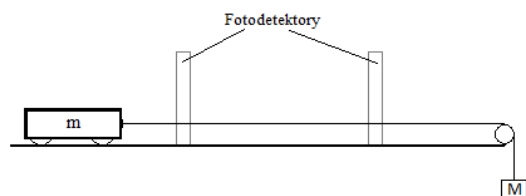


Schéma zapojenie

### 3. Meranie

Pri meraní sme vychádzali z pohybovej rovnice(1) s lineárnym trením.

$$m \frac{dv}{dt} = Mg - \mu_0 mg - k_1 v \quad (1)$$

Po predelení  $m$  a  $g$  a preintegrování medzi časmi merania nájdeme

<sup>1</sup> Vedúci práce

$$\frac{\Delta v}{g} = \left(\frac{M}{m} - \mu_0\right) \Delta t - \frac{k_1}{mg} d \quad (2)$$

kde

$$d = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (3)$$

je dráha prejdená medzi meraniami. Úpravou nájdeme

$$\frac{M}{m} - \frac{1}{g} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \mu_0 + \frac{k_1}{mg} \langle v \rangle \quad (4)$$

kde  $\langle v \rangle = d/\Delta t$  je priemerná rýchlosť

Hmotnosti vozíka aj všetkých závaží sme vždy overili digitálnou váhou. Vozík sme umiestnili na začiatok dráhy a spojili so závažím, ktoré bolo na druhom konci prevesené cez kladku. Závažím sme urýchl'ovali vozík. Na dráhe boli pripravené dva foto-detektory, ktorými sme merali čas prechodu tienidla vozíka prvým detektorom, druhým detektorom a čas, ktorý uplynul medzi tými dvoma prechodmi. Detektory boli umiestnené vo vzdialenosti 23 cm a 73 cm od začiatku dráhy. Po každých piatich meraniach sme zvýšili hmotnosť vozíka prídavným závažím, zatiaľčo hmotnosť závažia, ktorým sme vozík urýchl'ovali, zostala rovnaká. Postup sme opakovali 12-krát, zakaždým pre päť meraní. Potom sme ešte pre dve rôzne hmotnosti vozíka opäť menili urýchl'ovaciu hmotnosť. K nameraným hodnotám sme dopočítali hodnoty rýchlostí, zrýchlenia a koeficientu trenia. Priemerné hodnoty pre vybrané hmotnosti su znázornené v tabuľke 1.

$m$ [kg]	$M$ [kg]	$\langle v \rangle$ [ms <sup>-1</sup> ]	$\mu$
0,39	0,04	0,71	0,025
0,44	0,04	0,67	0,021
0,49	0,04	0,64	0,019
0,54	0,04	0,62	0,016
0,59	0,04	0,59	0,014

Tabuľka 1

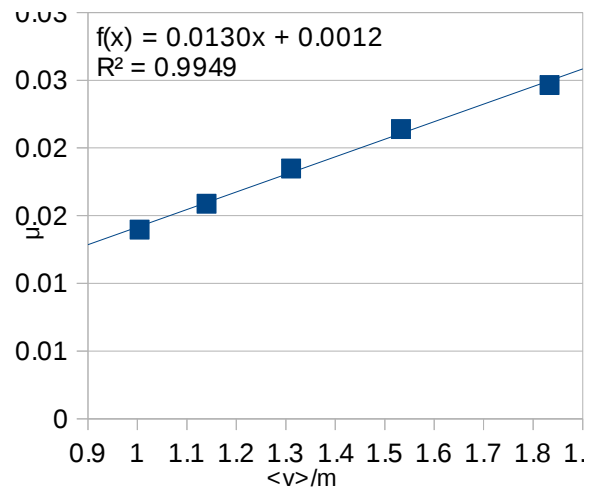
Ak položíme

$$\mu = \frac{M}{m} - \frac{1}{g} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (5)$$

po dosadení do rovnice (4) nájdeme

$$\mu = \mu_0 + \frac{k_1 \langle v \rangle}{g m} \quad (6)$$

Požítím lineárnej regresie na rovnici (6) nájdeme ako konštantu úmernosti  $k = k_1/g$  a konštantu posunu  $q = \mu_0$ .



Graf 1

Za pomoci regresie sme zistili že  $k_1 \approx 0,13 \text{ N.m}^{-1}$  a odchýlka  $\Delta k = 5 \cdot 10^{-4}$ . Model lineárneho trenia môžeme prirovnať k Stokesovmu treniu pre ktoré platí vzťah(7), pre guľu s polomerom  $R$  v prostredí z dynamickou viskozitou  $\eta$ .

$$F_s = 6 \pi \eta R v \quad (7)$$

Ak vyjadríme silu ako  $F_s = k_1^S v$  potom

$$k_1^S = 6 \pi \eta R \quad (8)$$

Pre vzduch  $\eta = 1,84 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$  [1]. Vozík má  $R \sim 0,1 \text{ m}$ . Zo vzorca(8)  $k_1^S = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ N.m}^{-1}$ , čo je omnoho menšie ako  $k_1$  vypočítané pomocou regresie.

Kvôli tejto nejasnosti sme určili nový model s predpokladom sily závislej od štvorca rýchlosti.

$$m \frac{dv}{dt} = Mg - \mu_0 m g - k_2 v^2 \quad (9)$$

Predelíme  $m, g$  a preintegrujeme.

$$\frac{\Delta v}{g} = \left(\frac{M}{m} - \mu_0\right) \Delta t - \frac{k_2}{mg} \int_{t_1}^{t_2} v^2(t) dt \quad (10)$$

$$\frac{M}{m} - \frac{1}{g} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \mu_0 + \frac{k_2}{mg} (\langle v^2 \rangle + \frac{1}{6} a \Delta t^2) \quad (11)$$

Kde

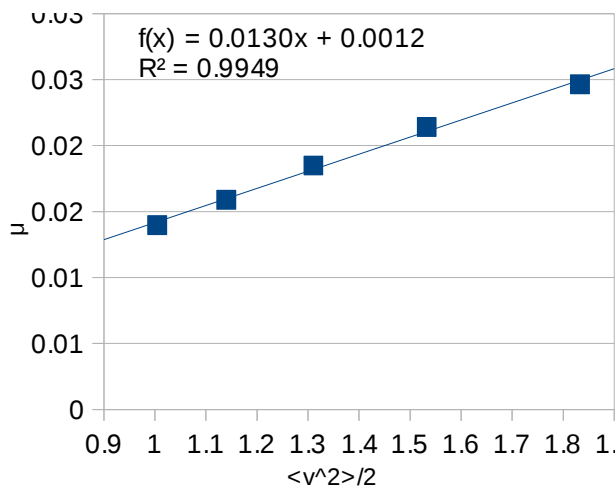
$$\langle v^2 \rangle = (v_1^2 + v_2^2) / 2 \quad (12)$$

Člen  $k_2 a \Delta t^2 / 6mg$  zanedbávame kvôli nízkej hodnote koeficientu  $k_2$  a rozdielu časov  $\Delta t$ . V závere sa k tomuto predpokladu vrátíme.

Použijeme priblíženie (5) a rovnica (11) nadobudne tvar

$$\mu = \mu_0 + \frac{k_2}{mg} \langle v^2 \rangle \quad (13)$$

Opäť za pomoci lineárnej regresie určíme konštantu úmernosti  $k = k_2/g$  a konštantu posunu  $q = \mu_0$  a určíme koeficient  $k_2$ .



Graf 2

Z grafu  $k_2 = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$  a odchýlka  $\Delta k = 3,8 \cdot 10^{-4}$ . Tento model môžeme prirovnať k aerodynamickému odporu prostredia pre ktoré platí vzťah (14).

$$F_A = \frac{1}{2} \rho C S v^2 \quad (14)$$

Kde  $\rho$  je hustota prostredia,  $C$  je koeficient aerodynamického odporu a  $S$  je čelný prierez telesa vzhľadom na vektor  $v$ . Pre vzduch  $\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ . Vozík má prednú plochu  $S \approx 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  a pre kváder platí  $C \approx 1,2$  [2].

Ak vyjadríme  $F_A = kv^2$  potom

$$k_2^A = \frac{1}{2} \rho C S \quad (15)$$

Zo vzorca (14)  $k_2^A = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$  čo je opäť rozdielne od  $k_2$  z regresie.

Ak do  $c = k_2 a \Delta t^2 / 6mg$  kde  $a = \Delta v / \Delta t$ , dosadíme hodnoty tak  $c = 1,23 \cdot 10^{-4}$  teda je ho možné zanedbať.

#### 4. Diskusia

Pozorovali sme závislosť trecej sily pôsobiacej na pohybujúce sa teleso od jeho rýchlosti. Túto silu sme skúmali na dvoch modeloch, s lineárnou a s kvadraticky závislou silou. Tieto sily odporu sme prirovnali k odporovým silám prostredia. Pre lineárnu závislosť existuje Stokesov vzťah (7) z ktorého  $k_1 \approx 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ N.m}^{-1}$  no hodnota z regresie  $k_1 \approx 0,13 \text{ N.m}^{-1}$ .

Pre silu závislú od štvorca rýchlosti existuje vzťah o aerodynamickej sile odporu (13). Vypočítané  $k_2^A = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$  je menšie ako  $k_2 = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$  získaného pomocou regresie. Predpokladáme že lineárny model toto trenie opisuje presnejšie kvôli koeficientom determinovanosti jednotlivých grafov. Taktiež hodnota statického koeficientu  $\mu_0$  je presnejšie opísaná lineárnym modelom. Pre presnejšie určenie určenie trecích síl je potrebné ďalšie meranie s meniacou sa aerodynamicky aktívnou plochou alebo väčším intervalom rýchlostí. Taktiež by bolo vhodné uvažovať model s lineárnym aj kvadratickým závislým odporom pôsobiacim súčasne kde by sa pri nižších rýchlostiach lepšie prejavil lineárny a pri vyšších kvadratický model.

- [1] Wikipédia.org – Viscosity  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Viscosity>
- [2] Wikipédia.org – Odporová sila  
[http://sk.wikipedia.org/wiki/Odporov%C3%A1\\_sila](http://sk.wikipedia.org/wiki/Odporov%C3%A1_sila)
- [3] Surovčík L.; Zrážka dvoch telies; ŠVOČ 2012  
<http://www.kf.elf.stuba.sk/~bokes/projects/SVOC-Surovcik-Nizky-2012.pdf>
- [4] Feynman R., Leighton R., Sands M.; Feynmanovy prednášky z fyziky s rešenými príkladmi 1/3; str. 171-174; Nakladateľství Fragment, 2007
- [5] Ilkovič D.; Fyzika I.; Alfa/SNTL, 1972