

Ako chodí rebrík

Lukáš Surovčík, Peter Bokes¹,
Ústav jadrového a fyzikálneho inžinierstva Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava, Slovenská republika
e-mail: l.surovcik.ls@gmail.com

Abstrakt

Cieľom práce je simulovať pohyb dvoch, na jednom konci spojených ramien po podložke. Využívame znalosti z mechaniky na vytváranie diferenciálnych rovníc. Modelujeme najprv pád jedného ramena, postaveného zvislo na podložku. Ďalej spojíme dve ramená na jednom konci a simulujeme pohyb a reguláciu chôdze týchto ramien.

1 Úvod

Porozumenie chôdze je stále aktuálna otázka, dôležitá pre výskum a vývoj humanoidných robotov, ktorí môžu pomôcť ľuďom v medicíne a rôznych iných oblastiach nášho života.

Začiatkom minulého semestra sme sa rozhodli po pustiť do vytvárania modelu dvoch spojených ramien (rebrík), ktoré by za pomoci motora dokázali chodiť. Informácie o tejto problematike sme získali z rôznych odborných článkov [1].

Použili sme Eulerovu metódu na vytvorenie diferenciálnych rovníc. Využitím vedomostí, hlavne z mechaniky sme najprv navrhli model pádu jedného ramena postaveného kolmo na vodorovnú podstavu. Na porovnanie sme vytvorili model dvoma

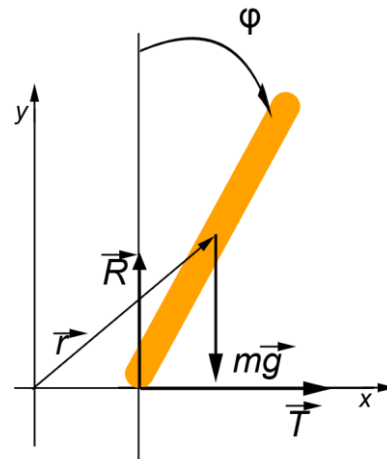
spôsobmi - vzájomným silovým pôsobením ramena na podložku a využitím potenciálnej energie medzi ramenom a podložkou. Pre vytvorenie modelu dvoch spojených ramien (rebríka) sme zvolili model s potenciálnou energiou. Najprv sme doplnili diferenciálne rovnice o vzťahy medzi spojmom dvoch ramien. Keď sa nám to podarilo zaviedli sme do systému motor (moment sily), ktorý pôsobil na ramená v ich spoločnom bode. Snažili sme sa činnosť motora riadiť najprv tak, aby udržal konštantný uhol medzi ramenami a rebrík zostal stáť (neroztiahol sa). Potom sme sa snažili prispôbiť beh motora aby sa rebrík dokázal pohybovať („kráčať“). Vyskytli sa však problémy, zapríčinené pôsobením určitých prvkov modelu (ako napr. prílišný odraz ramena od podložky pri dopade), ktoré sme museli odstrániť upravením

štruktúry systému o rôzne tlmenia a trecie sily. Celý model systému sme naprogramovali.

2 Mechanický systém s dvoma ramenami

2.1 Model jedného ramena

Vytvorili sme fyzikálny opis pre jedno rameno stojace na podložke a simulovali sme jeho pád na ňu pri začiatočnom vychýlení o malý uhol.



Obr. 1 Znáznornenie modelu jedného ramena

Podľa poznatkov [2] sme vytvorili základnú pohybovú rovnicu :

$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{R} + m\vec{g} \quad (1)$$

kde: m - hmotnosť tyče
 \vec{a} - Zrýchlenie ťažiska
 \vec{T} - Trecia sila pôsobiaca na tyč
 \vec{R} - Reakčná sila podložky
 \vec{g} - Tiažové zrýchlenie

¹ Vedúci práce

$$I\ddot{\varphi} = D^* \quad (2)$$

$$\vec{D} = \vec{r}_r \times (\vec{R} + \vec{T}) \quad (3)$$

kde: D - moment sily pôsobiaci na ťažisko tyče

kde: \vec{r}_r - polohový vektor smerujúci od stredu tyče až po jej dolný koniec.

$$D = -R \left(\frac{l}{2} \sin \varphi \pm \frac{l}{2} \mu \cos \varphi \right) \quad (4)$$

Po rozpísaní rovníc podľa jednotlivých polohových súradníc dostávame:

\vec{i} :

$$m\ddot{x} = T \quad (5)$$

\vec{j}

$$m\ddot{y} = R - mg \quad (6)$$

\vec{k}

$$I\ddot{\varphi} = D^* \quad (7)$$

Diferenciálne rovnice sme numericky riešili Eulerovou metódou.

Pri simuláciu sme si pre zvolili nasledovné parametre.

Tab. 1. Hodnoty parametrov simulácie

Veličina	Hodnota	Význam veličiny
l [m]	0,5	Dĺžka ramena
m [kg]	0,25	Hmotnosť ramena
g [m/s ²]	9,8	Tiažové zrýchlenie
μ_k	0,3	Koeficient kinetického trenia
μ_s	0,7	Koeficient statického trenia
A [kg/s ²]	1000	Koeficient pre silu R
k [kg/s]	18000	Koeficient pre silu F_k
k_t	10	Koeficient tlmenia

2.2 Reakcia ramena s podložkou

Reakciu tyčky s podložkou sme simulovali dvoma spôsobmi.

Prvý spôsob je založený na silovom pôsobení podložky na rameno. Silu \vec{R} sme odvodili zo vzťahu (6) nasledovne:

$$\vec{R} = (mg + m\ddot{y})\vec{j} \quad (8)$$

Súradnica $y(t)$ sa stáva závislou od uhla natočenia φ

$$y = \frac{l}{2} \cos \varphi \quad (9)$$

Tento model je najpresnejší.

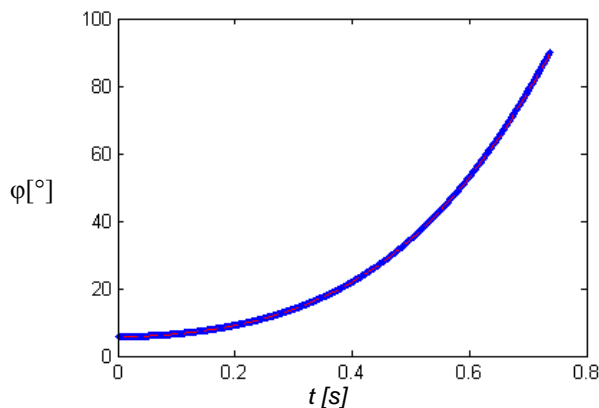
Druhý spôsob spočíva v rozdielnom vyjadrení sily. Vychádzali sme z predpokladu, že ak by sme nechali tyčku mierne prepadnúť pod podložku, tyčka by získala zápornú potenciálnu energiu. Deriváciou tejto energie by sme získali reakčnú silu \vec{R} . Túto silu sme určili ako:

$$R = \begin{cases} 0, & y_d \geq 0 \\ -Ay_d, & y_d < 0 \end{cases} \quad (10)$$

kde: y_d - vzdialenosť spodnej časti tyče od povrchu podložky.
 A - multiplikačný koeficient

Tento model je pomerne presný, avšak vznikajú pri ňom poruchy spôsobené kmitaním spodného bodu tyčky.

Porovnaním oboch týchto modelov reakcie tyčky s podložkou sme zistili, že obe sa na seba veľmi podobajú. Je to možné vidieť na nasledujúcom grafe:



Obr. 2. Uhol natočenia φ v čase

Z Obr. 2. možno vidieť, že obe krivky sa prekrývajú a tyčka dopadne na podložku (uhol 90°) za rovnaký čas.

Suma štvorcov odchýliek súradnice y ťažiska medzi oboma modelmi je takmer nulová.

2.3 Model dvoch spojených ramien

Pri modeli s dvoma ramenami, pevne spojenými na jednom konci („rebrík“) sme chceli simulovať pohyb (podobný chôdzi) regulovaným priťahovaním a odťahovaním ramien. Na vynútený pohyb ramien je potrebná energia, ktorú dodáva zdroj, v našom prípade motor - moment sily pôsobiaci na ramená v mieste ich spoločného spoja.

Pohybové rovnice pre prvé a druhé rameno sú ekvivalentné, avšak nahradíme x , y , φ premennými a ich deriváciami x_2 , y_2 , φ_2 . Vzťah (1) doplníme o silu \vec{F}_k ktorou pôsobí prvé rameno na druhé v ich spoločnom bode. Pre reakciu ramena s podložkou sme využili \vec{R} podľa vzťahu (10).

$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{R} + m\vec{g} + \vec{F}_k \quad (11)$$

Pre reakciu \vec{F}_k využijeme vzťahy využívajúce potenciálnu energiu (podobne ako \vec{F}_k)

$$\vec{F}_k = -k\Delta x_h \vec{i} - k\Delta y_h \vec{j} \quad (12)$$

kde: \vec{F}_k - sila, ktorou na seba vzájomne pôsobia ramená
 Δx_h , Δy_h - vzájomná vzdialenosť horných koncov ramien
 k - multiplikačný koeficient, zvyšujúci účinok sily \vec{F}_k

Vzťah (3) doplníme o pôsobenie sily \vec{F}_k a momentu motora \vec{D}_m , ktorý sme zaviedli, aby sme dokázali regulovať pohyb ramien. Po úprave bude tento vzťah vyzeráť nasledovne:

$$\vec{D} = \vec{r}_r \times (\vec{R} + \vec{T}) - \vec{r}_r \times \vec{F}_k + \vec{D}_m \quad (13)$$

Po rozpísaní rovníc podľa jednotlivých polohových súradníc dostávame:

\vec{i} :

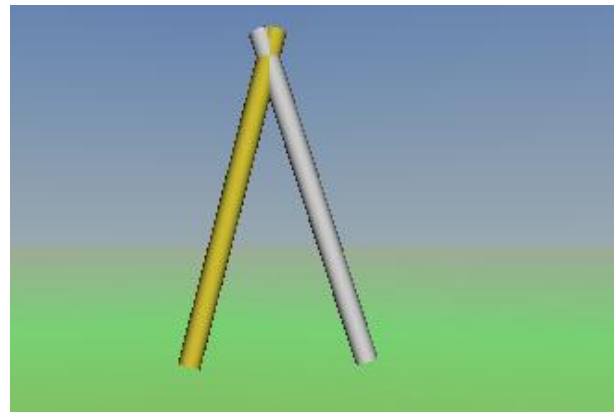
$$m\ddot{x} = T + F_{k,x} \quad (14)$$

\vec{j} :

$$m\ddot{y} = R - mg + F_{k,y} \quad (15)$$

\vec{k} :

$$I\ddot{\varphi} = -R \frac{l}{2} (\sin \varphi \pm \mu \cos \varphi) + k \frac{l}{2} (-\Delta x_h \cos \varphi + \Delta y_h \sin \varphi) + D_m \quad (16)$$



Obr. 3 Ukážka modelu

2.4 Trecia sila od podložky

Treciu silu pôsobiacu v smere proti pohybu spodnej časti tyče v smere \vec{l} sme navrhli tak, že pokiaľ sa spodný bod nebude hýbať, bude naň pôsobiť statické trenie, ak sa začne hýbať, bude pôsobiť kinetické trenie.

Trecia sila od podložky, T_0 , ktorá by bola potrebná na to, aby sa spodný bod tyče nepohyboval v smere \vec{l} je určená podmienkou:

$$\ddot{x}_d = \dot{x}_d = 0, \text{ kde } x_d = x - \frac{l}{2} \sin \varphi \quad (17)$$

$$\dot{x}_d = 0 = \dot{x} - \frac{l}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \quad (18)$$

$$\ddot{x}_d = 0 = \ddot{x} - \left(\frac{l}{2} \cos \varphi \ddot{\varphi} - \frac{l}{2} \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \right) \quad (19)$$

Z rovnice (19) si vyjadríme \ddot{x} a z (14) $T_0 = T$

$$T_0 = \left(\frac{l}{2} \cos \varphi \ddot{\varphi} - \frac{l}{2} \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \right) - F_{kx} \quad (20)$$

Pomocou týchto výrazov môžeme veľkosť aktuálnej trecej sily vyjadriť nasledovne:

$$T = \begin{cases} T_0, & |T_0| \leq T_{0,max} = \mu_s R \\ \mu_k R, & |T_0| > T_{0,max} = \mu_s R \end{cases} \quad (21)$$

Trecia sila svojimi účinkami pôsobí v smere proti pohybu telesa. Znamienko tejto sily musí byť teda opačné ako je znamienko rýchlosti pohybu spodného bodu telesa (v_d) v smere \vec{l} . Znamienko sme najprv určovali jednoducho, ako zápornú hodnotu v_d . Potom, aby bola funkcia znamienka hladká sme ju určili ako

$$\pm = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} v_d \quad (22)$$

2.5 Motor

Pre riadenie pohybu sme navrhli motor (v systéme jeho pôsobenie predstavuje moment motora \vec{D}_m). Najprv sme sa pokúšali vyjadriť \vec{D}_m ako funkciu času. Ak by sme predpokladali, že uhol natočenia ramena φ v čase má harmonický priebeh, dokázali by sme podľa neho predpísať $D_m(t)$. Avšak ukázalo sa, že je tento prístup nie je efektívny, pretože odhadnúť správanie sústavy je veľmi náročné, vznikajú rôzne výchyľky, ktoré činia celý systém s vopred predpísanou činnosťou motora nestabilným.

Rozhodli sme sa, že činnosť motora bude regulovaná, závislá od aktuálnych hodnôt stavových veličín. Na začiatok sme sa snažili pomocou motora zabrániť ramenám, aby sa od seba rozťahli (udržali medzi konštantný vzájomný uhol). Tak sme funkciu motora odvodili zo vzťahu (16) tak, že každý ďalší časový krok bude dodávať systému rovnako veľkú ale opačnú hodnotu aktuálneho momentu sily.

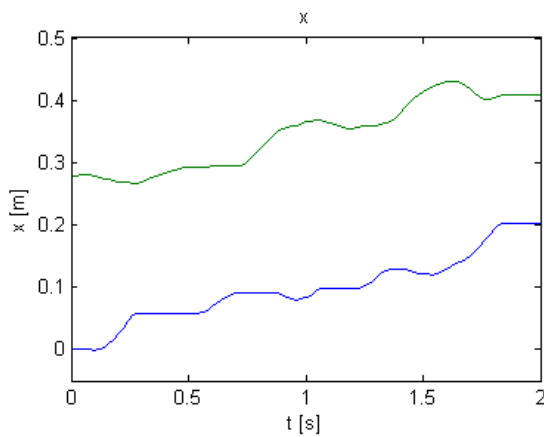
$$D_m(t + \Delta t) = - \frac{\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t)}{2} k_u + D_m(t) \quad (23)$$

Aby sa sústava začala aktívne pohybovať (kráčať) po podložke, sme hodnotu momentu \vec{D}_m v určitom okamihu, keď bolo jedno rameno na podložke a druhé vo vzduchu zvýšili, tak sa uhol medzi ramenami zväčšil na hodnotu $\Delta\varphi_>$ a potom ako dopadlo druhé rameno na zem sme hodnotu \vec{D}_m naopak znížili, aby sa ramená k sebe pritiahli na hodnotu $\Delta\varphi_<$. Keď prvé rameno dopadne na podložku, ramená opäť od seba rozťahneme - druhé rameno sa nadvihne a celý proces takto opakujeme s periódou T . Sústava bude potom pohybovať priemernou rýchlosťou:

$$v = 2l \frac{\sin \frac{\Delta\varphi_>}{2} - \sin \frac{\Delta\varphi_<}{2}}{T} \quad (24)$$

Pri dopade ramena na podložku sme narazili na problém. Totiž po dopade sa celé rameno odrazilo naspäť smerom hore, medzi podložkou a ramenom nevznikalo žiadne trenie a tým pádom sa obe ramená roztiahli, a tak nebolo ďalej možné regulovať systém motorom. Problém sme vyriešili tak, že sme zaviedli tlmiacu zložku $-y\dot{k}_t$ (k_t - koeficient tlmenia) do vzťahu (15)

$$m\ddot{y} = R - mg + F_{k,y} - k_t\dot{y} \quad (25)$$



Obr. 4 Súradnice x spodných bodov ramien

Na Obr. 4. je znázornený priebeh chôdze. Chôdzu za pomoci motora sme sa snažili dosiahnuť viacerými experimentmi. Najprv sme sa ju snažili regulovať tak, že motor začal pracovať v istých vopred určených časových okamihoch. To sa ukázalo neefektívne. Bolo potrebné regulovať pohyb v závislosti od aktuálnych hodnôt stavových veličín. Odkúšali sme viacero možných podmienok, podľa ktorých by motor pracoval. Podarilo sa nám urobiť pár krokov, avšak po prejdení krátkej dráhy sa rebrík zastavil, nedokázal ďalej dvíhať ramená od zeme a pôsobenie momentov ďalej len symetricky otváralo a zatváralo uhol medzi ramenami, bez pohybu vpred.

3 Záver

Pri našej práci sme nadobudli nové poznatky o fyzikálnom opise mechanických modelov, otestovali sme rôzne metódy pre návrh systému s ODR, pozorovali sme, aké účinky budú mať zmeny niektorých parametrov v našom modeli. Vznikajúce poruchy sme potláčali rôznymi spôsobmi korekcie (optimalizáciou parametrov alebo doplnením ďalších, napríklad tlmiacich prvkov). Zistili sme, že pre lepšie ovládanie pohybu sústavy (chôdze) by bolo do systému vhodné

doplniť ďalšiu mechanickú časť, ktorá by pomáhala udržať systém stabilnejší, a tak by sa dal pohyb regulovať jednoduchšie. Jedno z možných riešení, nad ktorými sme uvažovali je pripojenie tretieho ramena na vrchol rebríka, ktoré bude pomáhať udržiavať rovnováhu celej sústavy pri chôdzi a aktívne meniť polohu ťažiska (pre potrebné rozkývavie rebríka).

4 Odkazy na literatúru

- [1] Srinivasan M. a Ruina A., Computer Optimization of a minimal biped model discovers walking and running, Nature Vol 439, 2006 <http://homes.cs.washington.edu/~todorov/courses/amath533/SrinivasanRuina.pdf>
- [2] D. Ilkovič, Fyzika I., 4. vydanie, 1968, Alfa, Bratislava