

Teoretická mechanika v robotike a kybernetike

Prednášky z Fyziky procesov

Peter Bokes, zima 2013.

Aktualizácia: 29. júna 2018

Zápočet: 2× test po max 10 bodov, domáce úlohy spolu 20b, projekt 10b.

Skúška: 50 bodov

Obsah

1	Matematický popis dynamického systému	4
1.1	Dynamický systém	4
1.2	Linearizácia a lineárne dynamické systémy	4
1.3	Numerické metódy riešenia dynamických systémov	6
2	Pohybové rovnice diskretných sústav I.	7
2.1	Ideálne tuhé teleso	7
2.2	Redukcia síl v i.t.t.	8
2.3	Úvodné myšlienky k pohybovým rovniciach i.t.t.	9
2.4	1. pohybová rovnica i.t.t. - o pohybe ťažiska	9
2.5	2. pohybová rovnica i.t.t. - o otáčaní i.t.t.	10
2.6	Tenzor zotrvačnosti	11
2.7	Prechod medzi súradnicovými sústavami	13
2.8	Eulerove pohybové rovnice gyroskopu: otáčanie okolo pevného bodu	17
2.9	Energia a práca v dynamike systému i.t.t	19
3	Lagrangeove pohybové rovnice	22
3.1	Geometrické väzby, virtuálne posunutie a D'Alembertov princíp	22
3.2	Lagrangeove pohybové rovnice, Lagrangeova funkcia	23
3.3	Lagrangeove rovnice pre sústavy i.t.t.	27
3.4	Lagrangeova funkcia dvoj-ramenného manipulátora s rovnobežnými osami otáčania	28
3.5	Dvoj-ramenný manipulátor s plecom	30
3.6	Lagrangeova funkcia pre gyroskop (zotrvačník)	32
3.7	Nepotenciálové sily na pravých stranách LPR.	33
3.7.1	Zovšeobecnená nepotenciálová sila pre systém itt	33
3.7.2	Moment sily od motora.	33
3.7.3	Silové pôsobenie piestov.	33
3.7.4	Trecie sily	35
3.7.5	Moment sily od jednosmerného elektromotora	36
3.8	Energetická bilancia v formalizme Lagrangeových rovníc	40
3.9	Inverzné použitie Lagrangeových rovníc	41
3.10	Variačný princíp a Lagrangeove rovnice	42
3.10.1	Matematické minimum z funkcionálnej analýzy	42
3.10.2	Matematická forma variačného princípu pre Lagrangeove pohybové rovnice	43
3.10.3	Klasické variačné problémy	44
3.10.4	Lagrangeova funkcia pre mechatronické systémy	46

4	Dynamika kontinua	47
4.1	Vedenia tepla	47
4.1.1	Rovnica vedenia tepla	47
4.1.2	Okrajové podmienky	50
4.1.3	Stacionárne vedenie tepla	51
4.1.4	Nestacionárne vedenie tepla	53
4.1.5	Numerického riešenie časovo-závislých problémov vedenia tepla	53
4.2	Úvod k pohybovým rovniciam kontinua	54
4.3	Pojmy a veličiny v dynamike kontinua v 3D	58
4.3.1	Klasifikácia kontinuí (Čomu sa rovná tenzor napätia a kedy platí Bernoulliho rovnica?)	64
4.3.2	Stacionárne prúdenie	66
4.4	Prúdenie viskózne kvapaliny	67
4.5	Teória podobnosti a turbulencia	67

Úvod

Obsahom prednášok Fyziky dynamických procesov je výklad fyzikálnych princípov a matematických postupov popisu mechanických sústav používaných v automatizácii a robotike. Prototypom takejto sústavy je dvojramenný manipulátor ktorého analýze sa budeme detailne venovať ale aj úlohy pohybu a stability mechanických sústav, ktoré si preberieme na príkladoch Každú takúto diskretnú mechanickú sústavu môžeme popísať ako systém niekoľkých tuhých telies. Systematický prístup ku konštrukcii diferenciálnych rovníc popisujúcich ich dynamiku je založený na tzv. Lagrangeovej formulácii mechaniky[2, 6, 7, 8, 9, 10, 11].

Často je dôležitou súčasťou popisu diskretných mechanických sústav aj jej prostredie, napr. pohyb vo vode alebo vzduchu. Cieľom prednášok bude uviesť základné princípy formulácie dynamiky prostredia - kontinua - vo forme parciálnych diferenciálnych rovníc. Výsledný formalizmus je užitočný nie len pre štúdium prostredia diskretných mechanických sústav (napr. plávania telesa v kvapaline), ale aj úloh transportu kvapalín, plynov či tepla[2, 3].

1 Matematický popis dynamického systému

1.1 Dynamický systém

Pod **systémom** budeme rozumieť reálny fyzikálny objekt, ktorého všetky zmeny a pôsobenia na okolie môžeme jednoznačne charakterizovať zadaním istého počtu čísel. Tieto čísla nazývame **stupne voľnosti**. Napríklad pre hmotný bod sú jeho stupňami voľnosti jeho poloha, daná 3 súradnicami alebo polohovým vektorom a jeho rýchlosť, daná vektorom rýchlosti (3 zložky). Hmotný bod má teda dokopy 6 stupňov voľnosti. Pre všeobecnú diskusiu budeme označovať stupne voľnosti ako q_i pričom $i = 1, \dots, N$ ich indexuje a N je ich celkový počet.

Pr.: Harmonický oscilátor má 2 stupne voľnosti: x a $v = \dot{x}$.

Veličiny, ktoré tiež numericky charakterizujú systém, ale v čase sa nemenia, nazývame “parametre dynamického systému”. Vo vyššie uvedenom príklade je parametrom jeho hmotnosť alebo tuhosť pružiny.

Pod **dynamikou systému** rozumieme proces v čase, keď sa jednotlivé stupne voľnosti menia. **Pohybové rovnice** predstavujú predpis pre výpočet hodnôt stupňov voľnosti v ľubovoľnom čase, ak si zvolíme ich hodnotu v nami zvolenom počiatočnom momente. Z hľadiska štúdia dynamiky systému si môžeme zvoliť počiatočné hodnoty stupňov voľnosti ľubovoľne (v rámci ich oboru definície) čo vysvetľuje ich samotný názov. Matematicky ich reprezentujeme ako diferenciálne rovnice 1. rádu

$$\frac{d}{dt}q_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_N; t), \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

kde $f_i(q_1, q_2, \dots, q_N; t)$ je N reálnych funkcií s $N + 1$ reálnymi premennými. Jednoznačnosť časového vývoja stupňov voľnosti dynamického systému popísaného takýmito diferenciálnymi rovnicami nám zaručuje veta o existencii a jednoznačnosti riešenia:

Ak funkcie $f_i(q_i; t)$ sú spojité a ohraničené a spĺňajú Lipschitzovu podmienku vzhľadom na q_i^1 na oblasti $(t_0 - T, t_0 + T) \times (q_1^0 - \delta_i, q_1^0 + \delta_i) \times \dots$ potom existuje práve jedno riešenie ktoré spĺňa podmienku $q_i(t_0) = q_i^0$ pre $i = 1, \dots, N$.

Poznámka: ak je diferenciálna rovnica 2. rádu, tak ju vieme previesť na 2 rovnice 1. rádu, t.j. rovnica 2. rádu popisuje 2 stupne voľnosti, a podobne pre n -tý rád. V mechanike často voláme stupňom voľnosti číslo $n/2$ nakoľko ku každej súradnici musíme vždy mať aj rýchlosť, t.j. n je vždy párne.

Pr.: Pohybová rovnica harmonického oscilátora: z $ma = F$ sme si ukázali že dostaneme pohybové rovnice pre jeho dva stupne voľnosti x a $v = \dot{x}$:

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}x \quad (2)$$

$$\dot{x} = v. \quad (3)$$

1.2 Linearizácia a lineárne dynamické systémy

Lineárne diferenciálne rovnice, pri ktorých sú $f_i(q_1, \dots, q_N; t)$ lineárnymi funkciami premenných q_1, \dots, q_N vieme riešiť Laplaceovou transformáciou. Tu vyžadovaná lineárnosť znamená vlastnosť

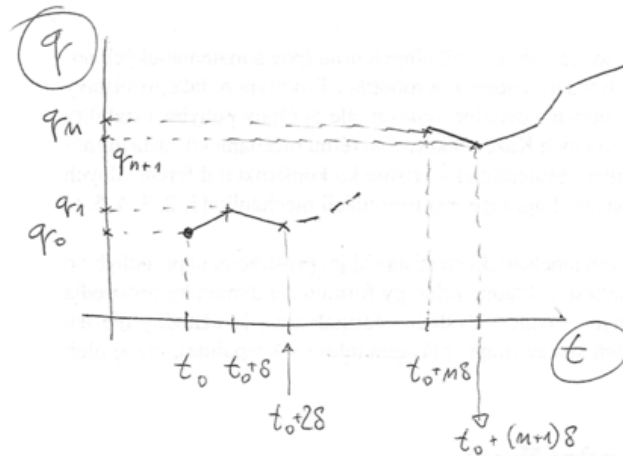
$$f_i(q_1, \dots, q_j + k, \dots, q_N) = f_i(q_1, \dots, q_j, \dots, q_N) + f_i(q_1, \dots, k, \dots, q_N) + g(t), \quad (4)$$

pre všetky i, j kde $g(t)$ je od q_1, \dots, q_N a k nezávislá funkcia. Laplaceova transformácia je daná vzťahmi,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0-}^{\infty} dt f(t) e^{-st} \quad (5)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds F(s) e^{st} \quad (6)$$

¹ Lipschitzova podmienka znamená $|f(q'_i; t) - f(q_i; t)| \leq L \sum_i |q'_i - q_i|, L > 0$



Obr. 1: K diskretizácii času a numerickému riešeniu diferenciálnej rovnice.

Úspech Laplaceovej transformácii tkvie v transformovaní derivácií,

$$\dot{x} \rightarrow -x(0) + sX(s) \quad (7)$$

$$\ddot{x} \rightarrow -\dot{x}(0) - sx(0) + s^2X(s) \quad (8)$$

čiže lineárne diferenciálne rovnice prevádza na algebraické.

Pr.: Harmonický oscilátor

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}x \quad (9)$$

$$\dot{x} = v. \quad (10)$$

prejdú na rovnice

$$-v(0) + sV(s) = -\frac{k}{m}X(s) \quad (11)$$

$$-x(0) + sX(s) = V(s) \quad (12)$$

ktorých riešením pre $X(s)$ dostaneme

$$X(s) = \frac{x(0)s}{s^2 + k/m} + \frac{v(0)}{s^2 + k/m} \quad (13)$$

čo po spätnej transformácii dá

$$x(t) = x(0) \cos(\omega t) + (v(0)/\omega) \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{k/m} \quad (14)$$

Linearizácia dynamického systému pre určenie stability stacionárnych riešení. Nelineárne diferenciálne rovnice vieme analyzovať z hľadiska existencie stacionárnych riešení a správania sa riešení v okolí týchto stacionárnych riešení.

Pr.: Uvažujme nelineárny dynamický systém

$$m\ddot{x} = kx - \alpha x^3, \quad k, \alpha > 0. \quad (15)$$

Stacionárne riešenia nájdeme ľahko z podmienky $\ddot{x} = \dot{x} = 0$, z čoho dostaneme tri stacionárne riešenia,

$$x_0 = 0, \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{k/\alpha} \quad (16)$$

Pre určenie stability týchto riešení hľadáme linearizáciu pohybovej rovnice v okolí týchto stacionárnych riešení.

V okolí x_0 je linearizovaná rovnica pre výchylku $\delta x(t)$ daná pomocou substitúcie $x(t) = x_0 + \delta x(t)$, pričom na pravej strane pohybovej rovnice (15) zanedbáme členy druhého a vyššieho rádu v $\delta x(t)$,

$$k(x_0 + \delta x(t)) - \alpha(x_0 + \delta x(t))^3 = kx_0 + k\delta x(t) - \alpha x_0^3 - \alpha 3x_0^2 \delta x(t) - \alpha 3x_0 \delta x(t)^2 - \alpha \delta x(t)^3 \quad (17)$$

$$\approx k\delta x(t). \quad (18)$$

(posledné dva členy v (17) sú postupne druhého a tretieho rádu v $\delta x(t)$, pričom druhý rád vypadne aj preto, že $x_0 = 0$, no tretí rád priamo len preto, že ho voči prvému rádu zanedbávame. Ak by bolo napríklad $\delta\phi = 0,1$, potom $\delta\phi^3 = 10^{-3} \ll \delta\phi$. Zanedbanie jedného člena voči druhému predpokladá aj to, že koeficienty k a α sú podobnej veľkosti.) V poslednej úprave sme uvážili aj fakt, že $x_0 = 0$. Rovnica, linearizovaná v okolí rovnovážneho riešenia $x_0 = 0$ teda nadobúda tvar

$$m\ddot{\delta x}(t) = k\delta x(t) \quad (19)$$

Jej riešením, napr. pomocou Laplaceovej transformácie, nájdeme

$$\delta x(t) = \delta x(0)(\exp(\sqrt{k/mt}) + \exp(-\sqrt{k/mt}))/2,$$

t.j. riešenie bude nestabilné a jeho výchylka rastie exponenciálne v čase.

Podobne, v okolí x_1 získame linearizovanú rovnicu pre výchylku $\delta x(t)$ substitúciou $x(t) = \sqrt{k/\alpha} + \delta x(t)$, pričom na pravej strane pohybovej rovnice (15) zanedbáme členy druhého a vyššieho rádu v $\delta x(t)$,

$$k(x_1 + \delta x(t)) - \alpha(x_1 + \delta x(t))^3 = kx_1 + k\delta x(t) - \alpha x_1^3 - \alpha 3x_1^2 \delta x(t) - \alpha 3x_1 \delta x(t)^2 - \alpha \delta x(t)^3 \quad (20)$$

$$\approx -2k\delta x(t), \quad (21)$$

kde sme využili, že $kx_1 - \alpha x_1^3 = 0$ a $-\alpha 3x_1^2 = -3\alpha(\sqrt{k/\alpha})^2 = -3k$. Rovnica, linearizovaná v okolí rovnovážneho riešenia $x_1 = \sqrt{k/\alpha}$ teda nadobúda tvar

$$m\ddot{\delta x}(t) = -2k\delta x(t). \quad (22)$$

Riešime opäť Laplaceovou transformáciou a nájdeme, že v protiklade voči predchádzajúcemu prípadu, systém má stabilné oscilácie, a to s frekvenciou $\omega = \sqrt{2k/m}$.

1.3 Numerické metódy riešenia dynamických systémov

Predstava o numerickom riešení diferenciálnych rovníc: triviálna Eulerova metóda (Obrázok 1), jej zlepšenie predstavuje Runge-Kutta metóda. Ukázal som na príklade dynamického systému s 1. stupňom voľnosti:

$$\dot{q} = f(q, t) \quad (23)$$

Diskretizujeme čas: $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, t_2 = 2\Delta t, \dots, t_n = n\Delta t, \dots$

Postupnosť hodnôt ktoré nadobúda stupeň voľnosti: $q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1, \dots, q(t_n) = q_n, \dots$

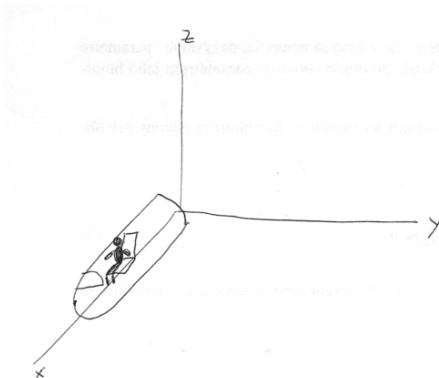
Približné vyčíslenie derivácie (v rámci Eulerovej metódy)

$$\dot{q} = \frac{q(t_n + \Delta t) - q(t_n)}{\Delta t} = \frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t}$$

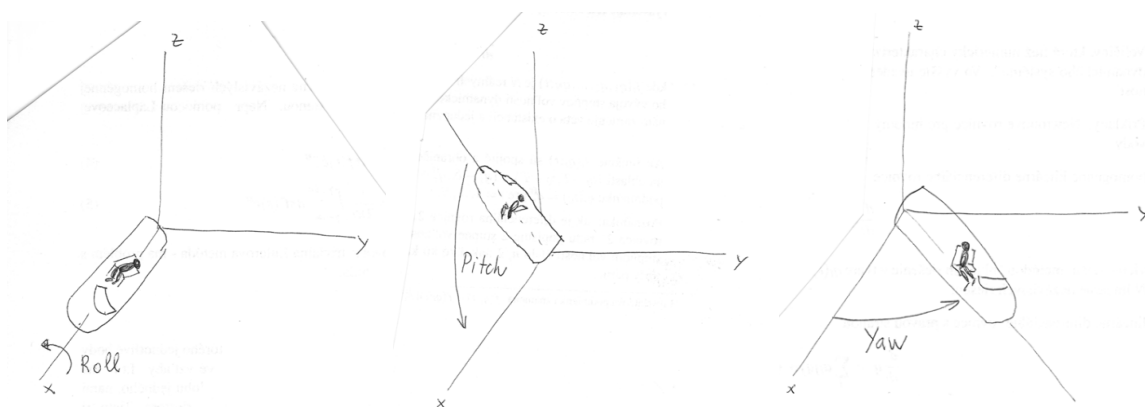
nám umožňuje prepísať diferenciálnu rovnicu na rekurentný vzťah

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t f(q_n, t_n). \quad (24)$$

Úplne analogicky možno získať maticový rekurentný predpis pre systém s N stupňov voľnosti.



Obr. 2: Zvolená orientácia sústavy pevne spojenej s lietadlom.



Obr. 3: Tri možné rotácie vzhľadom na sústavu pevne spojenú s lietadlom.

2 Pohybové rovnice diskretných sústav I.

2.1 Ideálne tuhé teleso

(i.t.t.) predstavuje hmotné teleso, rozložené v priestore, ktorého jednotlivé body a ich spájajúce úsečky nemôžu meniť svoje vzdialenosti ani vzájomné uhlové vzťahy. I.t.t. má **6 geometrických stupňov voľnosti** - tri súradnice vektora ukazujúceho na polohu jedného, nami vybraného bodu pevne fixovaného na telese a tri uhly natočenia tohto telesa v priestore. Ako vybraný bod si typicky volíme tri súradnice ťažiska i.t.t., $\vec{r}^* = x^*\vec{i} + y^*\vec{j} + z^*\vec{k}$ a predstavu o týchto pre rôzne telesá máme z predmetu Fyzika 1. Uhly natočenia sú niečo nové; ako príklad si zoberme kabínku letca v lietadle. Tri uhly tzv. 'roll', 'pitch' a 'yaw' sa často používajú v inžinierskych aplikáciách. Nech počiatočná orientácia je taká, že kabínka je vodorovne, svojou osou (špicom lietadla) orientovanou v smere osi x . Do všeobecnej orientácie v priestore je môžeme dostať nasledovnými tromi rotáciami realizovanými vždy vzhľadom na sústavu pevne fixovanú s lietadlom podľa Obrázku 2:

1. **Roll** - pootočenie okolo osi x tak, že pilot už nesedí vodorovne, ale je naklonený aj s celým lietadlom do strany, aj keď os lietadla je stále vo vodorovnej rovine (xy).
2. **Pitch** - pootočenie okolo osi y tak, že os lietadla mieri niekam do výšky, a teda už nie je vo vodorovnej rovine.
3. **Yaw** - pootočenie okolo osi z tak, že lietadlo už neleží v rovine xz .

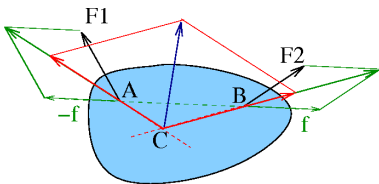
Problematike orientácie i.t.t. sa budeme neskôr veľa venovať.

Pri konštrukcii dynamických rovníc tuhého telesa pridáme na to, že okrem súradníc polohy zvoleného bodu telesa a uhlov jeho orientácie sú stupňami voľnosti aj ich prvé časové derivácie. Celkový počet stupňov voľnosti i.t.t. potom bude $2 \times 6 = 12$. Pre pohyb jedného i.t.t. potrebujeme teda skonštruovať 12 pohybových rovníc 1. rádu.

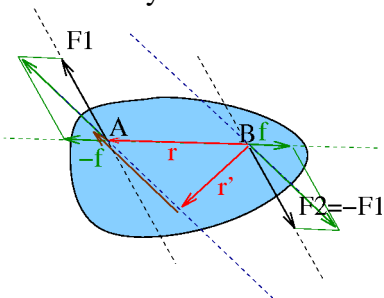
2.2 Redukcia síl v i.t.t.

Uvažujme i.t.t. na ktoré v rôznych bodoch pôsobia rôzne orientované sily. Pôsobí každá z nich na dynamiku telesa nezávislým spôsobom alebo ich možno redukovať na menší počet. Inými slovami, musíme pri rôznych počtoch síl a ich orientáciách riešiť nanovo diferenciálne pohybové rovnice, alebo existujú skupiny problémov ktoré predstavujú jednu a tú istú úlohu? Ukážeme si, že postupom nazývaným **redukcia síl** dokážeme, že jediné čo ovplyvňuje pohyb telesa je celkový vektorový súčet všetkých pôsobiacich síl nezávisle od bodu ich pôsobenia a jedna výsledná **dvojica síl**, vedúca na celkový moment všetkých síl.

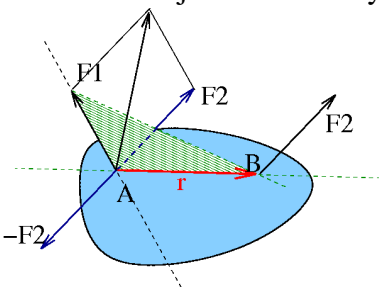
- Redukcia dvoch síl pôsobiacich v dvoch bodoch, A a B, ležiacich na priamke, v smere tejto priamky je najjednoduchšia. Keďže teleso je tuhé, môžeme každú silu presúvať v jej smere t.j. napr. silu z bodu A do bodu B.
- Redukcia 2 síl v rovine ale nie paralelných s opačnou orientáciou:



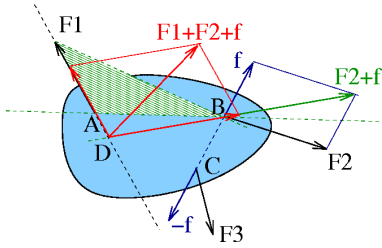
- Dve paralelné sily s opačnou orientáciou a rovnakou veľkosťou redukovať na jednu silu v jednom bode nemôžeme, preto zavádzame pojem dvojice síl. Táto je jednoznačne charakterizovaná momentom sily $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$.



- Redukcia dvojice mimobežných síl na výslednú silu v jednom bode a jednu dvojicu síl:



- Redukcia ľub. 3 síl v 3 bodoch na 2 sily v dvoch bodoch



Uvedomme si, že poloha bodu C na obrázku sa procesom redukcie nezmenila. Ak na začiatku redukcie síl si tento bod môžeme ľubovoľne zvoliť (aj ak v ňom sila nepôsobí - je to vlastne nulová sila) a typicky by sme si tento bod zvolili v ťažisku.

- Indukciou, N síl pôsobiacich v N bodoch vieme predchádzajúcou metódou zredukovať na $N - 1$ síl v $N - 1$ bodoch tak, že z N vyberieme ľubovoľné 3.

Pomocou týchto konštrukcií je vyššie uvedené tvrdenie o redukcii síl ‘dokázané’.

2.3 Úvodné myšlienky k pohybovým rovniciam i.t.t.

Základný pohybový zákon (v rámci nerelativistickej a nekvantovomechanického popisu) je Newtonov pohybový zákon pre hmotný bod:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{F}. \quad (25)$$

I.t.t. nie je hmotný bod a preto rozložíme i.t.t. na infinitezimálne časti s hmotnosťami m_i a polohovými vektormi \vec{r}_i ; akcia-reakcia medzi nepohybujúcimi sa časťami \vec{F}_{ij} (“krátko-dosahové sily”) a externé sily \vec{F}_i (napr. gravitačná); tým získame N pohybových rovníc pre každý jeden hmotný element:

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ji}, \quad i = 1, \dots, N \quad (26)$$

V skutočnosti ale potrebujeme len 12 rovníc pre všetky stupne voľnosti i.t.t.

2.4 1. pohybová rovnica i.t.t. - o pohybe ťažiska

Spočítame všetky rovnice v (26), výsledok je

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{R}^* = \vec{F} \quad (27)$$

$$(28)$$

kde sme zaviedli výslednicu všetkých vonkajších síl,

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (29)$$

a ťažisko i.t.t.:

$$\vec{R}^* = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (30)$$

Príklady polohy ťažísk, integrálny vzorec, výpočet kombinovaním dvoch telies pre ktoré poznáme polohu ťažiska.

2.5 2. pohybová rovnica i.t.t. - o otáčaní i.t.t.

Odvođenje, s výsledkom:

$$\frac{d}{dt} (\vec{R}^* \times M\dot{\vec{R}}^*) + \frac{d}{dt} (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) = \vec{D} \quad (31)$$

Komentár:

- Výsledný moment sily je definovaný **vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu**, t.j.

$$\vec{D} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (32)$$

pričom zahŕňa externé sily pôsobiace v miestach daných polohovými vektormi \vec{r}_i ; typicky toto predstavuje sumu relatívne malého konečného počtu členov (uchytená pružina, silové pôsobenie kontaktnej sily v mieste dotyku, etc.)

- Moment gravitačných síl sa dá napísať ako

$$\vec{D}_g = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \vec{R}^* \times m \vec{g}, \quad (33)$$

kde sme použili definíciu ťažiska. Rovnica 33 hovorí že moment gravitačných síl počítame akoby celá tiaž pôsobila v ťažisku i.t.t.

- Úprava člena na ľavej strane vedúceho k tenzoru zotrvačnosti:

$$\begin{aligned} \vec{I} \cdot \vec{\omega} &= \sum_i \vec{a}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{a}_i) \\ &= \sum_i m_i (\vec{\omega} (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i) - \vec{a}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{a}_i)) \\ &= \sum_i m_i ((\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i) \vec{1} - \vec{a}_i \vec{a}_i) \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

kde sme zaviedli **jednotkový tenzor**

$$\vec{1} = \vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k}, \quad (34)$$

s vlastnosťou $\vec{1} \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega}$. a **tenzor momentu zotrvačnosti i.t.t.**

$$\vec{I} = \sum_i m_i ((\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i) \vec{1} - \vec{a}_i \vec{a}_i). \quad (35)$$

- Člen $\frac{d}{dt} (\vec{R}^* \times M\dot{\vec{R}}^*)$ sa dá upraviť

$$\frac{d}{dt} (\vec{R}^* \times M\dot{\vec{R}}^*) = \dot{\vec{R}}^* \times M\dot{\vec{R}}^* + \vec{R}^* \times \ddot{\vec{R}}^*$$

Prvý je nula lebo je to vektorový súčin paralelných vektorov a druhý dá moment celkovej sily vzhľadom na ťažisko: ten sa odpočíta od celkového momentu \vec{D} na pravej strane,

$$\frac{d}{dt} (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}^*) \times \vec{F}_i \quad (36)$$

t.j. okrem tvaru (31) môžeme druhú pohybovú rovnicu i.t.t. zapísať aj v tvare

$$\frac{d}{dt} (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) = \vec{D}^*, \quad (37)$$

kde \vec{D}^* je výsledný moment síl počítaný **vzhľadom na ťažisko**.

2.6 Tenzor zotrvačnosti

Pripomienka výpočtu polohového vektora ťažiska (vzhľadom na vybranú inerciálnu sústavu pri zadanej polohe a orientácii teles). Definícia je

$$\vec{r}^* = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (38)$$

čo vlastne predstavuje tri rovnice pre každú súradnicu zvlášť, napr. pre x -ovú súradnicu

$$x^* = \frac{\sum_i m_i \vec{x}_i}{M}. \quad (39)$$

čo môžeme počítať ako

1. Numericky ako sumu pre dostatočne rozdrobené teleso,
2. Integrálom pre symetrické telesá

$$x^* = \frac{1}{M} \int dx dy dz \rho x, \quad (40)$$

kde ρ je hustota telesa,

3. Skladaním telies pre ktoré polohu ťažiska poznáme,

$$x^* = \frac{m_1 x_1^* + m_2 x_2^*}{m_1 + m_2}, \quad (41)$$

kde x_1^* a m_1 sú x -sová súradnica 1. telesa a jeho hmotnosť, a podobne pre druhé teleso.

Podobné možnosti máme aj pre výpočet tenzora zotrvačnosti. V rámci odvádzania 2. pohybovej rovnice sme si zaviedli **tenzor zotrvačnosti**

$$\vec{I} = \sum_i m_i ((\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i) \vec{I} - \vec{a}_i \vec{a}_i). \quad (42)$$

\vec{I} môžeme reprezentovať v tvare matice ak vyjadríme polohové vektory všetkých hmotných elementov pomocou ich zložiek, $\vec{a}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$:

$$I = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \quad (43)$$

Metódy výpočtu tenzora zotrvačnosti

1. Numericky, priamym implementovaním definície (43).
2. Pre symetrické a jednoduché telesá možno vypočítať integrovaním, napr. prvý element z (43) ako

$$I_{xx} = \int_V dx dy dz \rho (x, y, z) (y^2 + z^2), \quad (44)$$

kde $\rho(x, y, z)$ je hustota telesa v mieste $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, pričom integrujeme cez celý objem telesa.

Na prednáške sme spočítali tenzor zotrvačnosti kvádra.

3. Pre teleso pozostávajúce z niekoľkých jednoduchých symetrických telies získame tenzor súčtom tenzorov týchto telies ale vyjadrených vzhľadom na nové ťažisko celkového telesa

$$\vec{I} = \vec{I}^{(1)} + \vec{I}^{(2)} \quad (45)$$

pričom

$$\vec{I}^{(1)} = \vec{I}^{(01)} + M_1 \left(\vec{r}_{01} \cdot \vec{r}_{01} \vec{1} - \vec{r}_{01} \vec{r}_{01} \right) \quad (46)$$

$$\vec{I}^{(2)} = \vec{I}^{(02)} + M_2 \left(\vec{r}_{02} \cdot \vec{r}_{02} \vec{1} - \vec{r}_{02} \vec{r}_{02} \right), \quad (47)$$

kde $\vec{I}^{(01)}$ je tenzor zotrvačnosti prvého telesa vzhľadom na jeho ťažisko, \vec{r}_{01} je vektor spájajúci ťažisko celého spojeného telesa a ťažisko prvého telesa a M_1 je hmotnosť prvého telesa; a analogicky pre druhé teleso s indexmi 2. Presun bodu vzhľadom na ktorý je tenzor zotrvačnosti definovaný, t.j. výraz (46) alebo (47), nazývame Steinerova veta pre tenzor zotrvačnosti. Steinerova veta pre moment zotrvačnosti, známa zo základného kurzu fyziky zodpovedá vzťahu pre diagonálne elementy Steinerovej vete pre tenzory.

Dôkaz Steinerovej vety: Majte tenzor $\vec{I}^{(01)}$ definovaný vzhľadom na ťažisko tohto telesa, t.j.

$$\vec{I}^{(01)} = \sum_i m_i ((\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i) \vec{1} - \vec{a}_i \vec{a}_i), \quad (48)$$

kde \vec{a}_i sú polohové vektory hmotných elementov m_i vzhľadom na ťažisko tohto telesa.

Tenzor $\vec{I}^{(1)}$ nech je definovaný vzhľadom bod \vec{r}_1 , ktorého polohový vektor vzhľadom na ťažisko telesa nech je \vec{d} . Potom tento tenzor má tvar

$$\vec{I}^{(1)} = \sum_i m_i ((\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i) \vec{1} - \vec{b}_i \vec{b}_i), \quad (49)$$

kde \vec{b}_i sú polohové vektory hmotných elementov vzhľadom na bod \vec{r}_1 . Pre tieto prirodzene platí $\vec{b}_i = \vec{a}_i - \vec{d}$, čo dosadíme do 49, a nájdeme,

$$\vec{I}^{(1)} = \sum_i m_i ((\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i) \vec{1} - \vec{b}_i \vec{b}_i), \quad (50)$$

$$\sum_i m_i ((\vec{a}_i - \vec{d}) \cdot (\vec{a}_i - \vec{d}) \vec{1} - (\vec{a}_i - \vec{d})(\vec{a}_i - \vec{d})), \quad (51)$$

$$\sum_i m_i (\vec{d} \cdot \vec{d} \vec{1} - \vec{d} \vec{d}) + \sum_i m_i ((\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i) \vec{1} - \vec{a}_i \vec{a}_i), \quad (52)$$

$$M(\vec{d} \cdot \vec{d} \vec{1} - \vec{d} \vec{d}) + \vec{I}^{(01)}. \quad (53)$$

pričom ‘krížové členy’ sú nulové lebo obsahujú faktory typu $\sum_i m_i \vec{a}_i = 0$.

Na prednáške bolo naznačené skladanie tenzoru pre dva kvádre.

Matica tenzora zotrvačnosti závisí od voľby orientácie osí (ukázané na otáčaní tenkej tyčky) preto musíme maticu udávať vzhľadom na súradnicovú sústavu pevne spojenú s telesom, ktorú budeme označovať bázovými vektormi $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Táto sústava je ale **neinerčiálna** - v pohybových rovniciach musíme uvážiť že tieto bázové vektory sa otáčajú v čase. Matematike ktorá takéto otáčanie popíše sa budeme venovať v nasledujúcej časti.

2.7 Prechod medzi súradnicovými sústavami

Konvencie

Budeme používať značenia:

- rotácia okolo 3. bázového vektora (\vec{k}) o uhol ϕ bude

$$\mathcal{O}^{\phi,3} []$$

- Tri ortogonálne jednotkové vektory budú všeobecne $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ a špeciálne, v sústave natočenej spolu s študovaným tuhým telesom ako $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Aby sme nemuseli písať tri vektory, tak jednoducho budeme písať \vec{f}_i alebo \vec{e}_j a pod. Pripomeňme, že pre ortogonálne vektory platí

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}. \quad (54)$$

- Einsteinovo sumačné pravidlo: cez dva súčinitele majúce ten istý index sumujeme, t.j.

$$\sum_i a_i b_i \text{ budeme písať ako } a_i b_i$$

zložky vektora $c_i, i = 1, 2, 3$ ktoré vzniknú násobením matice

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

s zložkami iného vektora $a_i, i = 1, 2, 3$ budeme písať

$$c_i = M_{ij} a_j$$

kde vlastne máme 3 rovnice (pre $i = 1, 2, 3$) a cez j je myslené sumovanie.

Zavedenie rotácie a základné princípy

Geometricky, otočenie vektora \vec{p} predstavuje lineárne zobrazenie, v ktorom vektoru \vec{p} priradíme iný vektor \vec{q} pomocou predpisu

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p}' : \vec{p}' = \mathcal{O}[\vec{p}]. \quad (55)$$

pričom veľkosť vektora ostane nezmenená, $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$.

Rotácia je lineárna operácia, t.j.

$$\mathcal{O}[\vec{p} + \vec{q}] = \mathcal{O}[\vec{p}] + \mathcal{O}[\vec{q}] \quad (56)$$

Ak chceme nájsť zložky zrotovaného vektora v báze \vec{e}_i potom premietaním do týchto smerov máme

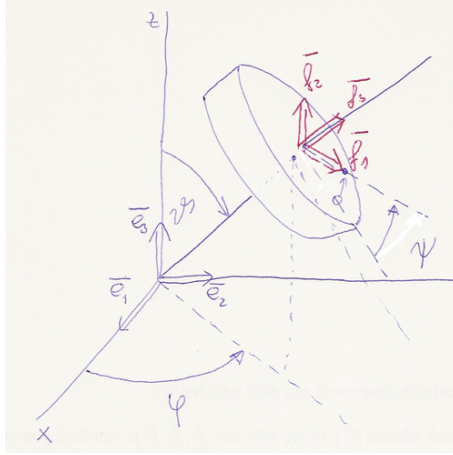
$$p'_i = \vec{p}' \cdot \vec{e}_i = \mathcal{O}[\sum_j p_j \vec{e}_j] \cdot \vec{e}_i = \sum_j p_j \mathcal{O}[\vec{e}_j] \cdot \vec{e}_i \quad (57)$$

Na cvičení sme ale našli maticu, ktorá transformuje súradnice rotovaného vektora, t.j.

$$p'_i = \sum_j R_{ij} p_j \quad (58)$$

t.j. vidíme že

$$R_{ij} = \mathcal{O}[\vec{e}_j] \cdot \vec{e}_i \quad (59)$$



Obr. 4: Gyroskop predstavuje zotrvačník s jedným pevným bodom. Uhly ϕ , θ , ψ sú tri Eulerove uhly typu zyz .

a pretože

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

platí tiež

$$\mathcal{O}[\vec{e}_j] = \sum_n \vec{e}_n R_{nj} = \vec{e}_n R_{nj}$$

(sumačná konvencia!!!), čo budeme veľmi veľa krát využívať!

Ak je rotácia otáčanie okolo \vec{e}_3 o uhol ϕ , t.j. $\mathcal{O}^{\phi,3}$ potom podľa cvičení

$$R_{ij} = R_{ij}^{\phi,3} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (60)$$

Orientácia uhla ϕ v smere osi \vec{e}_3 je dôležitá v súvislosti so znamienkami v rotačnej matici. Pre lepšie zapamätanie sa využíva pravidlo pravej ruky: ak palec pravej ruky má smer orientácie uhla (\vec{e}_3), potom prsty budú ukazovať v akom zmysle uhol ϕ narastá (do kladných hodnôt). Táto konvencia priamo súvisí aj s konvenciou pri vektorovom súčine prostredníctvom vzťahu pre obvodovú rýchlosť otáčajúceho sa bodu $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

V prípade otáčania okolo \vec{e}_1 alebo \vec{e}_2 budú prirodzene platiť podobné transformačné matice, len s permutovanými riadkami a stĺpcami:

$$R_{ij}^{\phi,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (61)$$

$$R_{ij}^{\phi,2} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (62)$$

Najčastejšie konvencie pre uhly natočenia

Nech sústava O' s bázou vektorov $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ je natočená pomocou sérií rotácií vzhľadom na nehybnú sústavu O s bázou $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Sústava O' môže byť natočená ľubovoľne. Jej orientácia bude jednoznačne daná 3 uhlami ϕ, θ, ψ , tzv. *Eulerovými*, ktoré nám povedia, akými rotáciami dokážeme zorientovať sústavu O do O' . Sú viaceré konvencie, začneme s zxz .

1. Rotácia okolo e_3 o uhol ϕ tak aby e_1 ležal v rovine f_1, f_2
2. Rotácia okolo nového e_1 o θ tak aby nový e_2 tiež ležal v rovine f_1, f_2 , alebo, čo je tomu ekvivalentné, aby e_3 bol paralelný s f_3 .
3. Rotácia okolo nového $e_3 = f_3$ o ψ tak aby $e_1 = f_1$ a $e_2 = f_2$.

Z tohto je asi zrejmé, aká konvencia je zyz. V technických aplikáciach (roboty, lietadlá, satelity) sa ešte zvykne používať aj konvencia "Roll-Pitch-Yaw" (xyz) ktorá predstavuje zorientovanie špicu pôvodne v smere x (Yaw) otočením okolo z , nastavením stúpania (Pitch) otočením okolo novej osi y a nakoniec po otočení okolo osi lietadla (roll) okolo novej osi x .

Vektor uhlovej rýchlosti pre gyroskop v sústave pevne spojenej s gyroskopom.

Celková uhlová rýchlosť otáčajúceho sa telesa pri zmene Eulerových uhlov zyz je daná súčtom troch vektorov uhlových rýchlostí patriacich k jednotlivým otáčaniam:

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\psi}}. \quad (63)$$

Každý z nich je zavedený v inak zrotovanej sústave;

$$\dot{\vec{\phi}} = \dot{\phi} \vec{e}_3, \quad (64)$$

$$\dot{\vec{\theta}} = \dot{\theta} \vec{e}'_2, \quad (65)$$

$$\dot{\vec{\psi}} = \dot{\psi} \vec{e}''_3. \quad (66)$$

Pre počítanie s vektorom uhlovej rýchlosti v 2. pohybovej rovnici si ich musíme všetky vyjadriť v sústave pevne spojenej s gyroskopom.

Všeobecne, i -ty básový vektor \vec{f}_i vznikne rotáciami básového vektora \vec{e}_i ;

$$\vec{f}_i = \mathcal{O}^{\phi, \theta, \psi}[\vec{e}_i]. \quad (67)$$

Po častiach:

$$\vec{e}'_i = \mathcal{O}^{\phi, 3}[\vec{e}_i] = \sum_j R_{ji}^{\phi, 3} \vec{e}_j = R_{ji}^{\phi, 3} \vec{e}_j \quad (68)$$

$$\vec{e}''_i = \mathcal{O}^{\theta, 2}[\vec{e}'_i] = \dots \quad (69)$$

$$\vec{f}_i = \mathcal{O}^{\psi, 3}[\vec{e}''_i] \quad (70)$$

Je dôležité si uvedomiť že v rôznych riadkoch ide o rotácie okolo rôznych osí "3" a "3". Analogicky máme aj inverzné vzťahy:

$$\vec{e}_i = \mathcal{O}^{-\phi, 3}[\vec{e}'_i] \quad (71)$$

$$\vec{e}'_i = \mathcal{O}^{-\theta, 2}[\vec{e}''_i] \quad (72)$$

$$\vec{e}''_i = \mathcal{O}^{-\psi, 3}[\vec{f}_i] \quad (73)$$

Ukážeme si prechod pre smer \vec{e}_3 vystupujúci vo vektore $\dot{\vec{\phi}}$, čo je aj najzdĺhavejší výpočet,

$$\vec{e}_3 = \vec{e}'_3 = \mathcal{O}^{-\theta, 2}[\vec{e}''_3] = \sum_i \vec{e}''_i R_{i3}^{-\theta, 2} \quad (74)$$

$$= \sum_i \mathcal{O}^{-\psi, 3}[\vec{f}_i] R_{i3}^{-\theta, 2} = \sum_{i,j} \vec{f}_j R_{ji}^{-\psi, 3} R_{i3}^{-\theta, 2}. \quad (75)$$

Poslednú rovnicu s dvomi sumami vieme prepísať pomocou maticového násobenia,

$$\vec{e}_3 = [\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3] \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s\theta \\ 0 \\ c\theta \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\dot{\vec{\phi}} = -c\psi s\theta \dot{\phi} \vec{f}_1 + s\psi s\theta \dot{\phi} \vec{f}_2 + c\theta \dot{\phi} \vec{f}_3 \quad (77)$$

alebo pre vektor $\dot{\vec{\theta}} = \dot{\theta} \vec{e}'_2$

$$\vec{e}'_2 \cdot \vec{f}_j = \sum_l R_{jl}^{-\psi,3} R_{l2}^{-\theta,2} \quad (78)$$

$$\dot{\vec{\theta}} = s\psi \dot{\theta} \vec{f}_1 + c\psi \dot{\theta} \vec{f}_2. \quad (79)$$

Nakoniec napíšme vektor zodpovedajúci otáčaniu okolo uhla ψ čo je jednoducho

$$\dot{\vec{\psi}} = \dot{\psi} \vec{f}_3. \quad (80)$$

Celková uhlová rýchlosť otáčajúceho sa telesa pri zmene Eulerových uhlov bude potom (pomocou výsledkov 80,79,80)

$$\omega_1 = -c\psi s\theta \dot{\phi} + s\psi \dot{\theta} \quad (81)$$

$$\omega_2 = s\psi s\theta \dot{\phi} + c\psi \dot{\theta} \quad (82)$$

$$\omega_3 = c\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}. \quad (83)$$

2.8 Eulerove pohybové rovnice gyroskopu: otáčanie okolo pevného bodu

Uvažujme prípad otáčania telesa okolo jedného pevného bodu, rôzneho od ťažiska (aby gravitačné sily spôsobili nenulový moment síl). Potom inerciálny člen v 2. pohybovej rovnici i.t.t. (31) môžeme potom napísať v sústave pevne spojenej s i.t.t. a orientovanej tak, že tenzor zotrvačnosti je v nej diagonálny, v tvare

$$\frac{d}{dt}(\sum_i \vec{f}_i I_i \omega_i) = \sum_j D_j \vec{f}_j, \quad (84)$$

pričom tenzor zotrvačnosti v sústave pevne spojenej s gyroskopom je

$$\vec{I} = I(\vec{f}_1 \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \vec{f}_2) + J \vec{f}_3 \vec{f}_3, \quad (85)$$

t.j. v rovnici (84) je $I_1 = I, I_2 = I$ a $I_3 = J$. Pretože jednotkové vektory \vec{f}_i sa otáčajú, platí pre ne

$$\frac{d}{dt} \vec{f}_i = \vec{\omega} \times \vec{f}_i,$$

čo vedie na

$$\sum_i \left(\vec{f}_i I_i \dot{\omega}_i + \vec{\omega} \times \vec{f}_i I_i \omega_i \right) = \sum_j D_j \vec{f}_j \quad (86)$$

prenásobením postupne skalárne s $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ dostaneme 3 Eulerove pohybové rovnice otáčajúceho sa i.t.t.

$$I \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (J - I) = D_1 \quad (87)$$

$$I \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 (I - J) = D_2 \quad (88)$$

$$J \dot{\omega}_3 + \omega_2 \omega_1 (I - J) = D_3, \quad (89)$$

t.j. systém troch *nelineárnych* diferenciálnych rovníc ktoré musíme riešiť spolu s tromi *nelineárnymi* diferenciálnymi rovnicami pre Eulerove uhly popisujúce orientáciu i.t.t., (81), (82) a (83). Toto predstavuje druhý systém 6 nelineárnych diferenciálnych rovníc. Táto cesta je v jednoduchých prípadoch užitočná, ale vidíme že musíme najprv nájsť $\omega_i(t)$, t.j. spočítať funkcie, ktoré vlastne nepotrebujeme. Navyiac, čím z viacerých i.t.t. sa bude robot či manipulátor skladať, tým viac nepotrebných funkcií musíme spočítať. Tento problém obchádza prístup pomocou Lagrangeových rovníc ku ktorému sa čoskoro dostaneme a v rámci ktorého sformulujeme pohybové rovnice gyroskopu ešte raz.

Špeciálne prípady pohybu gyroskopu.

Pre moment sily v homogénnom gravitačnom poli nájdeme

$$\vec{D} = r^* \vec{f}_3 \times mg(-\vec{e}_3) = mgr^* \left(c\psi s\theta \vec{f}_2 + s\psi s\theta \vec{f}_1 \right), \quad (90)$$

kde $\vec{r}^* = r^* \vec{f}_3$ je polohový vektor ťažiska gyroskopu vzhľadom na pevný bod (kĺb) gyroskopu, takže pohybové rovnice pre gyroskop budú

$$I \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (J - I) = mgr^* s\psi s\theta \quad (91)$$

$$I \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 (I - J) = mgr^* c\psi s\theta \quad (92)$$

$$J \dot{\omega}_3 + \omega_2 \omega_1 (I - J) = 0 \quad (93)$$

$$\omega_1 = -c\psi s\theta \dot{\phi} + s\psi \dot{\theta} \quad (94)$$

$$\omega_2 = s\psi s\theta \dot{\phi} + c\psi \dot{\theta} \quad (95)$$

$$\omega_3 = c\theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \quad (96)$$

Tieto rovnice možno ľahko upraviť do tvaru pohybových rovníc, vhodného pre numerickú implementáciu,

$$I\dot{\omega}_1 = -\omega_2\omega_3(J-I) + mgr^*s\psi s\theta \quad (97)$$

$$I\dot{\omega}_2 = -\omega_3\omega_1(I-J) + mgr^*c\psi s\theta \quad (98)$$

$$J\dot{\omega}_3 = -\omega_2\omega_1(I-J) \quad (99)$$

$$\dot{\theta} = \omega_1s\psi + \omega_2c\psi \quad (100)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{s\theta}(\omega_2s\psi - \omega_1c\psi) \quad (101)$$

$$\dot{\psi} = \omega_3 - \frac{c\theta}{s\theta}(\omega_2s\psi - \omega_1c\psi) \quad (102)$$

Vidíme, že $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \phi, \theta, \psi$ sú riešeniami systému šiestich obyčajných diferenciálnych rovníc 1. rádu.

Dosadením sa dá presvedčiť, že tieto rovnice spĺňa riešenie

$$\phi = \Omega_\phi t, \quad \theta = \pi/2, \quad \psi = \Omega_\psi t, \quad (103)$$

kde

$$\Omega_\phi = \frac{mgr^*}{J\Omega_\psi}, \quad (104)$$

v priblížení $\Omega_\phi \ll \Omega_\psi$. Tento pohyb sa nazýva *precesia* gyroskopu.

Ak by sme vyšetřovali stabilitu v okolí riešenia (103),

$$\phi = \Omega_\phi t + \delta\phi(t), \quad \theta = \delta\theta(t), \quad \psi = \Omega_\psi t + \delta\psi(t), \quad (105)$$

našli by sme že výchylky $\delta\phi(t), \delta\theta(t)$ a $\delta\psi(t)$ oscilujú s frekvenciou

$$\Omega_\theta = \frac{J}{I}\Omega_\psi. \quad (106)$$

Tento pohyb sa nazýva *nutácia* gyroskopu.

Príklad Akú pravú stranu musíme pridať do pohybových rovníc gyroskopu ak sa tento nachádza na autíčku pohybujúcom sa so zrýchlením $\vec{a} = a\vec{e}_1$?

Moment sily z dôsledku zotrvačnej sily bude $\vec{D}_a = -\vec{r}^* \times m\vec{a}$. Tento potrebujeme vyjadriť v sústave pevne spojenej s gyroskopom, preto

$$\vec{D}_a = -mr^*\vec{f}_3 \times \vec{e}_1 \quad (107)$$

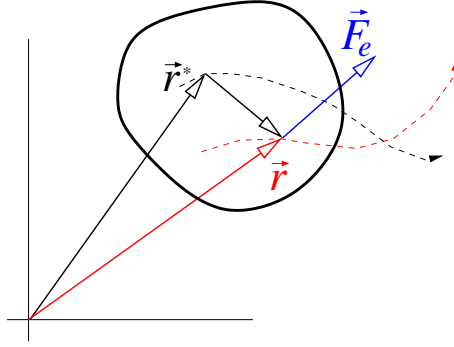
$$\vec{e}_1 = \mathcal{O}^{-\phi,3}(\vec{e}'_1) = \dots \quad (108)$$

$$= \sum_{kji} f_k R_{kj}^{-\psi,3} R_{ji}^{-\theta,2} R_{i,1}^{-\phi,3} = \dots \quad (109)$$

$$= \vec{f}_1(c\psi c\theta c\phi - s\psi s\phi) - \vec{f}_2(s\psi c\theta c\phi + c\psi s\phi) + \vec{f}_3 c\phi s\theta \quad (110)$$

a teda

$$\vec{D}_a = mr^* \left[\vec{f}_1(s\psi c\theta c\phi + c\psi s\phi) + \vec{f}_2(c\psi c\theta c\phi - s\psi s\phi) \right]. \quad (111)$$



Obr. 5: Pôsobenie 'externej' sily \vec{F}_e v mieste \vec{r} na itt môžeme nahradiť pôsobením sily \vec{F}_e v ťažisku \vec{r}^* a pôsobením momentu tejto sily vzhľadom na ťažisko $\vec{D}^* = (\vec{r} - \vec{r}^*) \times \vec{F}_e$.

2.9 Energia a práca v dynamike systému i.t.t

- Ak pôsobíme na teleso externou silou \vec{F}_e v bode telesa daným polohovým vektorom \vec{r} , potom práca ktorú vykonáme bude identická práci vykonanej pôsobením tejto sily v ťažisku a momentom sily $\vec{D}^* = (\vec{r} - \vec{r}^*) \times \vec{F}_e$ (Obr. 5). Toto je dôsledok redukcie síl. Prácu môžeme potom získať pomocou vzťahu

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}_e \cdot \left(\frac{d\vec{r}^*}{dt} + \frac{d(\vec{r} - \vec{r}^*)}{dt} \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}_e \cdot (\vec{v}^* + \boldsymbol{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}^*)) \quad (112)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\vec{F}_e \cdot \vec{v}^* + \vec{D}_e^* \cdot \vec{\omega} \right) \quad (113)$$

- Pôsobme silou \vec{F}_e a momentom síl \vec{D}_e na tuhé teleso, pohybové rovnice budú

$$M \frac{d}{dt} \vec{v}^* - \vec{F} = \vec{F}_e \quad (114)$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{I}^* \cdot \vec{\omega}) - \vec{D}^* = \vec{D}_e^*, \quad (115)$$

pričom \vec{D}^* a \vec{F} predstavujú iné sily ako tie, ktorými pôsobíme my, t.j. gravitačné, trecie....

Uvedomme si, že hviezdičkovanie momentu síl, t.j. \vec{D}^* , zodpovedá výpočtu výsledného momentu síl vzhľadom na ťažisko.

- Gravitačná, ale aj iné (elektrostatické, elastické sily a niekedy aj momenty síl) sú tzv. potenciálové, t.j. dajú sa zapísať v tvare

$$\vec{F}_{pot}(\vec{r}) = -\nabla_{\vec{r}} U(\vec{r}) \quad (116)$$

$$\vec{D}_{pot}(\phi) = -\vec{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} U'(\phi) \quad (117)$$

Príklad: gravitačná potenciálna energia $U_g(\vec{r}) = Mgz$, kde M je hmotnosť telesa, g veľkosť gravitačného zrýchlenia a z zvislá súradnica ťažiska telesa narastajúca v protismere pôsobenia gravitačnej sily, alebo elastická energia v natočenej pružine (ako v hodinkách) $U_p(\vec{\phi}) = \frac{1}{2}k\phi^2$ pre malé otočenia. Ak konáme prácu prenášaním i.t.t. proti takýmto silám, veľkosť tejto práce závisí len od rozdielu potenciálnej energie medzi koncovou a začiatočnou polohou.

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \nabla U(\vec{r}) = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$$

alebo

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \frac{\partial}{\partial \phi} U'(\phi) = U'(\phi_2) - U'(\phi_1)$$

pre nejakú vhodne zavedenú uhlovú premennú.

Prípomenka: smer gradientu dá smer najväčšieho nárastu potenciálnej energie, jeho veľkosť dá veľkosť tohto nárastu. Derivácia v smere jednotkového vektora \vec{n} je daná ako $\vec{n} \cdot \nabla U(\vec{r})$.

Všetky takéto potenciály potenciálové sily dajú spoločnú *potenciálnu energiu telesa*

$$U(\vec{r}, \phi) \quad (118)$$

prícom potom sila aj moment sily budú jednoducho

$$\vec{F}_{pot}(\vec{r}, \phi) = -\nabla_{\vec{r}} U(\vec{r}, \phi), \quad \vec{D}_{pot}(\vec{r}, \phi) = -\vec{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} U(\vec{r}, \phi) \quad (119)$$

Zavedením rozdelenia síl na potenciálové a nepotenciálové $\vec{F} = \vec{F}_{pot} + \vec{F}_n$, a podobne pre momenty, dostaneme pre celkovú prácu

$$W = [K + U]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_n \cdot d\vec{r}^* - \int_{t_1}^{t_2} \vec{D}_n^* \cdot d\vec{\omega} \quad (120)$$

kde $K + U$ je súčet *kinetickej a potenciálnej energie* i.t.t.

$$K + U = \frac{1}{2} M |\vec{v}^*|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I}^* \cdot \vec{\omega} + U(\vec{r}, \phi) \quad (121)$$

- Odvodenie vzťahu (113) s vyjadrením (121) Dosadíme vyjadrenia pre potenciálové sily a momenty do pohybových rovníc (114) a (115), a následným prenasobením prvej s $\vec{v}^*(t)$ a druhej s $\vec{\omega}(t)$ a preintegrovaním cez čas od $t = t_1$ po $t = t_2$ máme

$$\int dt \vec{v}^* \cdot m \frac{d}{dt} \vec{v}^* + \int d\vec{r}^* \cdot \nabla U - \int d\vec{r}^* \cdot \vec{F}_n = \int d\vec{r}^* \cdot \vec{F}_e \quad (122)$$

$$\int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^* \cdot \vec{v}^* \right) + [U(\vec{r})]_{\vec{r}^*(t_1)}^{\vec{r}^*(t_2)} - W_n^* = W^* \quad (123)$$

a podobne pre 2. pohybovú rovnicu,

$$\int dt \vec{\omega} \cdot \frac{d}{dt} \vec{I}^* \cdot \vec{\omega} + \int d\phi \frac{d}{d\phi} U(\phi) - \int dt \vec{\omega} \cdot \vec{D}_n = \int dt \vec{\omega} \cdot \vec{D}_e^* \quad (124)$$

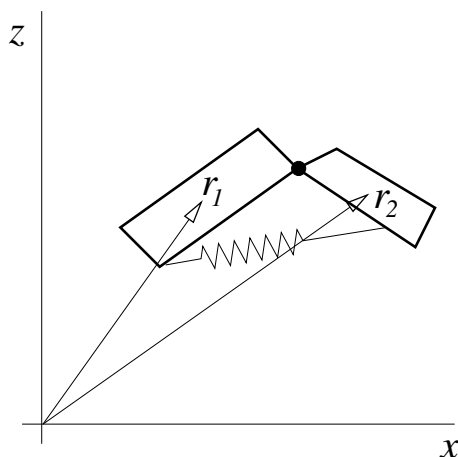
$$\int dt \sum_{ij} \omega_i(t) \frac{d}{dt} (I_{ij}^* \omega_j(t)) + [U(\phi)]_{\phi(t_1)}^{\phi(t_2)} - W_n^\phi = W^\phi \quad (125)$$

$$\int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \omega_i I_{ij}^* \omega_j \right) + [U(\phi)]_{\phi(t_1)}^{\phi(t_2)} - W_n^\phi = W^\phi \quad (126)$$

kde sme využili zápis vektora uhlovej rýchlosti a tenzora zotrvačnosti v súradnicovej sústave pevne spojenjej s telesom, v ktorej sú komponenty I_{ij} nezávislé od času.

Kombináciou oboch upravených rovníc nájdeme výsledný vzťah,

$$W = W^* + W^\phi = 120 \quad (127)$$



Obr. 6: Koncová konfigurácia dvoch telies spojených otočným kĺbom a harmonickou pružinou.

- Rozšírenie na N telies: zavedieme index $\alpha = 1, \dots, N$

$$W = \sum_{\alpha} [K_{\alpha} + U_{\alpha}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_n^{\alpha} \cdot d\vec{r}_{\alpha}^* - \int_{t_1}^{t_2} \vec{D}_n^{*,\alpha} \cdot \vec{\omega}_{\alpha} dt \quad (128)$$

kde celková mechanická (kinetická a potenciálna) energia

$$K + U = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} M_{\alpha} |\vec{v}_{\alpha}^*|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{\alpha} \cdot \vec{I}_{\alpha}^* \cdot \vec{\omega}_{\alpha} + U_{\alpha}(\vec{r}_{\alpha}, \phi_{\alpha}) \quad (129)$$

V prípade N telies je celková kinetická energia súčtom kinetických energií jednotlivých telies. To isté sa nedá povedať o potenciálnej energii, pretože tá pochádza často aj z vzájomného pôsobenia rôznych itt na seba, napríklad keď sú dve itt spojené harmonickou pružinou. Pri hľadani výrazu pre celkovú potenciálnu energiu výhodne využívame nezávislosť potenciálnej energie od dráhy, akou sa daný systém N telies do konfigurácie $\vec{r}_1^*, \dots, \vec{r}_N^*, \phi_1, \theta_1, \psi_1, \dots, \phi_N, \theta_N, \psi_N$ dostal.

Príklad Potenciálna energia dvoch telies na obrázku 6 vzhľadom na situáciu, keď obe telesá ležia vo výška $z_1^* = z_2^* = 0$ s uvoľnenou pružinou je

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \phi_1, \phi_2) = m_1 g z_1^* + m_2 g z_2^* + \frac{1}{2} k (\Delta l)^2, \quad (130)$$

kde k je tuhosť pružiny a Δl je jej predĺženie, ktoré je potrebné vyjadriť pomocou uhlov natočenia telies ϕ_1 a ϕ_2 . Evidentne, posledný člen nie je nejakým súčtom potenciálnych energií dvoch samostatných itt.

3 Lagrangeove pohybové rovnice

3.1 Geometrické väzby, virtuálne posunutie a D'Alembertov princíp

Uvažujme systém N hmotných bodov medzi ktorými musia byť splnené rôzne geometrické podmienky - väzby. Príklad geometrickej väzby môže byť požiadavka, že vzdialenosť medzi 1. a 2. hmotným bodom musí byť stále rovná l , t.j.

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} - l = 0. \quad (131)$$

Pri použití Newtonových rovníc pre popis pohybu týchto dvoch bodov musíme uvážiť sily reakcií pôsobiace na tieto dva body, ktoré zabezpečia, že táto geometrická podmienka bude v každom čase splnená. Použitie týchto síl reakcií možno obísť, ak namiesto kartézskych súradníc použijeme iné "zovšeobecnené" súradnice, ktoré majú splnenie geometrickej väzby v sebe priamo zabudované. V tomto prípade môžeme miesto dvoch kartézskych súradníc druhého body použiť uhol ϕ medzi spojnicou oboch bodov a osou x . Zadaním súradníc x_1, y_1, ϕ a použitím *parametra* l vieme jednoznačne nájsť súradnice oboch bodov vzťahmi

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} \quad (132)$$

$$\vec{r}_2 = (x_1 + l \cos(\phi)) \vec{i} + (y_1 + l \sin(\phi)) \vec{j}. \quad (133)$$

Pre dôležitú skupinu väzieb umožňuje Lagrangeov prístup k mechanike formulovať pohybové rovnice priamo v zovšeobecnených súradniciach a teda obchádza potrebu uvažovať niektoré reakčné sily.

Z hľadiska možnosti zavádzania zovšeobecnených súradníc delíme väzby na holonómne a neholonómne.

1. *Holonómne väzby* predstavujú podmienku na hodnoty ktoré môžu nadobúdať geometrické stupne voľnosti vo forme algebraickej rovnice

$$f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, i = 1, \dots, N_v.$$

Holonómne možno obísť zavedením *zovšeobecnených súradníc* $\{q_i\}_{i=1}^M$, $M = 3N - N_v$, Pôvodné a zovšeobecnené súradnice spolu súvisia transformáciou

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_M; t), \quad i = 1, \dots, N \quad (134)$$

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_M; t) \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_M; t), \quad i = 1, \dots, N \quad (135)$$

t.j. kým \vec{r}_i sú len funkciami q_i a času, \vec{v}_i sú funkciami q_i, \dot{q}_i a času.

2. *Neholonómne väzby* sú tie, ktoré nie sú holonómne. Dôležité príklady predstavujú väzby dané nerovnosťami $f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \geq 0, i = 1, \dots, N_v$ (napr. guľička na povrchu gule v homogénnom gravitačnom poli, pre ktorej ťažisko musí platiť $|\vec{r}^*| \geq r + R$ ak R je polomer guli tvoriacej povrch, nachádzajúcej sa v počiatku súradnicovej sústavy), alebo obsahujúce rýchlosti (napr. kotúľanie kola v 2D rovine, pričom vektor rýchlosti jeho ťažiska musí byť vždy kolmý na os kola). Také to väzby nemožno priamočiaro popisovať pomocou zovšeobecnených súradníc, a my sa im ďalej venovať nebudeme.

Uvažujme systém bodov zviazaných holonómnyimi väzbami, charakterizovaný polohovými vektormi $\{\vec{r}_i\}_{i=1}^N$ a vhodnými zovšeobecnenými súradnicami $\{q_i\}_{i=1}^M$, ktoré spolu súvisia vzťahmi (134). *Virtuálnym posunutím* nazývame malé ľubovoľné posunutie bodov $\delta \vec{r}_i$ také, že pritom geometrické obmedzenie

(holonómne väzby) na tieto posunutia sa berie fixované pre vybraný okamžik času t . Takáto zmena zodpovedá zmene zovšeobecnených súradníc δq_j

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (136)$$

Pomocou virtuálneho posunutia môžeme sformulovať *D'Alembertov princíp*: Práca vykonaná silami reakcií geometrických obmedzení pri virtuálnom posunutí je nulová. V podstate ide o triviálne tvrdenie, nakoľko sily reakcie sú vždy kolmé na posunutia, a teda práca $\delta W = \sum_i \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i$ je nevyhnutne nula v dôsledku skalárneho súčinu kolmých vektorov.

Nech sú pohybové rovnice pre spomínané body v tvare

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i = \vec{F}_i + \vec{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (137)$$

kde \vec{f}_i je súčet všetkých síl geometrických obmedzení (reakcie) pôsobiacich na i -ty bod a \vec{F}_i súčet všetkých ostatných síl (gravitačné, elektrické) pôsobiacich na tento bod. Potom z D'Alembertovho princípu máme

$$0 = \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \left(m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i \quad (138)$$

Ak by boli $\delta \vec{r}_i$ nezávislé zmeny polohových vektorov, potom rovnosť nule v poslednej rovnici pre ľubovoľnú malú zmenu polohových vektorov dosiahneme splnením rovnice

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i - \vec{F}_i = 0,$$

čo sú Newtonove rovnice *bez* síl reakcií. Dôvod prečo toto nie je pravda je, že virtuálne posunutia $\delta \vec{r}_i$ nie sú ľubovoľné, ale prostredníctvom transformačných rovníc (136) sú dané *ľubovoľnými* posunutiami zovšeobecnených súradníc.

3.2 Lagrangeove pohybové rovnice, Lagrangeova funkcia

Ak použijeme vyjadrenie pre virtuálne posunutie pomocou posunutia zovšeobecnených súradníc

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (139)$$

v rovnici (138), nájdeme

$$0 = \sum_{ij} \left(m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (140)$$

a keďže δq_j sú nezávislé a ľubovoľné, rovnosť nule posledného výrazu možno dosiahnuť len za podmienky že

$$0 = \sum_i \left(m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, M. \quad (141)$$

Toto predstavuje nie N , ale len M rovníc, čo naznačuje že pôjde o potrebný počet rovníc pre M geometrických stupňov voľnosti.

Nasledujúce odvodenie Lagrangeových rovníc predstavuje úpravu týchto rovníc do jednoduchšieho tvaru v ktorom vystupuje vyjadrenie pre kinetickú a potenciálnu energiu sústavy hmotných bodov pomocou zovšeobecnených súradníc.

Na začiatok si zavedieme pár označení:

- Zovšeobecnená sila

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (142)$$

- Sily pôsobiace na hmotné body rozdelíme na potenciálové a nepotenciálové. Zovšeobecnené potenciálové sily možno zapísať v tvare

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{pot} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i U \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (143)$$

- V prvom člene rovnice (141) dokážeme identifikovať kinetickú energia systému bodov,

$$\sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (144)$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (145)$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 \quad (146)$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K \quad (147)$$

kde sme využili identitu vyplývajúcu priamo z rovnice (135)

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (148)$$

a identifikovali kinetickú energiu systému bodov

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 \quad (149)$$

Uvážením týchto označení (a úprav) rovnica (141) nadobudne tvar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K = - \frac{\partial}{\partial q_j} U + Q_j^n, \quad j = 1, \dots, M \quad (150)$$

Lagrangeovu funkciu definujeme ako rozdiel celkovej kinetickej a potenciálnej energie,

$$L(q_i, \dot{q}_i) = K - U \quad (151)$$

vyjadrené ako funkcie zovšeobecných polôh a rýchlostí. Použitím tejto definície dostáva rovnica (150) tvar *Lagrange-Eulerových rovníc*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^n, \quad (152)$$

pričom sme uvažili, že potenciálna energia nezávisí od rýchlostí, t.j. $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$.

Príklad: Nájdite pohybové rovnice pre hmotný bod v gravitačnom poli viazaný na kružnicu pomocou Lagrangeových rovníc a pomocou Newtonovej pohybovej rovnice s uvážením väzby.

Lagrangeova metóda V rámci Lagrangeovej formulácie máme

$$K(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \quad (153)$$

$$U(\phi) = mgy = mgr \sin(\phi) \quad (154)$$

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - mgr \sin(\phi) \quad (155)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgr \cos(\phi) \quad (156)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \quad (157)$$

a teda Euler-Lagrangeové rovnica

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (158)$$

nadobudne tvar

$$mr^2\ddot{\phi} = mgr \cos(\phi) \quad (159)$$

Newtonova metóda Polárne súradnice v 2D:

$$x = r \cos(\phi), \quad y = r \sin(\phi) \quad (160)$$

Pohybové rovnice

$$m\ddot{x} = f \sin(\phi), \quad m\ddot{y} = -mg + f \cos(\phi) \quad (161)$$

kde $\vec{f} = f \cos(\phi)\vec{i} + f \sin(\phi)\vec{j}$ je sila reakcie od kružnice, vždy kolmá na kružnicu. Prepis do polárnych súradníc:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\phi) - r \sin(\phi)\dot{\phi} \quad (162)$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos(\phi) - 2\dot{r} \sin(\phi)\dot{\phi} - r \cos(\phi)\dot{\phi}^2 - r \sin(\phi)\ddot{\phi} \quad (163)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin(\phi) + r \cos(\phi)\dot{\phi} \quad (164)$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin(\phi) + 2\dot{r} \cos(\phi)\dot{\phi} - r \sin(\phi)\dot{\phi}^2 + r \cos(\phi)\ddot{\phi} \quad (165)$$

Dosadením posledných do (161) a násobením prvej s $\cos(\phi)$ a druhej s $\sin(\phi)$ a ich spočítaním dostaneme

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = -mg \sin(\phi) + f \quad (166)$$

Naopak, násobením prvej s $\sin(\phi)$ a druhej s $\cos(\phi)$ a ich odpočítaním máme

$$mr\ddot{\phi} + 2m\dot{r}\dot{\phi} = mg \cos(\phi) \quad (167)$$

Sila f je taká, aby sa r nemenilo s časom, t.j. garantujú $\dot{r} = 0$ čo z rovnice (166) dá

$$f = -mr\dot{\phi}^2 + mg \sin(\phi). \quad (168)$$

ak bude takáto sila reakcie, bude podľa (166) platiť $\dot{r} = 0$, t.j. $r(t) = a_1t + a_2$. Vhodné počiatkové podmienky budú $r(0) = r, \dot{r}(0) = 0$ čo dá $r = const$ a z rovnice (167) konečne aj rovnicu

$$mr\ddot{\phi} = mg \cos(\phi) \quad (169)$$

Posledná rovnica predstavuje pohybovú rovnicu bodu viazaného na kružnici a polomerom r , identickú s pohybovou rovnicou získanou Lagrangeovou metódou.

Príklad: Ukážte, že použitie Lagrangeových rovníc pre popis hmotného bodu v potenciálnom poli s potenciálnou energiou $U(\vec{r})$ vedie na zvyčajné Newtonove rovnice.

$$K = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} \quad (170)$$

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = K - U, \quad \nabla_{\vec{r}}L = -\nabla U = \vec{F}, \quad \nabla_{\vec{v}}L = m\vec{v} \quad (171)$$

$$(172)$$

a teda Lagrange-Eulerova rovnica

$$\frac{d}{dt}\nabla_{\vec{v}}L(\vec{r}, \vec{v}) - \nabla_{\vec{r}}L(\vec{r}, \vec{v}) = 0 \quad (173)$$

vedie k známej Newtonovej rovnici

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (174)$$

Zhrňme si teda postupnosť krokov, ktoré prevádzame pri používaní Lagrangeových rovníc:

1. identifikácia zovšeobecnených súradníc: uhly, vzdialenosti
2. vyjadrenie kinetickej (translačnej a rotačnej) energie každého dielu manipulátora pomocou zavedených zovšeobecnených súradníc.
3. prevedenie parciálnych derivácií Lagrangeovej funkcie a konštrukcia pohybovej rovnice pre každú zovšeobecnú súradnicu.
4. (A) (numerická) integrácia diferenciálnych rovníc pre q_i, \dot{q}_i pre danú počiatočnú podmienku.
5. (B) pre danú trajektóriu nájsť momenty síl a sily ktoré túto trajektóriu budú realizovať.

3.3 Lagrangeove rovnice pre sústavy i.t.t.

Odvodenie Lagrangeovho formalizmu pre popis N ideálne tuhých telies predstavuje podobné kroky ako v prípade pre systém N hmotných bodov. Namiesto virtuálnych posunutí polohových vektorov hmotných bodov budeme uvažovať virtuálne posunutia ťažísk jednotlivých itt, $\delta\vec{r}_i^*$, a virtuálne pootočená itt, $\delta\vec{\phi}_i = \vec{\omega}_i \delta t$. Pri virtuálnom pootočení treba zdôrazniť, že malý prírastok času δt nesúvisí s reálnym priebehom času, ide len o parametrizáciu virtuálneho pootočenia pomocou vhodného skalárneho parametra. Tento prírastok času musí byť pri otáčaní malý aj z toho dôvodu, že pojem pootočenia možno zaviesť ako vektor len ak je toto pootočenie malé, inak nastáva problém s nekomutatívnosťou poradia otáčania okolo rôznych smerov.

Pre takto zavedené virtuálne posunutia, rešpektujúce všetky holonómne väzby v systéme, platia podobné vzťahy ako v prípade hmotných bodov (136,??), t.j.

$$\delta\vec{r}_i^* = \sum_{j=1}^M \frac{\partial \vec{r}_i^*}{\partial q_j} \delta q_j \quad (175)$$

$$\delta\vec{v}_i^* = \sum_{j=1}^M \frac{\partial \vec{v}_i^*}{\partial q_j} \delta q_j \quad (176)$$

$$\delta\vec{\phi}_i = \sum_{j=1}^M \frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \quad (177)$$

Na každé itt pôsobia rôzne sily \vec{F}_i , sily reakcií \vec{f}_i , momenty síl \vec{D}_i a momenty síl reakcií \vec{d}_i . Pre každé itt vieme redukciou presunúť všetky pôsobiská síl do jeho ťažiska a prípadne dodať potrebné momenty síl, takže výsledne nám na každé teleso pôsobia sily, či už reakcií alebo ostatné, iba v ťažisku a momenty dvojíc síl, ktorých pohybový účinok spočítame (Kapitola 2.2).

D'Alembertov princíp (138) musí zahŕňať aj príspevok k práci od reakčných momentov, \vec{d} , ako aj síl reakcií pôsobiacich už len v ťažiskách,

$$\Delta W = \sum_{i=1}^N \left\{ \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i^* + \vec{d}_i \cdot \delta\vec{\phi}_i \right\} = 0 \quad (178)$$

V analógii z postupom pre N hmotných bodov vyjadríme reakčné sily a momenty z pohybových rovníc itt

$$\delta W = \sum_i \left(m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i^* - \vec{F}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i^* + \left(\frac{d}{dt} (\vec{I} \cdot \vec{\omega}_i) - \vec{D}_i \right) \cdot \delta\vec{\phi}_i = 0. \quad (179)$$

Vyjadrením virtuálnych posunutí a pootočení pomocou zmien v zobšeobecných súradniciach a následných úpravách úplne analogickým z postupu pri hmotných bodoch nakoniec nájdeme že je vhodné zaviesť Lagrangeovu funkciu ako rozdiel celkovej kinetickej energie sústavy itt. a celkovej potenciálnej energie 129

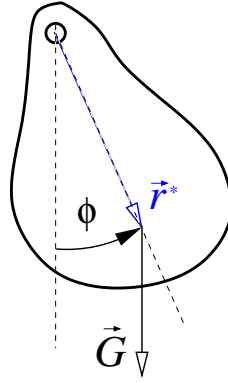
$$L(q_1, \dots, q_M, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_M) = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i^*|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_i \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}_i - U(q_1, \dots, q_M). \quad (180)$$

Samotné Lagrangeove rovnice sú už identické tým, ktoré sme si odvodili pre systém hmotných bodov.

Príklad: Nájdite pohybovú rovnicu fyzikálneho kyvadla (Obr. 7) Lagrangeovou metódou, ako súradnicu uvažujte uhol výchylky od rovnovážnej zvislej polohy.

Vyjadríme si kinetickú translačnú, kinetickú rotačnú a potenciálnu energiu fyzikálneho kyvadla pomocou $\phi, \dot{\phi}$ a parametrov,

$$E_{KT} = \frac{1}{2} m |\vec{v}^*|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (181)$$



Obr. 7: Fyzikálne kyvadlo predstavuje úlohu o otáčaní ľubovoľného itt v homogénnom gravitačnom poli okolo pevnej osi mimo ťažiska telesa.

$$\vec{v}^* = \frac{d}{dt}\vec{r}^* = \frac{d}{dt}r^*\vec{e}(t) = r^*\vec{\omega} \times \vec{e}(t) = r^*\dot{\phi}\vec{k} \quad (182)$$

$$|\vec{v}^*|^2 = (r^*\dot{\phi})^2 \quad (183)$$

$$E_{KR} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{I} \vec{\omega} = \frac{1}{2}I_{zz}^*\dot{\phi}^2 \quad (184)$$

$$U = mg(-r^*\cos(\phi)) \quad (185)$$

Výsledná Lagrangeova funkcia potom nadobudne tvar

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + mgr^*\cos(\phi), \quad (186)$$

kde sme zaviedli označenie $I = I_{zz}^* + m(r^*)^2$. Toto vlastne predstavuje Steinerovu vetu, keď sa na kombináciu otáčania okolo osi prechádzajúcej ťažiskom a translačného pohybu ťažiska pozeráme ako na otáčanie okolo pevnej osi fyzikálneho kyvadla.

Z Lagrangeovej funkcie štandardným spôsobom nájdeme Lagrangeovu pohybovú rovnicu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow I\ddot{\phi} = -mgr^*\sin(\phi) \quad (187)$$

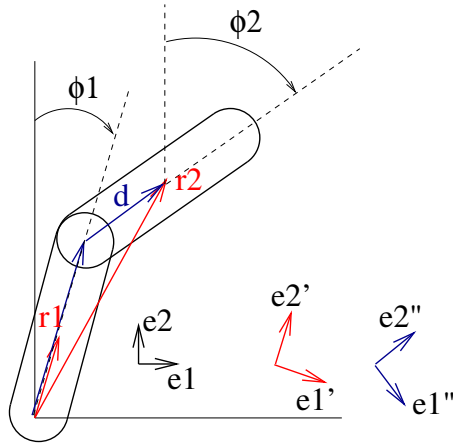
Táto rovnica má pre malé výchylky ($\sin(\phi) \approx \phi$) riešenie harmonické kmity,

$$\phi(t) = \phi_0 \cos(\Omega t + \alpha), \quad \Omega = \sqrt{\frac{mgr^*}{I}}, \quad (188)$$

a ϕ_0 je počiatočná výchylka a α jeho počiatočná fáza.

3.4 Lagrangeova funkcia dvoj-ramenného manipulátora s rovnobežnými osami otáčania

1. Manipulátor má dva geometrické stupne voľnosti: ϕ_1, ϕ_2 ako uhly osí ramien od vertikálneho smeru (Obrázok (8)).
2. Označíme polohy ťažísk \vec{r}_1 a \vec{r}_2 vzhľadom na *inerciálnu sústavu*, ktorej počiatok zvolíme v bode otáčania 1. ramena. Označíme polohu osi otáčania 2. telesa vektorom \vec{l} a polohu ťažiska 2. telesa vzhľadom na os otáčania 2. telesa vzhľadom na 1. teleso vektorom \vec{d} . Evidentne $\vec{r}_2 = \vec{l} + \vec{d}$.



Obr. 8: 2-ramenný manipulátor a v ňom použité označenia a orientácie sústav.

3. Translačná kinetická energia 1. telesa bude $\frac{1}{2}m_1|v_1|^2$ kde

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 = \dot{\phi}_1 \vec{e}'_3 \times \vec{e}'_1 r_1 = \dot{\phi}_1 r_1 \vec{e}'_2 \quad (189)$$

$$|\vec{v}_1|^2 = r_1^2 \dot{\phi}_1^2 \quad (190)$$

4. Rotačná kinetická energia 1. telesa $\frac{1}{2}\vec{\omega}_1 \cdot \vec{I}_1 \cdot \vec{\omega}_1$ kde skalárny súčin vyčíslime v sústave \vec{e}'_i nakoľko v tejto sú súradnice tenzora konštantné (\vec{e}'_i sú pevne spojené s 1. telesom a zorientované tak, že tento tenzor je v nich diagonálny.) Potom máme pre túto zložku energie

$$\frac{1}{2}I_1 \dot{\phi}_1^2 \quad (191)$$

kde $I_1 = \vec{e}'_3 \cdot \vec{I}_1 \cdot \vec{e}'_3$.

5. Translačná kinetická energia 2. telesa bude $\frac{1}{2}m_2|v_2|^2$ kde

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{l} + \vec{\omega}_2 \times \vec{d} \quad (192)$$

$$= \dot{\phi}_1 l \vec{e}'_2 \times \vec{e}'_3 + \dot{\phi}_2 d \vec{e}''_2 \times \vec{e}''_3 \quad (193)$$

$$|\vec{v}_2|^2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = l^2 \dot{\phi}_1^2 + d^2 \dot{\phi}_2^2 + 2dl \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \quad (194)$$

6. Rotačná kinetická energia 2. telesa bude podobne ako pri 1. telese jednoducho $\frac{1}{2}I_2 \dot{\phi}_2^2$.

7. Kinetická energia oboch i.t.t. prejde po úpravách do tvaru

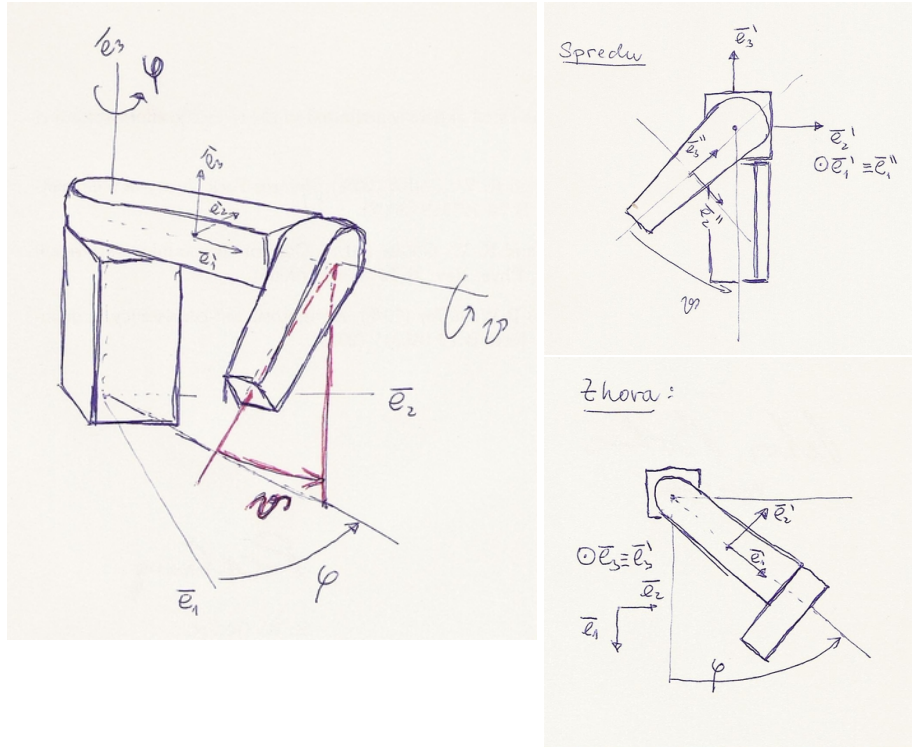
$$K = \frac{1}{2}\tilde{I}_1(\dot{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_2(\dot{\phi}_2)^2 + M \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2$$

kde $\tilde{I}_1 = I_1 + m_1 r_1^2 + m_2 l^2$, $\tilde{I}_2 = I_2 + m_2 d^2$ a $M = dl m_2$.

8. Potenciálna energia oboch i.t.t.

$$U = r_1^* m_1 g \cos(\phi_1) + (l \cos(\phi_1) + d_2 \cos(\phi_2)) m_2 g$$

9. Odvodiť obe Lagrangeove pohybové rovnice.



Obr. 9: Manipulátor s plecom.

3.5 Dvoj-ramenný manipulátor s plecom

(Je aj v skriptách ale iným postupom a s nie celkom korektným výsledkom)

Postup je analogický predchádzajúcemu a preto budeme dáme len jednotlivé vzt'ahy:

1. Dva geometrické stupne voľnosti - ϕ a θ .
2. Označenie polôh ťažiska a počiatkov súradnicových sústav pevne spojených s každým i.t.t., voľba ich orientácie.
3. Vyjadrenie vektorov vo vhodných súradnicových sústavách:

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\phi} \vec{e}'_3 = \dot{\phi} \mathcal{O}^{-\theta, 1} [\vec{e}''_3] = \dot{\phi} (\sin(\theta) \vec{e}''_2 + \cos(\theta) \vec{e}''_3), \quad (195)$$

$$\vec{\omega}_2 = \dot{\theta} \vec{e}'_1 = \dot{\theta} \vec{e}''_1, \quad (196)$$

$$\vec{l} = l \vec{e}'_1, \quad \vec{d} = -d \vec{e}''_3 = d (\sin(\theta) \vec{e}'_2 - \cos(\theta) \vec{e}'_3) \quad (197)$$

$$\vec{r}_1^* = r_1^* \vec{e}'_1, \quad \vec{r}_2^* = \vec{l} + \vec{d} \quad (198)$$

$$\vec{v}_1^* = \frac{d\vec{r}_1^*}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1^* = \dot{\phi} r_1^* \vec{e}'_2 \quad (199)$$

$$\vec{v}_2^* = \frac{d\vec{r}_2^*}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{l} + \vec{d}) = \vec{\omega}_1 \times \vec{l} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{d} \quad (200)$$

$$= -\dot{\phi} d \sin(\theta) \vec{e}'_1 + (\dot{\phi} l + \dot{\theta} d \cos(\theta)) \vec{e}'_2 + \dot{\theta} d \sin(\theta) \vec{e}'_3 \quad (201)$$

$$|\vec{v}_2^*|^2 = \dot{\phi}^2 (d^2 \sin^2(\theta) + l^2) + \dot{\theta}^2 d^2 + 2\dot{\phi} \dot{\theta} l d \cos(\theta) \quad (202)$$

4. Kinetická energia oboch i.t.t.

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 (r_1^*)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}^2, \quad I_1 = \vec{e}'_3 \cdot \vec{I}_1 \cdot \vec{e}'_3 \quad (203)$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2^*|^2 + \frac{1}{2}(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \cdot \vec{I}_2 \cdot (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \quad (204)$$

$$= \frac{1}{2}m_2(\dot{\phi}^2(d^2 \sin^2(\theta) + l^2) + \dot{\theta}^2 d^2 - 2\dot{\phi}\dot{\theta}ld \cos(\theta)) \quad (205)$$

$$+ \frac{1}{2}I''_{11}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I''_{22}\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I''_{33}\cos^2(\theta)\dot{\phi}^2, \quad I''_{ii} = \vec{e}'_i \cdot \vec{I}_2 \cdot \vec{e}'_i \quad (206)$$

za predpokladu že tenzor zotrvačnosti ramena je diagonálny (rozumný predpoklad). Celková kinetická energia má potom tvar

$$K = K_1 + K_2 \quad (207)$$

$$= \frac{1}{2}(\tilde{I}_1 + A \sin^2(\theta) + B \cos^2(\theta))\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_2\dot{\theta}^2 + M \cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} \quad (208)$$

$$\tilde{I}_1 = m_1(r_1^*)^2 + I_1 + m_2l^2 \quad (209)$$

$$A = m_2d^2 + I''_{22}, \quad B = I''_{33} \quad (210)$$

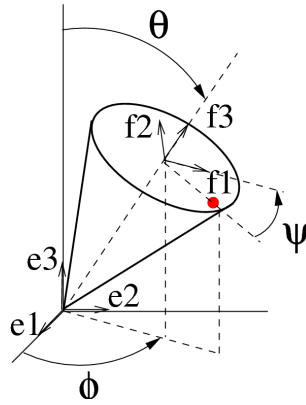
$$\tilde{I}_2 = m_2d^2 + I''_{11} \quad (211)$$

$$M = m_2ld \quad (212)$$

5. Potenciálna energia oboch i.t.t.

$$U = -dm_2g \cos(\theta)$$

6. Odvodiť Lagrangeove pohybové rovnice, t.j. parciálne derivácie...



Obr. 10: Zotrvačník a v ňom použité označenia a orientácie sústav.

3.6 Lagrangeova funkcia pre gyroskop (zotrvačník)

(Nie je v skriptách)

S gyroskopom sme sa stretli pri zavedení formalizmu rotácii a pri odvodení Eulerovej pohybovej rovnice z 2. Newtonovej pohybovej rovnice i.t.t. Tam sme si aj zaviedli Eulerove uhly ϕ, θ, ψ pre popis polohy gyroskopu. Teraz si skonštruujeme si Lagrangeovu funkciu $L(\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}) = E_K - U$ pomocou ktorej je odvodenie pohybových rovníc gyroskopu o niečo jednoduchšie. Kinetická energia je daná súčtom translačnej a rotačnej kinetickej energie. Rýchlosť ťažiska je

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 = r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2$$

Vektor uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$ má zložky (odvodili sme pri Eulerových rovniciach a zavedení rotácií a Eulerových uhloch na 3. prednáške.)

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega^i \vec{f}_i = (-c\psi s\theta \dot{\phi} + s\psi \dot{\theta}) \vec{f}_1 + (s\psi s\theta \dot{\phi} + c\psi \dot{\theta}) \vec{f}_2 + (c\theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) \vec{f}_3$$

kde \vec{f}_i sú jednotkové vektory v sústave pevne spojennej s zotrvačníkom. Pre kinetickú energiu nakoniec dostávame

$$E_K = \frac{1}{2} \sum I_{ij} \omega^i \omega^j + mr^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2)$$

kde tenzor zotrvačnosti vzhľadom na osi prechádzajúce ťažiskom a orientované pozdĺž $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ je

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

Potenciálna energia je jednoduchá,

$$U(\theta) = mgr^* \cos(\theta)$$

a nakoniec dostávame

$$L = \frac{1}{2} J (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta))^2 + \frac{1}{2} \tilde{I} (\dot{\theta}^2 + (\sin(\theta) \dot{\phi})^2) - mgr^* \cos(\theta)$$

kde $\tilde{I} = I + mr^2$.

3.7 Nepotenciálové sily na pravých stranách LPR.

3.7.1 Zovšeobecnená nepotenciálová sila pre systém itt

V odvodzovaní LPR pre N hmotných bodov sme zaviedli zovšeobecnené nepotenciálové sily

$$Q_i^n = \sum_j \vec{F}_j^n \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$$

Ich zovšeobecnenie na N itt, vzhľadom na diskusiu v časti (3.3) a s pomocou vyjadrenia pre prácu konanú na itt (rovnicu 113), je

$$Q_i^n = \sum_{j=1}^N \left\{ \vec{F}_j^n \cdot \frac{\partial \vec{r}_j^*}{\partial q_i} + \vec{D}_j^{*,n} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_i} \right\} \quad (213)$$

kde \vec{F}_j^n je súčet všetkých nepotenciálových síl pôsobiacich na j -te teleso, ktorej pôsobenie sa redukciami prenieslo do ťažiska tohto telesa \vec{r}_j^* a $\vec{D}_j^{*,n}$ je súčet všetkých momentov nepotenciálových síl pôsobiacich na j -te teleso vzhľadom na ťažisko tohto telesa.

V nasledujúcich častiach si priblížime niel'ko príkladov použitia všeobecného vzťahu (213).

3.7.2 Moment sily od motora.

Uvažujme dvojramenný manipulátor, pričom na osi otáčania spájajúcej 1. a 2. rameno nech je umiestnený motor. Jeho stator nech je na 1. ramene a rotor je pevne spojený s 2. ramenom. Nech na 1. rameno pôsobí motor momentom sily $\vec{D}_1(t) = D_M(t)\vec{k}$, potom z akcie reakcie vieme, že na 2. rameno pôsobí moment sily $\vec{D}_2(t) = -D_M(t)\vec{k}$. Tieto momenty predstavujú pôsobenie síl, ktorých súčet je nulový, a preto nie je dôležité, vzhľadom na aké miesto na danom itt sú vyčísľované.

Nájdeme nepotenciálové sily vstupujúce do Lagrangeovej rovnice pre ϕ_1 ,

$$Q_1 = \vec{D}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial \dot{\phi}_1} = \vec{D}_1 \cdot (-\vec{k}) = -D_M(t) \quad (214)$$

A následne aj pre ϕ_2 ,

$$Q_2 = \vec{D}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_2}{\partial \dot{\phi}_2} = \vec{D}_2 \cdot (-\vec{k}) = D_M(t). \quad (215)$$

Vidíme, že pôsobenie momentu sily motora má v týchto dvoch rovniciach opačné znamienko, čo priamo súvisí s zákonom akcie-reakcie.

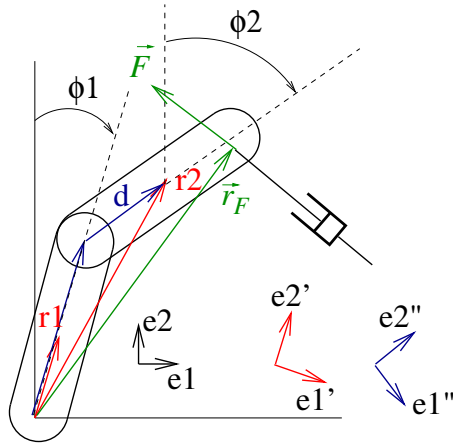
3.7.3 Silové pôsobenie piestov.

Predstavme si, že na 2. rameno dvojramenného manipulátora pôsobí nepotenciálová sila od piestu \vec{F} v mieste $\vec{r}_F = \vec{l} + \vec{d}_F$ (Obr. 11). Pôsobenie sily od piestu zredukujeme na silu

$$\vec{F}_2^n = \vec{F}, \quad (216)$$

pôsobiacu v ťažisku 2. telesa a jej moment sily pôsobiaci vzhľadom na ťažisko,

$$\vec{D}_2^{n,*} = (\vec{d}_F - \vec{d}) \times \vec{F}. \quad (217)$$



Obr. 11: 2-ramenný manipulátor na ktorý pôsobí v mieste \vec{r}_F nepotenciálová sila \vec{F} .

Na 2. itt teda pôsobí aj nepotenciálová sila aj nepotenciálový moment sily, na 1. teleso nepôsobia iné nepotenciálové sily. Pre použitie všeobecného vzťahu (213) budeme ďalej potrebovať nasledovné vzťahy,

$$\frac{\partial \vec{\omega}_2}{\partial \dot{\phi}_2} = -\vec{e}_3 \quad (218)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}_2}{\partial \dot{\phi}_1} = 0 \quad (219)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_2^*}{\partial \phi_2} = \frac{\partial}{\partial \phi_2} (\vec{l} + \vec{d}) = -\vec{e}_3 \times \vec{d} \quad (220)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_2^*}{\partial \phi_1} = \frac{\partial}{\partial \phi_1} (\vec{l} + \vec{d}) = -\vec{e}_3 \times \vec{l}, \quad (221)$$

kde sme využili vyjadrenie malej zmeny (diferenciálu) vektora s konštantnou dĺžkou (narp. \vec{n}) pomocou vektora malého pootočenia $\delta \vec{\phi} = \vec{e} \delta \phi$,

$$\delta \vec{n} = \delta \vec{\phi} \times \vec{n} = \vec{e} \times \vec{n} \delta \phi, \quad (222)$$

z čoho predelením veľkosťou pootočenia nájdeme

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial \phi} = \frac{\delta \vec{\phi}}{\delta \phi} \times \vec{n} = \vec{e} \times \vec{n}. \quad (223)$$

Dosadením rovníc (216,217,218,219, 220,221) do rovnice (213) nájdeme tvar zovšeobecnenej sily vystupujúcej v Lagrangeovej rovnice pre ϕ_1 ,

$$Q_1 = -\vec{k} \cdot (\vec{l} \times \vec{F}), \quad (224)$$

a tvar zovšeobecnenej sily vystupujúcej v Lagrangeovej rovnici pre ϕ_2 ,

$$Q_2 = -\vec{k} \cdot (\vec{d}_F \times \vec{F}). \quad (225)$$

Vidíme, že hoci samotná sila od piestu pôsobí len na druhé teleso, zovšeobecnená sila zodpovedajúca tejto sile vystupuje v LPR pre ϕ_2 ale aj v LPR pre ϕ_1 ! Tento na prvý pohľad prekvapivý výsledok možno pochopiť predstavou, ako by sila piestu pôsobila na pohyb v okamžiku, keď je $\vec{l} \parallel \vec{F}$ pri všeobecnej orientácii \vec{d}_F a v inom okamžiku, keď by bolo $\vec{d}_F \parallel \vec{F}$ pri všeobecnej (generickej) orientácii \vec{l} . V prvom prípade by sa evidentne otáčalo len teleso "2", t.j. ϕ_2 by sa menilo a v druhom prípade by sa točilo teleso "1", t.j. ϕ_1 by sa menilo. Nie je teda až také prekvapivé, že sila \vec{F} vedie na zovšeobecnené sily vystupujúce v oboch LPR.

3.7.4 Trecie sily

Celkom všeobecne, trecie sily pôsobia proti smeru pohybu.

Trecie sily úmerné rýchlosti V lineárnom priblížení (ak sú rýchlosti malé) sa najčastejšie používa model trenia úmerného rýchlosti,

1. Pri otáčaní okolo uhla ϕ : $\vec{D}^n = -k_1 \vec{\omega}$. Moment trecej sily pôsobí vzhľadom na os otáčania, napr. prostredníctvom ložísk a $\vec{\omega}$ je uhlová rýchlosť otáčania, ktoré táto sila tlmí. Pri osi spájajúcej dve pohybujúce sa časti musí pritom ísť o *relatívnu uhlovú rýchlosť* medzi týmito telesami.
2. Pri posuvnom pohybe v smere: $\vec{F}^n = -k_2 \vec{v}$. Tento model je chápaný tak, že sila pôsobí v ťažisku. Podobne ako v predchádzajúcom prípade, ak ide o treciu silu medzi pohybujúcimi sa časťami, musí byť táto závislá len na ich relatívnej rýchlosti.

Konštanty k_1 a k_2 sú fenomenologické konštanty závisiace od konkrétneho študovaného prípadu. Ich rádoový odhad môžeme získať z času, za ktorý sa daný pohyb utlmí; ak máme jeden stupeň voľnosti q , ktorý je tmený konštantou k , potom jeho pohybová rovnica (jeho hmotnosť bude m a zanedbáme akékoľvek iné sily) bude

$$\ddot{q} = -\frac{k}{m}\dot{q}$$

ktorá má riešenie

$$\dot{q}(t) = \dot{q}(0)e^{-t/\tau}, \tau = \frac{m}{k}$$

Rýchlosť klesne na $1/e = 0,36$ -násobok počiatočnej rýchlosti za čas $t = \tau$. Ak tento čas poznáme (odmeriame, odhadneme) potom $k = m/\tau$.

Niekedy môže byť zaujímavejšie brať pokles na iný zlomok počiatočnej rýchlosti, napr. na jednu desatinu počiatočnej rýchlosti klesne za čas $\tau_{1/10}$,

$$\frac{1}{10} = e^{-\tau_{1/10}/\tau} \Rightarrow \tau_{1/10} = \tau \ln(10) \approx 2,3\tau$$

a potom $k = m \ln(10)/\tau_{1/10}$.

Ako príklad vezmeme “typické” teleso s hmotnosťou $m = 100\text{kg}$, ktorého rýchlosť vplyvom trenia klesne na $1/10$ pôvodnej za $\tau_{1/10} \sim 1\text{min} \sim 60\text{s}$. Potom $k \sim 100 \cdot 2,3/60 \sim 4\text{N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$. Pri rýchlosti $v \sim 1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ bude teda táto trecia sila rádovo $F \sim 4\text{N}$.

Sila aerodynamického odporu Veľmi častou situáciou je, že odporová sila prúdenia vzduchu prerastie za lineárne priblížení. V tomto prípade tenzor napätia má člen závislý od druhej mocniny rýchlosti telesa vzhľadom na prostredie, čo vedie na celkovú odporovú silu prostredia silu v tvare

$$F = \frac{1}{2}c_d\rho v S |\vec{v}(\vec{r}^*)|^2 \quad (226)$$

kde c_d je koeficient aerodynamického odporu, ρ je hustota vzduchu, S je efektívna plocha telesa ktorú vidíme ak sa na teleso pozeráme v smere jeho rýchlosti a $\vec{v}(\vec{r}^*)$ rýchlosť telesa vzhľadom na prostredie.

Táto sila sa výrazne prejavuje až pri väčších rýchlostiach. Ak napríklad uvažujeme teleso s rozmermi $l \sim 1\text{m}$, potom $S \sim 1\text{m}^2$. Pre “kocku” bude $c_d \sim 1$ čo pre pohyb vo vzduchu $\rho_v = 1\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ dá silu

$$F \sim \frac{1}{2}v^2$$

A bude teda pri rýchlosti $v \sim 1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ bude táto sila približne $F \sim 0,5\text{N}$, čo je menšie ako trecia sila uvažovaná v predchádzajúcom prípade. S rastúcou rýchlosťou však jej význam narastá; sila aerodynamického

odporu bude v uvažovanom prípade porovnateľná so silou lineárneho trenia pri rýchlostiach daných rovnicou

$$\frac{1}{2}v_c^2 \approx 4v_c, \Rightarrow v_c \sim \sqrt{8m \cdot s^{-1}} \approx 2,8m \cdot s^{-1}$$

Porovnajme silu aerodynamického odporu s typickou tiažovou silou na takéto teleso (stále predpokladáme hmotnosť $m = 100\text{kg}$), $G = mg \sim 10^2\text{kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \sim 10^3\text{N}$. Aby G a F boli porovnateľné, musela by byť rýchlosť telesa

$$v \sim \sqrt{2mg} \sim 45\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 162\text{km/h}.$$

Kinetické trenie (kontaktné) Nakoniec, trecie sily v dôsledku kontaktu s podložkou, čo zahŕňa aj trecie sily v ložiskách, majú aj konštantný člen, ktorý nemožno zanedbať už v lineárnom priblížení, pričom veľkosť lokálne pôsobiacej trecej sily je priamoúmerný normálovej sile R ,

$$T = \mu R, \quad (227)$$

kde μ je kinetický koeficient trenia. Ich vyčíslenie teda potrebuje znalosť o silách reakcií, ktorým sme sa cielene Lagrangeovým formalizmom vyhli. Ich zarátanie je možné ak k Lagrangeovým rovniciach znovu pridáme potrebné 1. a 2. pohybové rovnice itt. Veľkosť sily kinetického trenia je daná prítláčnou silou a koeficientom trenia, ktorý nadobúda hodnoty od 0,01 (ocel-l'ad) po 0,5 (drevo-drevo) v bežných situáciách.

Pre náš "typický" prípad budeme uvažovať, že prítláčná sila je daná tiažou telesa, $R = mg$. Veľkosť kinetického trenia bude $T \sim 10 - 500\text{N}$ a teda pri rýchlostiach $v \sim 1\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ kinetické trenie bude dominantné.

Prirodzene, v iných situáciách môže dominovať iný z týchto troch spomenutých mechanizmov, pričom predstavu o ich veľkostiach si môžeme urobiť podobnými rádovými odhadmi, ako boli tu urobené pre zvolený "typický" prípad.

Všeobecná formulácia pre trecie sily Ani jeden z týchto modelov nie je vždy perfektný. Trecie sily závislé od rýchlosti majú pôvod v pôsobení prostredia na teleso, a teda pôsobia *lokálne* na všetkých miestach jeho povrchu a sú závislé od lokálnej rýchlosti telesa vzhľadom na prostredie (vzduch, kvapalina). Ak silové pôsobenie prostredia na teleso v mieste \vec{r} na jeho povrchu na plôške dS ,

$$d\vec{F} = \vec{\sigma}(\vec{r}) \cdot \vec{dS}, \quad (228)$$

kde $\vec{\sigma}$ je tenzor napätia charakterizujúci obtekajúce prostredie (a teda závisí od jej lokálnej rýchlosti, tlaku, etc.) a \vec{dS} je vektor plôšky orientovaný v smere vonkajšej normály povrchu telesa, potom celkový príspevok od takýchto síl na teleso musíme vyjadriť ako integrál

$$\vec{F}^n = \int d\vec{F} = \int \vec{\sigma} \cdot \vec{dS}. \quad (229)$$

Podobne nájdeme aj príspevok k momentu síl pôsobiacich na teleso od prostredia,

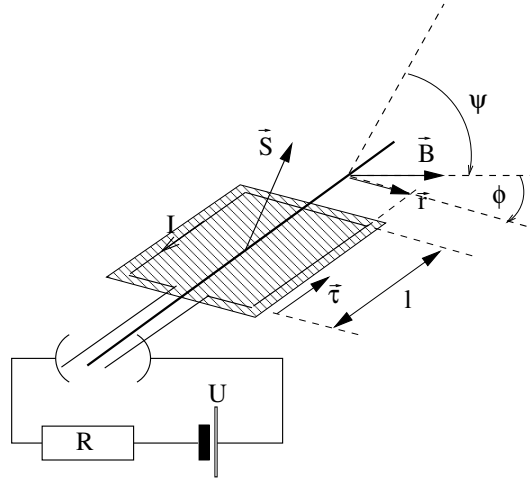
$$\vec{D}^{n,*} = \int (\vec{r} - \vec{r}^*) \times d\vec{F}. \quad (230)$$

3.7.5 Moment sily od jednosmerného elektromotora

Na každý krátky úsek prúdovodiča, ktorým preteká premenný elektrický prúd $i(t)$ a ktorý sa nachádza v magnetikom poli $\vec{B}(t)$ pôsobí Lorentzova sila²

² Na náboj dq pôsobí sila $d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B}$, kde \vec{v} je rýchlosť, ktorou sa náboj pohybuje pozdĺž vodiča (tzv. driftová rýchlosť). V krátkom úseku prúdovodiča s prierezom s plochou S a dĺžkou $d\vec{l}$ je náboj $dq = en\vec{S} \cdot d\vec{l}$, kde n je objemová hustota nosičov náboja. Elektrický prúd, t.j. náboj, ktorý prejde vodičom za jednotku času je daný $i = dqn\vec{S} \cdot \vec{v}$, a preto Lorentzovu silu možno napísať v tvare $d\vec{F} = en\vec{S} \cdot d\vec{l}\vec{v} \times \vec{B} = id\vec{l} \times \vec{B}$, pričom sme uvážili, že vektory $d\vec{l}$ aj \vec{v} majú rovnaký smer, daný napr. jednotkovým vektorom \vec{e} , t.j.

$$\vec{S} \cdot d\vec{l}\vec{v} \times \vec{B} = \vec{S} \cdot \vec{e}dlv\vec{e} \times \vec{B} = \vec{S} \cdot \vec{v}d\vec{l} \times \vec{B}$$



Obr. 12: Elektromechanický systém jednoduchého elektromotora.

$$d\vec{F} = i(t)d\vec{l} \times \vec{B}(t) \quad (231)$$

Označme si jednotkový vektor $\vec{\tau}$ ako smer otáčania uhlu ϕ podľa obrázku. Priemet celkového momentu Lorentzovej sily, pôsobiacej na prúdovodič, do smeru osi otáčania bude

$$D(t) = \vec{\tau} \cdot \vec{D}(t) = \vec{\tau} \cdot \int \vec{r}(t) \times d\vec{F} \quad (232)$$

$$= 2\vec{\tau} \cdot \left(\vec{r}(t) \times \left(l i(t) \vec{\tau} \times \vec{B}(t) \right) \right) \quad (233)$$

$$= 2i(t) l \vec{r}(t) \cdot \vec{B}(t) = 2i(t) l r B(t) \cos(\phi), \quad (234)$$

kde integrál v prvom riadku predstavuje integrovanie pozdĺž celého prúdovodiča, $\vec{r}(t)$ je polohový vektor krátko úseku prúdovodiča dl a r v poslednom riadku označuje polomer vinutia na cievke.

Zberače sú postavené tak, aby vždy keď je $\cos(\phi) < 0$ zmenil prúd polaritu tak, aby výsledný moment sily bol vždy kladný a dochádzalo k pretáčaniu. Znamená to, že úloha zberačov je postaviť funkciu $\cos(\phi)$ do absolútnej hodnoty, t.j.

$$D = 2i(t) l r B |\cos(\phi)|. \quad (235)$$

V tomto tvare je ale motor neefektívny, nakoľko pre $\phi \approx \pi/2, 3\pi/2, \dots$ je $D \approx 0$. Preto sa využíva viac závitov, vzájomne posunutých o fázu $\Delta\alpha$,

$$D = \sum_{n=0}^{N-1} 2i(t) l r B |\cos(\phi - n\Delta\alpha)|. \quad (236)$$

Numericky sa možno presvedčiť, že pre veľké N je moment sily motora prakticky nezávislý od aktuálneho natočenia ϕ . Limitný prípad $N \rightarrow \infty, \Delta\alpha \rightarrow 0, N\Delta\alpha = \pi$ možno získať aj priamou integráciou zavedením $\alpha = n\Delta\alpha, \Delta\alpha = \Delta n\pi/N$,

$$D = 2i(t) l r B \frac{N}{\pi} \int_0^\pi d\alpha |\cos(\phi - \alpha)| \quad (237)$$

$$= 2i(t) l r B \frac{N}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin(\alpha) \quad (238)$$

$$= \frac{4}{\pi} N i(t) l r B = KI(t) \quad (239)$$

Tento výsledok sa často používa pri stavaní dynamických modelov zahŕňajúcich jednosmerný elektromotor. V týchto problémoch treba riešiť dynamiku manipulátora spolu s dynamikou elektrických obvodov, s pohybovou rovnicou pre prúd

$$U_Z = Ri(t) + \frac{d\Phi}{dt}. \quad (240)$$

kde U_Z je napätie na zdroji, R je celkový odpor obvodu, Φ je časovo premenný magnetický tok. Magnetický tok má samoindukčnú časť, $L(t)i(t)$, kde $L(t)$ indukčnosť motora, a časť pochádzajúcu z permanentného magnetu, $\int \vec{B}_{mag} \cdot d\vec{S}$. $L(t)$ sa pri pohybe motora môže meniť s časom, čo modifikuje silovým účinkom externého póla magnetu B_{mag} .

Magnetický tok zachytený n -tým závitom je

$$\Phi_n(t) = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos(\psi - n\Delta\alpha) = BS \cos(\phi - \pi/2 - n\Delta\alpha) = BS \sin(\phi - n\Delta\alpha) \quad (241)$$

a jeho príspevok k indukovanému napätiu bude

$$U_n = \text{sgn} \frac{d}{dt} \Phi_n(t) = \text{sgn} BS \cos(\phi - n\Delta\alpha) \dot{\phi}. \quad (242)$$

Kvôli zberačom bude znamienko tohto napätia v obvode vždy, keď je $\cos(\phi - n\Delta\alpha) < 0$ zmenené, čo je značené symbolom "sgn". Toto opäť vytvára absolútnu hodnotu z funkcie $\cos(\)$,

$$U_n = BS |\cos(\phi - n\Delta\alpha)| \dot{\phi}. \quad (243)$$

Opäť môžeme získať limitu hustého vinutia,

$$U_{ind} = \sum_{n=0}^{N-1} U_n = BS \sum_{n=0}^{N-1} |\cos(\phi - n\Delta\alpha)| \dot{\phi} = \quad (244)$$

$$= BS \dot{\phi} \frac{N}{\pi} \int_0^\pi d\alpha |\cos(\phi - \alpha)| \quad (245)$$

$$= BS \dot{\phi} \frac{2N}{\pi} = K \dot{\phi}, \quad (246)$$

kde sme využili, že $2rl = S$.

Energetické bilancia v elektro-mechanickom systéme

Výskyt identickej konštanty pri indukovanom napätí a pri momente sily motora je principiálne dôležitý - práca, ktorú koná motor je $W_M = \int dt D \dot{\phi}$. Táto musí súvisieť s energiou ktorú dodá batéria. Z rovnice (240) nájdeme pre túto energiu,

$$W_{bat} = \int dt U_Z i(t) = \int dt Ri^2(t) + \int dt U_{ind} i(t). \quad (247)$$

Použitím výsledku (246) nájdeme

$$W_{bat} = \int dt Ri^2(t) + \int dt K \dot{\phi} i(t) = \int dt Ri^2(t) + W_M, \quad (248)$$

kde prvý člen predstavuje ohmické straty v obvode a druhý je presne práca konaná motorom.

Pohybové rovnice jednosmerného elektromotora Je dôležité si uvedomiť, že úplné modelovanie mechanického systému s motormi predstavuje vlastne paralelné riešenie nie len dynamiky mechanických ale aj elektrických stupňov voľnosti. Napríklad náš tu študovaný problém predstavujú prepojené diferenciálne rovnice pre uhol pootočenia elektromotora a prúd v riadiacom obvode,

$$I_M \ddot{\phi}(t) = Ki(t) - D_Z(q_i(t)), \quad (249)$$

$$U_Z(t) = RI(t) + K \dot{\phi}(t) \quad (250)$$

kde $D_Z(q_i(t))$ indikuje moment záťaže motora, ktorý môže závisieť od ďalších stupňov voľnosti a teda vyžadovať ďalšie diferenciálne rovnice. V tomto jednoduchom prípade možno prúd priamo vyjadriť z 2. rovnice čo eliminuje problém riešenia dvoch rovníc.

Často je však nutné uvážiť aj samo-indukčnosť závitov, čo vedie k výskytu prvej derivácie prúdu v 2. rovnici a teda k skutočnému systému dvoch prepojených diferenciálnych rovníc.

3.8 Energetická bilancia v formalizme Lagrangeových rovníc

Budeme uvažovať systém N hmotných bodov, s polohovými vektormi \vec{r}_i , nachádzajúci potenciálovom poli charakterizovanom celkovou potenciálnou energiou týchto bodov $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$. Naviac, nech na každý hmotný bod pôsobí aj nepotenciálová sila \vec{F}_i . Tento systém nech obsahuje N_v holonómnych väzieb tak že na jeho popis postačí M zovšeobecnených súradníc q_j . Ako už vieme, tieto spĺňajú Lagrange-Eulerove rovnice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, j = 1, \dots, M \quad (251)$$

Prácu, ktorú za čas T vykoná nepotenciálová sila Q_j (inak predstavujúcu zmes nepotenciálových síl $Q_j = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$) nájdeme podľa rovnice 113, t.j. vynásobením Lagrange-Eulerových rovníc s \dot{q}_j a integrovaním cez čas T ,

$$\int dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = W_j, j = 1, \dots, M \quad (252)$$

(Nasledovné nebolo odprednášané, ale pre úplnosť diskusii o energetickej bilancii)

Celková práca nepotenciálových síl sa získa súčtom takýchto rovníc,

$$W^{nepot} = \sum_j \int dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j \quad (253)$$

Pretože Lagrangeova funkcia je funkciou všetkých súradníc a ich rýchlostí platí,

$$\frac{d}{dt} L(q_1, \dots, q_M; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_M) = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right)$$

pomocou čoho dostaneme pre celkovú prácu nepotenciálových síl,

$$W^{nepot} = \sum_j \int dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j \quad (254)$$

$$= \sum_j \int dt \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) - \int dt \frac{dL}{dt} \quad (255)$$

$$= \int dt \frac{d}{dt} \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - L|_{t=0}^{t=T} \quad (256)$$

Keďže prvý člen je

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 \right) \dot{q}_j \quad (257)$$

$$= \sum_j \sum_i \nabla_{\vec{v}_i} \left(\frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 \right) \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \frac{dq_j}{dt} \quad (258)$$

$$= \sum_j \sum_i \nabla_{\vec{v}_i} \left(\frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 \right) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} \quad (259)$$

$$= \sum_i \nabla_{\vec{v}_i} \left(\frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 \right) \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_i \nabla_{\vec{v}_i} \left(\frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 \right) \vec{v}_i \quad (260)$$

$$= \sum_i \nabla_{\vec{v}_i} \left(\frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 \right) \vec{v}_i = \sum_i (m_i |\vec{v}_i|^2) = 2E_k, \quad (261)$$

a $L = E_k - U$, nájdeme vyjadrenie zákona zachovania energie pre mechanickú sústavu,

$$W^{nepot} = (E_k + U)|_{t=0}^{t=T} \quad (262)$$

3.9 Inverzné použitie Lagrangeových rovníc

Priame použitie Lagrangeových pohybových rovníc znamená, že pre predpísané nepotenciálové sily od motorov hľadáme, ako sa budú meniť v čase jednotlivé stupne voľnosti, t.j. riešime systém diferenciálnych rovníc.

Z hľadiska návrhu mechanizom je dôležitá aj opačná, t.j. *inverzná* úloha, keď navrhujeme ako sa majú meniť súradnice a následne hľadáme, aké sily a momenty síl v motoroch takýto pohyb dokážu realizovať. Inverzná úloha - ak má riešenie - je v skutočnosti jednoduchší problém, ako je riešenie diferenciálnej rovnice.

Predstavme si, že máme mechanický systém s dvoma stupňami voľnosti q_1 a q_2 , na ktorý pôsobia dve zovšeobecnené sily $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$. LPR budú mať tvar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1(t) \quad (263)$$

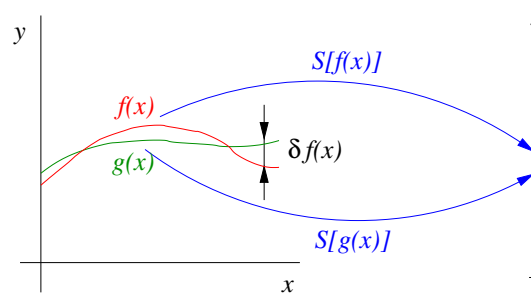
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = Q_2(t) \quad (264)$$

V prípade inverznej úlohy predpíšeme časovú závislosť $q_1(t)$ a $q_2(t)$, potom rovnice (263) a (264) priamo predstavujú explicitný predpis pre nájdenie zovšeobenených síl, potrebných pre zvolenú kinematiku danú predpismi $q_1(t)$ a $q_2(t)$.

Komplikovanejšia úloha je, ak počet motorov je menší ako počet stupňov voľnosti, t.j. v našom prípade ak napríklad $Q_2(t) = 0$ (neuvažujeme trenie). V tomto prípade nemôžeme akokoľvek predpísať $q_1(t)$ a $q_2(t)$. Stratégia hľadania riadenia je potom taká, že predpíšeme správanie sa jedného stupňa voľnosti, povedzme $q_1(t)$, riešením diferenciálnej rovnice (264) k tomu nájdeme konzistentnú časovú závislosť $q_2(t)$, a až zo znalosti tejto dokážeme nájsť zovšeobecnenú silu $Q_1(t)$, ktorá nám požadovanú kinematiku pre $q_1(t)$ zabezpečí.

3.10 Variačný princíp a Lagrangeove rovnice

3.10.1 Matematické minimum z funkcionálnej analýzy



Obr. 13: Funkcionál $S[\]$ priradí funkcii $f(x)$ číslo na reálnej osi. Ak je spojitý, tak dvom “blízkym funkciám” $f(x)$ a $g(x)$ v zmysle zavedenej miery, priradí dve blízke čísla na reálnej osi. Rozdiel $g(x) - f(x) = \delta f(x)$ možno chápať ako malú zmenu funkcie $f(x)$.

Analogicky definícii reálnej funkcie N reálnych premenných, ktorá predstavuje zobrazenie

$$f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R} \quad (265)$$

sa zavádza aj pojem *funkcionálu*, ktorý priradí funkcii (napr. reálnej funkcii reálnej premennej x , definovanej na intervale $x \in (a, b)$) reálne číslo (Obr. 13),

$$S[f(x)] : f(x) \rightarrow \mathbf{R}. \quad (266)$$

Ak by sme nebrali spojitú $x \in \mathbf{R}$, ale M vybraných diskretných hodnôt $\{x_i\}_{i=1}^M$ (vzorkovanie reálnej osi), potom sa na funkcionál môžeme pozeráť ako na funkciu mnohých reálnych premenných $\{f_i\}_{i=1}^M$, $S(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_M)) = S(f_1, f_2, \dots, f_M)$.

Definícia (266) sa najlepšie demonštruje na konkrétnom príklade.

Príklad: Funkcionál $S[\]$ priradí ľubovoľnej kvadraticky integrovateľnej funkcii $f(x)$ na intervale $(0, 1)$ reálne číslo pomocou predpisu

$$S[f(x)] = \int_0^1 k \{f(x')\}^2 dx', \quad (267)$$

(k je reálne nemenné číslo, t.j. parameter).

Podobne ako je to v matematickej analýze funkcie reálnej premennej, možno zaviesť pojmy ohraničenia, spojitosti (Obr. 13) a derivácie. Pre ne je potrebné mať zavedenú *mieru* na množine funkcií, t.j. pojem veľkosti funkcie $|f(x)|$, aby sme mohli hovoriť o dvoch funkciách vzdialených od seba o ε . Existujú viaceré užitočné miery funkcií, jedna z najbežnejších je

$$\int_a^b |f(x')|^2 dx'. \quad (268)$$

Množina funkcií obohatená takýmto pojmom miery (alebo veľkosti či normy) sa nazýva aj priestor $L^2(a, b)$. Dve funkcie $f(x)$ a $g(x)$ sa potom považujú za “blízke”, resp. v ε okolí ak

$$|f(x) - g(x)| = \int_a^b (f(x') - g(x'))^2 dx' \leq \varepsilon \quad (269)$$

Pojem derivácie funkcionálu je dôležitý aj pre naše účely a naznačíme si tu jej zavedenie bez nároku na matematickú presnosť.

Variácia funkcionálu je rozšírením pojmu diferenciálu funkcie N reálnych premenných. Tento diferenciál df predstavuje lineárne zobrazenie, ktoré N malým prírastkom $\Delta x_1, \dots, \Delta x_N$, pri fixovanej hodnote \mathbf{x} ktorá v diferenciály predstavuje parameter, priradí zodpovedajúci prírastok funkcie $f(\mathbf{x})$ ³

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i. \quad (270)$$

Podobne, *variácia funkcionálu* je lineárny funkcionál, ktorý malej zmene funkcie $\delta f(x)$ (Obr. 13) priradí zodpovedajúcu zmenu pôvodného funkcionálu,

$$\delta S[f(x)] = S[f(x) + \delta f(x)] - S[f(x)] = \int v(x') \delta f(x') dx' \quad (271)$$

pričom integrujeme cez oblasť definície funkcie $f(x)$.

Zavedenú funkciu pod integrálom

$$v(x') = \frac{\delta S[f(x)]}{\delta f(x')} \quad (272)$$

nazývame *funkcionálna derivácia*. Opäť, najlepšie je demonštrovať pojem variácie na vyššie uvedenom príklade funkcionálu.

Príklad:

$$\frac{\delta S[f(x)]}{\delta f(x')} = 2kf(x') \quad (273)$$

Ako? Nech $\delta f(x)$ je malá zmena $f(x)$ potom

$$\delta S[f(x)] = S[f(x) + \delta f(x)] - S[f(x)] = \dots = \int_a^b 2kf(x) \delta f(x) dx \quad (274)$$

Funkcionál môže nadobúdať *extrém* vo funkcii $f_e(x)$ ak je jeho variácia v okolí tejto funkcie nulová

$$\delta S[f_e(x)] = 0, \quad (275)$$

nakoľko v tomto prípade sa pri malej zmene funkcie $f(x) = f_e(x) + \delta f(x)$ hodnota funkcionálu nemení. Táto podmienka je ekvivalentná rovnosti nule funkcionálnej derivácie

$$\left. \frac{\delta S}{\delta f(x)} \right|_{f(x)=f_e(x)} = 0 \quad (276)$$

čo typicky predstavuje (funkcionálnu, napr. diferenciálnu) rovnicu pre funkciu $f_e(x)$.

3.10.2 Matematická forma variačného princípu pre Lagrangeove pohybové rovnice

Lagrangeove pohybové rovnice možno získať z podmienky extrémumu funkcionálu

$$S[q_i(t)] = \int_0^T dt' L(q_i(t'), \dot{q}_i(t')) dt', \quad (277)$$

t.j. funkcionálu daného integrálom Lagrangeovej funkcie cez čas, počas ktorého študujeme pohyb, pri danej počiatkovej a konečnej hodnote stupňov voľnosti, t.j. z podmienky

$$\delta S[q_i(t)] = 0 \Rightarrow \frac{\delta L(q_1(t), \dots, \dot{q}_N(t))}{\delta q_i(t)} = 0, i = 1, \dots, N \quad (278)$$

³Zobrazenie v tom zmysle, že napr. fixované $\mathbf{x} = (x, y) = (1, 2)$ priradí k $d\mathbf{x} = (dx, dy) = (0.1, 0.01)$ hodnotu $df = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(1,2)} 0.1 + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(1,2)} 0.01$.

kde $L(q_1, q_2, \dots, q_M, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$ je Lagrangeova funkcia N zovšeobecnených súradníc q_i a k nim patria N zovšeobecnených rýchlostí \dot{q}_i . Tento funkcionál sa vo fyzike nazýva aj *účinnok*. Uvedomme si, že pri zavedení (277) chápeme tento ako funkcionál len $q_i(t)$; $\dot{q}_i(t)$ sú už od nich odvodené “závislé” veličiny.

Hľadáme variáciu funkcionálu $S[\]$,

$$\delta S[q(t)] = \lim_{|\delta q(t)| \rightarrow 0} \{S[q(t) + \delta q(t)] - S[q(t)]\} \quad (279)$$

$$= \int_0^T dt' (L(q(t') + \delta q(t'), \dot{q}(t') + \delta \dot{q}(t')) - \int_0^T dt' (L(q(t'), \dot{q}(t'))) \quad (280)$$

$$= \int_0^T dt' \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t') + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}(t') \right) \quad (281)$$

kde sme v poslednom kroku využili fakt, že $\delta q(t)$ je malá zmena, a preto môžeme v jej okolí rozvinúť Lagrangeovu funkciu do Taylorovho radu a ponechať len konštantný a lineárny člen. V poslednom výraze v druhom člene prevedieme integráciu *per-partes*,

$$\delta S[q(t)] = \int_0^T dt' \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t') - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q(t') + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t') \right) \right\} \quad (282)$$

$$= \int_0^T dt' \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q(t') + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t') \right]_0^T \quad (283)$$

Nakoľko počiatočná a konečná hodnota stupňa voľnosti, $q(0)$ a $q(T)$ sú pevne dané, uvažovaná variácia $\delta q(0) = 0$ a $\delta q(T) = 0$ a preto posledný člen v rovnici (283) je nulový. Nakoľko až na tieto okrajové podmienky môžu byť $\delta q(t)$ ľubovoľné, no pritom musí byť variácia (283) v extréme nulová, musí pre extrémálnu trajektóriu $q_e(t)$ platiť rovnica

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (284)$$

v ktorej jasne rozoznávame Lagrange-Eulerovu rovnicu. Tento výsledok je všeobecný pre ľubovoľný funkcionál v tvare (277), no v špeciálnom prípade, ak je $L = E_K - U$ pre systém itt, kde E_K je celková kinetická energia a U celková potenciálna energia, potom sa daná formulácia týka formulácie mechaniky systému ideálne tuhých telies.

3.10.3 Klasické variačné problémy

Rotáčny telesá s minimálnym povrchom. Uvažujme teleso, ktoré vznikne rotáciou okolo osi x funkcie $h(x)$ na intervale $x \in (x_1, x_2)$. Zaujímá nás, aká má byť táto funkcia, aby bol povrch výsledného objektu minimálny ak $h(x_1) = h_1$ a $h(x_2) = h_2$ sú dané.

Vyjadríme si povrch telesa pre danú funkciu $h(x)$,

$$S[h(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx 2\pi h(x) \sqrt{(h')^2 + 1}. \quad (285)$$

Extrém funkcionálu nájdeme z Lagrange-Eulerovej rovnice,

$$L(h, h') = 2\pi h(x) \sqrt{(h')^2 + 1} \quad (286)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} L = 2\pi \sqrt{(h')^2 + 1} \quad (287)$$

$$\frac{\partial}{\partial h'} L = \frac{2\pi h(x) h'(x)}{\sqrt{(h')^2 + 1}} \quad (288)$$

s výslednou rovnicou

$$\frac{d}{dx} \frac{h(x)h'(x)}{\sqrt{(h')^2 + 1}} - \sqrt{(h')^2 + 1} = 0. \quad (289)$$

Prekvapivo, táto rovnica má analytické riešenie (pomocou Hamiltonovej funkcie...)

$$h(x) = c_1 \cosh\left(\frac{x + c_2}{c_1}\right), \quad (290)$$

kde konštanty c_1 a c_2 sú určené súradnicami koncových bodov, $h(x_1) = h_1$ a $h(x_2) = h_2$.

Tvar zaveseného lana. Druhou úlohou je nájsť tvar lana so známou hmotnosťou na jednotku dĺžky μ , celkovou dĺžkou l , ktoré visí v homogénnom gravitačnom poli, pričom jeho konce sú uchytené v dvoch bodoch ktorých vzdialenosť $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} < l$.

Veličina, ktorá bude nadobúdať extrém - minimum - je celková potenciálna energia lana,

$$U = \int dl \mu gh(l), \quad (291)$$

kde $h(l)$ je výška, v ktorej sa nachádza element lana s dĺžkou dl . Tento integrál po krivke môžeme parametrizovať pomocou horizontálnej súradnice x a výšky v ktorej sa lano nachádza $h(x)$, pričom element dĺžky bude

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 + 1} dx. \quad (292)$$

Na krajoch $x = 0$ a $x = x_1$ je poloha lana predpísaná, $h(0) = 0$, $h(x_1) = y_1$.

Samotné funkcie $h(x)$ nemôžu byť celkom ľubovoľné, ale také, aby celková dĺžka lana bola l , t.j. musia spĺňať podmienku

$$\int_0^{x_1} \sqrt{(h'(x))^2 + 1} dx - l = 0 \quad (293)$$

Túto bočnú podmienku zahrnieme k problému hľadania minima potenciálnej energie pomocou metódy Lagrangeových multiplikátorov, takže nakoniec hľadáme extrém funkcionálu

$$\delta \left\{ \int dx \sqrt{((h'(x))^2 + 1)} \mu gh(x) - \lambda \left(\int_0^{x_1} \sqrt{((h'(x))^2 + 1)} dx - l \right) \right\} = 0, \quad (294)$$

kde λ je Lagrangeov multiplikátor zaručujúci predpísanú dĺžku lana l .

Na posledný výraz sa môžeme pozrieť ako na Lagrangeovu funkciu

$$L(h(x), h'(x)) \quad (295)$$

kde x zodpovedá času a h stupňu voľnosti v našom doterajšom používaní Lagrangeovho formalizmu. Zodpovedajúca Lagrange-Eulerova rovnica potom nadobúda tvar

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial h'} - \frac{\partial L}{\partial h} = 0 \quad (296)$$

$$\frac{dL}{dh} = \mu g \sqrt{(h')^2 + 1} \quad (297)$$

$$\frac{dL}{dh'} = (\mu gh - \lambda) \frac{d}{dh'} \sqrt{(h')^2 + 1} = \frac{\mu gh - \lambda}{\sqrt{(h')^2 + 1}} h' \quad (298)$$

s výslednou diferenciálnou rovnicou pre $h(x)$,

$$\frac{d}{dx} \frac{\mu gh - \lambda}{\sqrt{(h')^2 + 1}} h' - \mu g \sqrt{(h')^2 + 1} = 0. \quad (299)$$

Aj táto rovnica má analytické riešenie (podobná ako vyššie), tento krát v tvare

$$\mu gh(x) = \lambda + c_1 \cosh\left(\frac{x + c_2}{c_1}\right), \quad (300)$$

kde tri konštanty λ , c_1 a c_2 sú určené súradnicami koncových bodov, $h(0) = 0$ a $h(x_1) = y_1$, a požadovanou dĺžkou lana l .

Brachistochrona. Posledný problém predstavuje otázku tvaru trajektórie po ktorej sa pohybuje bod v homogénnom gravitačnom poli z pokoja a výšky $h = 0$ na $h = -d < 0$ (pričom začiatočný a koncový bod sú od seba vysunuté aj horizontálne) tak, aby ju prešiel za najkratší čas. Jej riešením je krivka zvaná cykloida, no pre krátkosť času sa tu týmto problémom zaoberať nebudeme.

3.10.4 Lagrangeova funkcia pre mechatronické systémy

Uvažujme elektronický obvod pozostávajúci z kondenzátora a cievky - vinutia na motore, ktorý je prepojený s mechanickým motorom.

Ukážeme si, že dynamika takéhoto systému je taká, aby náboj na kondenzátore $Q(t)$ a uhol otočenia $\phi(t)$ predstavovali extrém pre funkcionál postavený z Lagrangeovej funkcie

$$L(\phi, \dot{\phi}, Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 + K \dot{Q} \phi + \frac{1}{2} L \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (301)$$

kde I je moment zotrvačnosti motora, K je konštanta vystupujúca v momente sily od jednosmerného motora (239), C je kapacita kondenzátora a L indukčnosť motora. Posledné dva členy sú analógiou rozdielu kinetickej a potenciálnej energie v mechanike - v tomto prípade je to rozdiel energie elektrického poľa v kondenzátore a magnetického poľa v motore. Lagrange-Eulerova rovnica pre ϕ nám dá už známu rovnicu,

$$I \ddot{\phi} - K \dot{Q} = 0 \quad (302)$$

Uvážením že $\dot{Q} = I(t)$, elektrický prúd, nachádzame že táto rovnica zodpovedá prvej z rovníc (249). Rovnicu pre náboj nájdeme rovnako ľahko,

$$\frac{\partial}{\partial Q} L = -\frac{Q}{C}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{Q}} L = K \phi + L \dot{Q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{Q}} L = K \dot{\phi} + L \ddot{Q} \quad (303)$$

takže výsledná rovnica je

$$K \dot{\phi} + L \ddot{Q} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (304)$$

Táto zodpovedá Kirchhoffovému zákonu pre tento obvod, t.j. ide o rovnicu zodpovedajúcu (250).

Z tohto jednoduchého príkladu vidieť, že sily, ktoré sa z hľadiska čisto mechanickej sústavy zdali byť nepotenciálové, môžu byť zahrnuté do Lagrangeovho formalizmu ak rozšírime počet stupňov voľnosti, pričom tieto zd'aleka nemusia byť len geometrickými stupňami voľnosti.

Zároveň si všimnime, že konštanta K v oboch rovniciach je nevyhnutne tá istá nie len z hľadiska energetickej bilancie, ako sme videli už skôr, ale vychádza priamo z jediného interakčného člena medzi geometrickým a elektrickým stupňom voľnosti v Lagrangeovej funkcii v tvare $\Delta L = K \dot{Q} \phi$.

4 Dynamika kontinua

4.1 Vedenia tepla

4.1.1 Rovnica vedenia tepla

Ako prvý príklad dynamiky kontinua budeme rozoberať problematiku výpočtu teploty v rozložitom telese. Kontinuum znamená objekt, ktorý považujeme za spojité v priestore a preto existujú veličiny, ktoré nás zaujímajú, a sú merateľné v každom bode priestoru. V tejto časti pôjde o teplotné pole, hustotu toku tepla, hustotu vnútornej energie či hustotu hmotnosti.

Pojem "teploty" rozšírime na fyzikálne pole - lokálnu teplotu v danom mieste telesa $T(\vec{r}, t)$, čo zodpovedá teplote telesa v mieste \vec{r} a čase t .

Uvažujme daný objem Ω , ktorý je vyplnený uvažovanou látkou (v anglickej inžinierskej literatúre tzv. *control volume*). Preň budeme uvažovať 1. zákon termodynamický,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dQ}{dt}. \quad (305)$$

Vnútrná energia tuhých látok môže byť komplikovanou funkciou stavových parametrov (T, p, \vec{B}, \dots) no my sa tu obmedzíme na jej fenomenologický popis známy z kalorimetrie, platný pri konštantnom tlaku a v rámci rozumného intervalu teplôt,

$$\Delta U = mc_p \Delta T \quad (306)$$

Podobne ako je zavedené lokálne teplotné pole, je potrebné zaviesť aj lokálnu vnútornú energiu. Pretože vnútorná energia je extenzívna veličina, t.j. rastie lineárne s množstvom látky (napríklad počtom častíc tvoriacich látku, počtom molov či hmotnosťou), možno zaviesť vnútornú energiu na jednotku hmotnosti - mernú vnútornú energiu -

$$\Delta u = \Delta U / m = c_p \Delta T. \quad (307)$$

Ak budeme uvažovať vnútornú energiu, ktorú má látka nachádzajúca sa v malom objeme dV v mieste \vec{r} , potom táto bude daná výrazom

$$d\Delta U = \Delta u(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV = \rho(\vec{r}) c_p \Delta T(\vec{r}) dV, \quad (308)$$

kde $\rho(\vec{r})$ je hustota (hmotnosti) látky v mieste \vec{r} .

Pre deje, pri ktorých sa nemení teplota (a teda aj merná vnútorná energia) len v priestore ale aj v čase, budeme uvažovať nasledovné zovšeobecnenie posledného,

$$d\Delta U = u(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t) dV = \rho(\vec{r}, t) c_p \Delta T(\vec{r}, t) dV. \quad (309)$$

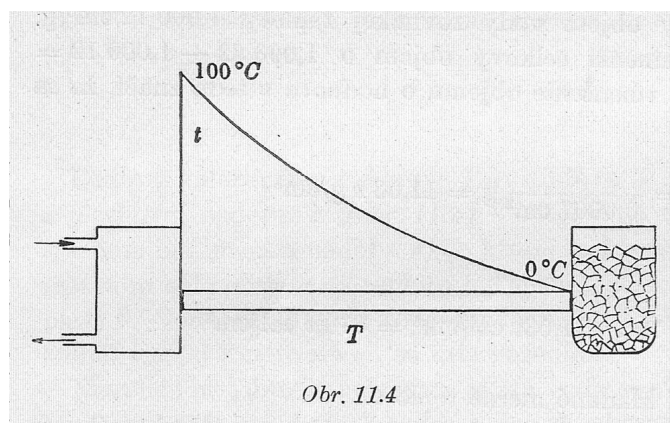
V našom prípade budeme uvažovať len ideálne tuhé teleso a preto pre hustotu bude platiť $\rho(\vec{r}, t) = \rho = \text{const.}$

Ak sa teraz vrátíme k objemu Ω , bude zmena vnútornej energie látky, ktorá sa v ňom nachádza, daná súčtom vnútorných energií látky nachádzajúcej sa v jednotlivých malých objemoch dV ,

$$\Delta U_{\Omega}(t) = \int_{\Omega} d\Delta U = \int_{\Omega} d^3 r \rho c_p \Delta T(\vec{r}, \vec{t}) \quad (310)$$

Ak budeme uvažovať zmenu ΔU ako zmenu za krátku časový interval $\Delta t \rightarrow 0$, budeme môcť vyjadriť časovú deriváciu v rovnici (305) v tvare

$$\frac{dU}{dt} = \int_{\Omega} d^3 r \rho c_p \frac{dT(\vec{r}, \vec{t})}{dt}. \quad (311)$$



Obr. 14: K empirickému určeniu Fourierovho zákona. Prevzaté z [6].

Na pravej strane 1. vety termodynamickkej, (305) vystupuje množstvo tepla dodané látke v objeme Ω . Dodané teplo môžeme rozdeliť na teplo dodané cez povrch a teplo vygenerované. Pre popis tepla dodaného cez povrch sa zavádza veličina *hustota tepelného toku* \vec{j}_Q , ktorá vyjadruje množstvo tepla prechádzajúceho jednotkovou plochou za jednotku času.

Experimentálne zavedenie tejto veličiny je demonštrované na obrázku 14, a krásne popísané v Ilkovičovej učebnici [6]. Vyhrievač na ľavej strane tyče dodáva teplo do kovovej tyče, ktorá ho následne prevádza do zmesi vody a ľadu. Tá má konštantnú teplotu (0°C), no na základe merania množstva ľadu vieme určiť aké množstvo tepla bolo vode s ľadom dodané. Takýmto meraním ustáleného stavu by sme prišli k vzťahu pre dodané teplo,

$$\Delta Q = k_Q St \frac{1}{l} (T_L - T_P), \quad (312)$$

kde k_Q je *koeficient tepelnej vodivosti* - konštanta charakteristická pre materiál tyče, S plocha prierezu tyče, l dĺžka tyče, t čas a $T_L - T_P$ rozdiel teploty vľavo (vyhrievač) a vpravo (voda s ľadom). Aby bol priebeh teploty na obrázku čo najlineárnejší, je potrebné vziať len krátku tyč a malý rozdiel teplôt, nakoľko inak dochádza k úniku tepla stenou tyče. Ak si zavedieme kladný smer osi x zľava (L) doprava (P), potom tento vzťah krátku tyč s dĺžkou dx možno prepísať do tvaru

$$\Delta Q = k_Q St \frac{T_L - T_P}{dx} = -k_Q St \frac{\partial T}{\partial x} \quad (313)$$

Nakoniec zavedením veličiny prenosu tepla za jednotku času na jednotku plochy nájdeme vzťah pre hustotu toku tepla,

$$j_Q = -k_Q \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (314)$$

Tento vzťah vyjadruje termodynamickú tendenciu vyrovnávať teplotu v rámci akéhokoľvek fyzikálneho systému. Symetrické zovšeobecnenie pre úlohy, kde teplota môže závisieť od všetkých súradníc, je *vektor hustoty toku tepla*

$$\vec{j}_Q = -k_Q \nabla T(\vec{r}, t), \quad \nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (315)$$

udávajúci množstvo tepla prechádzajúceho ploškou $d\vec{S}$ za jednotku času výrazom $\vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$. Fyzikálna jednotka hustoty toku tepla bude zrejmé $[j_Q] = \text{W m}^{-2}$. Rovnica (315) sa nazýva aj Fourierov zákon.

Samotný koeficient tepelnej vodivosti mierne závisí od teploty (obrázok (15)) a jeho hodnota pre pár dôležitých materiálov je v tabuľke 1.

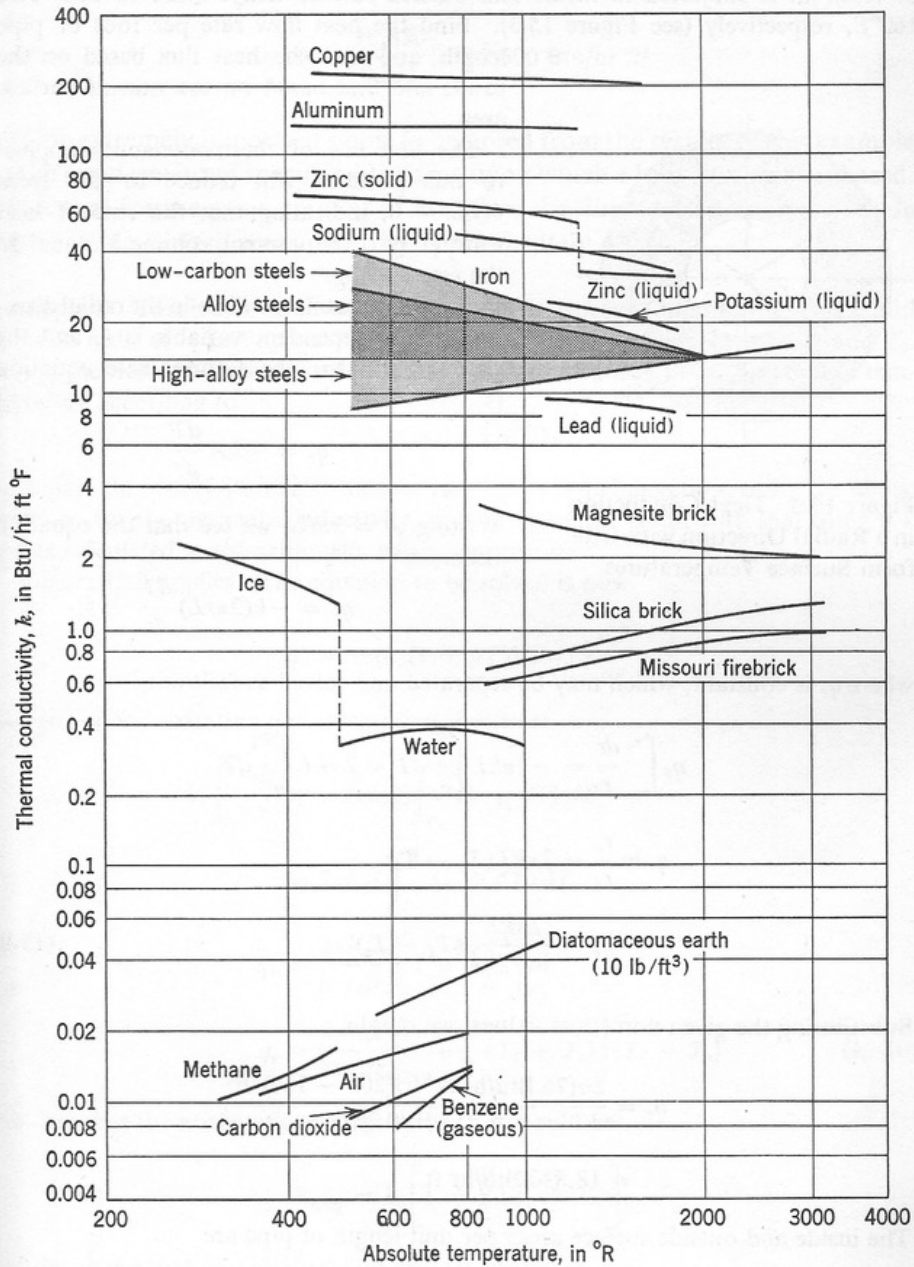


Figure 15.2 Thermal Conductivity of Several Materials at Various Temperatures. (From M. Jacob and G. A. Hawkins, *Elements of Heat Transfer*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1957, p. 23. By permission of the publishers.)

Obr. 15: Prevzaté z [3]. $1^{\circ}\text{R}=5/9\text{K}$, $1\text{Btu}/(\text{hr ft }^{\circ}\text{F}) = 1,73 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Materiál	ρ [g/cm ³]	M_m [g/mol]	c [J mol ⁻¹ K ⁻¹]	k_Q [W m ⁻¹ K ⁻¹]
Au	19.3	196.96	25.418	318
Cu	8.96	63.55	24.44	401
Al	2.7	26.98	24.2	237
Si	2.32	28.08	19.789	149

Tabuľka 1: Reprezentatívne termo-fyzikálne parametre vybraných materiálov

Nakoniec, teplo vygenerované v malom objeme dV si označíme ako $\dot{q}(\vec{r}, t)dV$. Ako príklad možno uviesť Joulove straty spôsobené tokom elektrického prúdu daného hustotou elektrického prúdu $\vec{j}(\vec{r}, t)$ indukovanou elektrickým poľom $\vec{E}(\vec{r}, t)$,

$$\dot{q} = \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (316)$$

Rozmer hustoty zdrojov tepla je $[\dot{q}] = \text{W}/\text{m}^3$.

Nakoľko smer plošného elementu $d\vec{S}$ je konvenčne braný ako vonkajšia normála, nájdeme spojením povrchového a objemového príspevku pre teplo dodané do oblasti Ω

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3r \dot{q}(\vec{r}, t) - \int d\vec{S} \cdot \vec{j}_Q, \quad (317)$$

Za predpokladu že na látke v objeme Ω nekonáme prácu, $dW/dt = 0$, kombináciou posledného vzťahu s rovnicou pre časovú zmenu vnútornej energie (311) nájdeme,

$$\int_{\Omega} d^3r \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \int_{\Omega} d^3r \dot{q}(\vec{r}, t) - \int_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \vec{j}_Q, \quad (318)$$

kde Σ je plocha uzatvárajúca objem Ω . Plošný integrál môžeme pomocou Gaussovej vety premeniť na objemový,

$$\int_{\Omega} d^3r \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \int_{\Omega} d^3r \dot{q}(\vec{r}, t) - \int_{\Omega} d^3r \nabla \cdot \vec{j}_Q. \quad (319)$$

Vzhľadom na to, že voľba objemu Ω je ľubovoľná, musí byť nulový samotný výraz pod integrálami,

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}(\vec{r}, t) - \nabla \cdot \vec{j}_Q. \quad (320)$$

Kombináciou Fourierovho zákona a poslednej rovnice nájdeme nakoniec rovnicu vedenia tepla v ite,

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}(\vec{r}, t) + \nabla \cdot k_Q \nabla T. \quad (321)$$

Ak je k_Q dostatočne nezávislé od miesta (aj teploty) potom máme

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}(\vec{r}, t) + k_Q \Delta T \quad (322)$$

4.1.2 Okrajové podmienky

Samotná rovnica vedenia tepla platí len v tej oblasti, kde sa materiálové veličiny menia hladko (minimálne diferencovateľne). Na okraji látky je potrebné uvážiť *okrajové podmienky*, ktoré musí teplotné pole spĺňať.

Voľba okrajových podmienok závisí od fyzikálnej situácie, typické príklady predstavujú:

- Dirichletove okrajové podmienky, $T(\vec{r}, t) = T_0$ pre \vec{r} na okraji materiálu, t.j. v kontakte s telesom s veľkou tepelnou kapacitou (rezervoár).
- von Neumanove okrajové podmienky, $\nabla T(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = 0$ na okraji, t.j. v kontakte s perfektným izolantom.
- Nenulové von Neumanove, odvádzanie tepla **konvekciou** (vzduch, kvapalina) $\vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = dSh_Q\Delta T$ kde h_Q je koeficient konvekcie pre dané rozhranie, závisí od typu prúdenia, teploty, tlaku,... typické hodnoty sú dané v tabuľke (2), a $\Delta T = T(0) - T_0$, kde $T(0)$ je teplota povrchu telesa a T_0 je teplota prostredia (vzduch, kvapalina).

Mechanizmus	h_Q [W.m ⁻² .K ⁻¹]
stojaci vzduch	5 - 50
prúdiaci vzduch	25 - 250
prúdiaca voda	250 - 15000
vriaca voda	2500 - 25000
kondenzujúca vodná para	5000 - 200 000

Tabuľka 2: Typické hodnoty koeficienty prestupu tepla na rozhraní dvoch prostredí. Podľa [3]

- Strata tepla **tepelným žiarením** (Stefan-Boltzmanov zákon)

$$\vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = dS\sigma(T^4 - T_0^4), \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.6704 \times 10^{-8} \text{ kg s}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

na okraji materiálu.

- Kombinácia posledných dvoch.

4.1.3 Stacionárne vedenie tepla

Ak sú hodnoty fyzikálnych polí nemenné v čase hovoríme o stacionárnych procesoch. V prípade vedenia tepla, rovnica ktorá stacionárny režim popisuje bude

$$0 = \dot{q}(\vec{r}, t) + \nabla \cdot k_Q \nabla T, \quad (323)$$

alebo pre hustotu toku,

$$0 = \dot{q}(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{j}_Q. \quad (324)$$

Integrovaním cez ľubovoľnú priestorovú oblasť a použitím Gaussovej vety nájdeme užitočný vzťah,

$$\int d\vec{S} \cdot \vec{j}_Q = -\dot{q}. \quad (325)$$

Prirodzene, ide o presné analógie Poissonovej rovnice pre elektrostatické pole v prítomnosti nábojovej hustoty ρ ,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (326)$$

a z nej vyplývajúca Gaussova veta pre elektrické pole.

Príklad: Nech potrubím s vnútorným polomerom r_1 preteká voda s teplotou t_1 . Ak potrubie je medená rúrka s vonkajším polomerom r_2 , ktorá je obalená izolujúcim materiálom s vonkajším polomerom r_3 , a poznáme koeficienty tepelnej vodivosti medi a izolačného materiálu, aké množstvo tepla strácame na

jednotku dĺžky potrubia, ak teplota okolia je t_0 a koeficient prestupu tepla medzi izolantom a vzduchom je h_Q ?

V medi,

$$-j(r_1)2\pi r_1 l + j(r)2\pi r l = 0 \quad (327)$$

$$j(r) = j(r_1)r_1/r \quad (328)$$

$$-k_{Cu} \frac{\partial T}{\partial r} = j(r_1)r_1/r \quad (329)$$

$$T(r) = -\frac{j(r_1)r_1}{k_{Cu}} \ln r + const \quad (330)$$

Okrajové podmienky

$$t_1 = -\frac{j(r_1)r_1}{k_{Cu}} \ln r_1 + const \quad (331)$$

$$t_2 = -\frac{j(r_1)r_1}{k_{Cu}} \ln r_2 + const \quad (332)$$

$$t_1 - t_2 = -\frac{j(r_1)r_1}{k_{Cu}} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (333)$$

$$\frac{1}{l} \frac{dQ}{dt} = j(r_1)2\pi r_1 = \frac{2\pi}{\ln \frac{r_1}{r_2}} k_{Cu} (t_1 - t_2) \quad (334)$$

Teplu ktoré strácame na potrubí o dĺžke l je

$$\frac{1}{l} \frac{dQ}{dt} = -j(r_1)2\pi r_1 \quad (335)$$

takže nájdeme vzťah pre pokles teploty medzi vnútorným a vonkajším polomerom medenej trúbky

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{2\pi l k_{Cu}} \ln \frac{r_1}{r_2} \frac{dQ}{dt} \quad (336)$$

podobne, pre pokles teploty na izolujúcom materiály by sme našli

$$t_2 - t_3 = \frac{1}{2\pi l k_{iz}} \ln \frac{r_2}{r_3} \frac{dQ}{dt} \quad (337)$$

pričom celkové množstvo prestupujúceho tepla, dQ/dt musí ostávať v stacionárnom vedení nemenné.

Nakoniec, okrajová podmienka a koeficient prestupu tepla dá vzťah

$$t_3 - t_0 = -\frac{1}{h_Q} \frac{1}{2\pi r_3 l} \frac{dQ}{dt} \quad (338)$$

Sčítaním všetkých troch rovníc nájdeme výsledný vzťah pre rozdiel teplôt vnútri a v prostredí,

$$t_1 - t_0 = \left(\frac{1}{2\pi l k_{Cu}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi l k_{iz}} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{h_Q} \frac{1}{2\pi r_3 l} \right) \left(-\frac{dQ}{dt} \right) \quad (339)$$

Vidíme, že charakteristiky jednotlivých vrstiev sa spočítavajú, podobne ako elektrický odpor pre rezistory zapojené v sérii. Analógia s obvody zodpovedá priradeniu

$$t_1 - t_0 \rightarrow U \quad (340)$$

$$-\frac{dQ}{dt} \rightarrow I \quad (341)$$

$$\frac{1}{2\pi l k_{Cu}} \ln \frac{r_2}{r_1} \rightarrow R \quad (342)$$

Veličinu, charakterizujúcu vzťah medzi rozdielom teplôt na okraji tepelného vodiča a celkovému toku tepla, preto hovoríme aj *tepelný odpor* R_T , takže pre vyššie riešené vedenie cez stenu medenej trúbky nachádzame

$$R_T = \frac{1}{2\pi l k_{Cu}} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (343)$$

4.1.4 Nestacionárne vedenie tepla

Pri riešení nestacionárnych problémov nás zaujíma nasledovný problém: ak máme v čase $t = 0$ dané rozloženie teploty v látke, ako sa bude toto rozloženie meniť v nasledujúcom čase? Tento problém je veľmi blízky riešeniu dynamiky systému telies, kde nás tiež zaujíma časový vývoj, pri zadaní počiatočných hodnôt stupňov volnosti. V prípade dynamiky kontinua nazývame počiatočný tvar uvažovaných polí *počiatočnou podmienkou*. Je dôležité, že aj táto nemôže byť akákoľvek, ale musí spĺňať už diskutované okrajové podmienky.

Uvažujme zjednodušenú úlohu vedenia tepla v medenej tyči, ktorá je na krajoch tepelne dobre spojené s rezervoármi tepla pri teplote T_0 . Nech v čase $t = 0$ je daný počiatočný nehomogénny profil teplotného poľa v tyči

$$T(x, t = 0) = T_m \cos(\pi x/l) + T_0 \quad (344)$$

Tento môže byť vytvorený napríklad joulovými stratami v dôsledku tečenia prúdu, pričom pre $t > 0$ je už elektrický prúd nulový a preto sa ďalšie teplo negeneruje.

Následný časový vývoj nájdeme tak trochu hádaním riešenia v tvare

$$T(x, t) = e^{-t/\tau} T_m \cos(\pi x/l) + T_0 \quad (345)$$

s čím nájdeme, že toto bude spĺňať rovnicu vedenia tepla ak

$$\tau = \frac{c\rho l^2}{k_Q \pi^2}. \quad (346)$$

Vidíme teda, že teplota v tyči sa vyrovná s teplotou v rezervoári na časovej škále dané τ . Pre medenú tyč s dĺžkou $l = 1\text{cm}$ vyjde čas $\tau \sim 0,01\text{s}$.

Komplikovanejšie úlohy, pre ľubovoľne daný počiatočný teplotný profil možno riešiť Fourierovou transformáciou pričom časová škála vyrovnania teploty bude vždy rádovo daná časom τ , kde l je charakteristický rozmer teplotného profilu pre $t = 0$.

4.1.5 Numerického riešenie časovo-závislých problémov vedenia tepla

Použijeme zobrazenie na diskretný model, diskretizáciou priestorovej premennej:

$$\frac{\partial T(x_i, t)}{\partial t} = k \frac{T(x_i + \Delta x, t) - 2T(x_i, t) + T(x_i - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + \dot{q}(x_i, t) \quad (347)$$

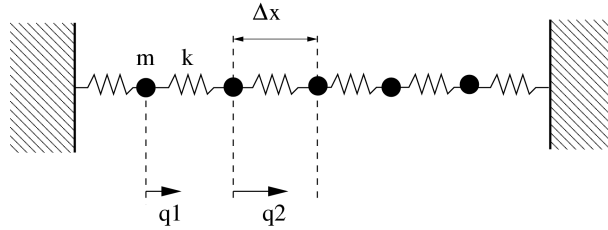
v bodoch $x_i = x_0 + i\Delta x$, pre $i = 1, \dots, M-1$ + okrajové podmienky pre x_0 a x_M .

Použijeme Eulerovu metódu riešenia výsledných obyčajných diferenciálnych rovníc tak že diskretizujeme aj čas, $t \in (0, t_N) \rightarrow t_n = n\delta t, n = 0, 1, 2, \dots, N$:

$$T(x_i, t_{n+1}) = T(x_i, t_n) + k \frac{T(x_{i+1}, t_n) - 2T(x_i, t_n) + T(x_{i-1}, t_n)}{(\Delta x)^2} \delta + \dot{q}(x_i, t_n) \delta \quad (348)$$

Tieto rovnice môžeme riešiť iteračne numericky, začínajúc s *počiatočnou podmienkou* $T(x_i, t = 0) = T_0(x_i)$.

Na prednáške boli aj obrázky ako propagujeme o krok δ a 2δ .



Obr. 16: Jedno-rozmená retiazka harmonických oscilátorov predstavuje v limite $N \rightarrow \infty, N\Delta x = L$ model jednorozmerného elastického kontinua.

4.2 Úvod k pohybovým rovniciam kontinua

- **Kontinuum** - systém zo spojito veľa stupňov voľnosti, napr. deformovateľné tuhé látky (elastické, neelastické), kvapaliny a plyny (hydraulika), tepelné pole (chladiče), elektromagnetické pole.
- Ako budú vyzerat' pohybové (dynamické) rovnice?

$$\frac{d}{dt}q_i(t) = f_i(q_1(t), \dots, q_N(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt}q(i, t) = f_i(q(j, t)) \quad (349)$$

ďalej miesto nekonečne veľa diskrétnych indexov i zavedieme spojitú premennú $x = i\Delta x$ kde napr. $\Delta x = L/N$ pri L - dĺžka systému pri 1D kontinuu. Uvedomme si $\Delta x \rightarrow 0$ pri $N \rightarrow \infty$. Takto prichádzame k pojmu *pol'a* $q(x, t)$. Časová derivácia v (349) je pri nemennom i a preto pri zavedení premennej x musíme písať časovú deriváciu ako *parciálnu deriváciu*

$$\frac{\partial}{\partial t}q(x, t) = f[x, q(x', t)], \quad (350)$$

Vo všeobecnosti, pravá strana závisí od neznámeho pol'a $q(x', t)$ aj vo všetkých prípustných hodnotách x' , nie len v x . V prípade riešenia viacerých polí máme vo všeobecnosti niekoľko zložiek neznámych polí $q_\alpha(\vec{r}, t)$, $\alpha = 1, \dots, M$, závisiacich od polohového vektora \vec{r}

$$\frac{\partial}{\partial t}q_\alpha(\vec{r}, t) = f_\alpha(\vec{r}, q_1(\vec{r}', t), \dots, q_M(\vec{r}', t)). \quad (351)$$

Voláme ich *parciálne diferenciálne rovnice*. (Nemôžeme povedať 1. rádu nakoľko pravá strana veľmi často obsahuje aj druhé derivácie vzhľadom na priestorové premenné. Pre naše účely by sme ich mohli volať parciálne diferenciálne rovnice 1. rádu vzhľadom na čas ale toto nie je používané bežne.)

- Démonštračný príklad:

Model elastického kontinua v 1D možno získať limitným prechodom $N \rightarrow \infty, N\Delta x = L$ z retiazky spojených harmonických oscilátorov (Obrázok 16).

Vlnová rovnica: Pre odvodenie pohybových rovníc pre hmotnosti $i = 2, \dots, N-1$ vyjdeme z Newtonovej pohybovej rovnice pre každú hmotnosť a výzaru pre silu pôsobiacu na hmotnosť od pružiny $F = -ky$ kde y je výchylka konca pružiny od jej rovnovážneho stavu:

$$m \frac{d^2 q_i}{dt^2} = -k(q_i - q_{i-1}) - k(q_i - q_{i+1}) \quad (352)$$

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = \frac{k}{m}(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}) \quad (353)$$

$$\frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} = \frac{k}{m}(q(x + \Delta x, t) - 2q(x, t) + q(x - \Delta x, t)) \quad (354)$$

Pre $\Delta x \rightarrow 0$ môžeme použiť Taylorov rozvoj pre susedné výchylky

$$q(x + \Delta x) \approx q(x) + \frac{\partial q}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \quad (355)$$

$$q(x - \Delta x) \approx q(x) - \frac{\partial q}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \quad (356)$$

$$(357)$$

ktorých dosadením do rovnice (354) dostaneme “vlnovú rovnicu”

$$\frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} = \frac{k(\Delta x)^2}{2m} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} \quad (358)$$

Okrajové podmienky: Pohybové rovnice koncových bodov: ak ukotvené na stene

$$m \frac{d^2 q_1}{dt^2} = -kq_1 - k(q_1 - q_2) \quad (359)$$

$$m \frac{d^2 q_N}{dt^2} = -k(q_N - q_{N-1}) - kq_N \quad (360)$$

čo sa dá napísať ako pohybové rovnice pre vnútorné body ak pridáme podmienky

$$q_0 = 0, \quad q_{N+1} = 0, \quad (361)$$

ktoré v limite prejdú na nulové *Dirichletove okrajové podmienky*

$$q(x=0) = 0, \quad q(x=L) = 0. \quad (362)$$

Ak by sme mali voľné konce bude platiť

$$m \frac{d^2 q_1}{dt^2} = -k(q_1 - q_2) \quad (363)$$

$$m \frac{d^2 q_N}{dt^2} = -k(q_N - q_{N-1}) \quad (364)$$

čo sa dá napísať ako pohybové rovnice pre vnútorné body ak pridáme podmienky,

$$q_1 - q_0 = 0, \quad q_N - q_{N+1} = 0, \quad (365)$$

ktoré v limite prejdú na nulové *von Neumannove okrajové podmienky*

$$\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (366)$$

Okrajové podmienky, či už Dirichletove, von Neumannove alebo iné, sú neoddeliteľnou súčasťou samotnej parciálnej diferenciálnej rovnice; tu nám vznikli ako dôsledok limitného prechodu spolu s objavením sa druhej parciálnej derivácie podľa x na pravej strane diferenciálnej rovnice. Bez ich uvedenia nemajú rovnice jednoznačné riešenie.

Riešenia: Ak si označíme konštanty $\frac{k(\Delta x)^2}{2m} = c^2$, potom c má zmysel rýchlosti šírenia vzruchov (zvuku) v reťazke, t.j. ľubovoľná výchylka daná počiatočnou podmienkou v čase $t = 0$ ako $q(x, t = 0) = q_0(x)$ vedie pre $t > 0$ na riešenie vlnovej rovnice

$$q(x, t) = q_0(x \pm ct). \quad (367)$$

Prepis do štandardného tvaru (len s prvými deriváciami časovými) možno previesť zavedením *rýchlostného pol'a*

$$v(x, t) = \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \quad (368)$$

a potom získame systém dynamických rovníc

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} \quad (369)$$

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = v(x, t) \quad (370)$$

Poznámka: pozor, aj c aj $v(x, t)$ sú rýchlosti, ale celkom odlišných objektov. c je konštantná rýchlosť ktorou sa šíri akýkoľvek vzruch cez retiazku a $v(x, t)$ je premenlivá (oscilujúca) rýchlosť malých hmotných elementov m nachádzajúcich sa v blízkosti polohy x v čase t .

- **Maxwellove rovnice** Predstavujú systém parciálnych diferenciálnych rovníc pre vektorové polia \vec{E} a \vec{B}

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (371)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \vec{j} + \nabla \times \vec{B} \quad (372)$$

s tým, že počiatkové podmienky, t.j. polia v $t = 0$, musia spĺňať

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (373)$$

Úloha: Presvedčte sa, že ak elektrické a magnetické polia spĺňajú podmienky (373) potom sú tieto podmienky splnené a pre každý nasledujúci čas.

Naviac, polia musia spĺňať a okrajové podmienky; vo voľnom priestore $\vec{B} \rightarrow 0$ a $\vec{E} \rightarrow 0$ pre $\vec{r} \rightarrow \infty$. V obmedzenom prostredí závisia okrajové podmienky od charakteru materiálu a môžu byť zdanlivo dosť odlišné od Dirichlevových alebo von Neumannových, napr. $\vec{E} \times d\vec{S} = 0$ na kovoch kde $d\vec{S}$ je normálový vektor povrchu kovu a $\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = U$ kde body 1 a 2 ležia na dvoch kovoch medzi ktorými je napätie U .

- **Predstava numerického riešenia časovo-závislých PDR** Použijeme spätné zobrazenie na diskretný model, diskretizáciou priestorovej premennej:

$$\frac{\partial v(x_i, t)}{\partial t} = c^2 \frac{q(x_i + \Delta x, t) - 2q(x_i, t) + q(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (374)$$

$$\frac{\partial q(x_i, t)}{\partial t} = v(x_i, t) \quad (375)$$

v bodoch $x_i = x_0 + i\Delta x$, pre $i = 2, \dots, N - 1$ + okrajové podmienky pre x_1 a x_N .

Použijeme Eulerovu metódu riešenia výsledných obyčajných diferenciálnych rovníc tak že diskretizujeme aj čas, $t \in (0, T) \rightarrow t_n = n\delta t, n = 0, 1, 2, \dots, M$:

$$v(x_i, t_{n+1}) = v(x_i, t_n) + c^2 \frac{q(x_{i+1}, t_n) - 2q(x_i, t_n) + q(x_{i-1}, t_n)}{(\Delta x)^2} \delta \quad (376)$$

$$q(x_i, t_{n+1}) = q(x_i, t_n) + v(x_i, t_n) \delta \quad (377)$$

Tieto rovnice môžeme riešiť iteračne numericky, začínajúc s *počiatočnou podmienkou* $v(x_i, t = 0) = v_0(x_i)$ a $q(x_i, t = 0) = q_0(x_i)$.

Na prednáške boli aj obrázky ako propagujeme o krok δ a 2δ .

V praxi sa používajú podstatne efektívnejšie metódy napr. na diskretizáciu priestorových premenných - rozvoj do konečnej bázy a na časové propagovanie Lanczosova diagonalizácia v Krylovovom podpriestore priestoru generovanom vyššie spomenutou konečnou bázou.

4.3 Pojmy a veličiny v dynamike kontinua v 3D

1. Lagrangeov prístup k popisu kontinua.

Predpoklad popisu kontinua - hmotné elementy kontinua s konštantnou hmotnosťou menia svoj tvar a veľkosť sa hýbu po dráhach, ktoré sa navzájom nepretínajú, $\vec{r}(t, \vec{r}_0)$. Polohový vektor \vec{r}_0 označuje počiatočnú polohu elementu v čase $t = 0$. Z tejto predstavy dostávame, že rýchlosť elementu kontinua bude

$$\vec{v}_L(t, \vec{r}_0) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t, \vec{r}_0) = \frac{dx(t, \vec{r}_0)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t, \vec{r}_0)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t, \vec{r}_0)}{dt} \vec{k}$$

Zrýchlenie elementu kontinua pomocou Lagrangeovho pohľadu:

$$\vec{a}(t, \vec{r}_0) = \frac{d}{dt} \vec{v}_L(t, \vec{r}_0)$$

Eulerov prístup k popisu kontinua.

$\vec{v}(\vec{r}, t)$ - rýchlostné vektorové pole udávajúce lokálnu rýchlosť kontinua v mieste \vec{r} a čase t . Toto priamo súvisí s rýchlosťou elementu,

$$\vec{v}_L(t, \vec{r}_0) = \vec{v}(\vec{r}(t, \vec{r}_0), t)$$

Zrýchlenie elementu vyjadrené pomocou rýchlostného poľa potom bude

$$\vec{a}(t, \vec{r}_0) = \frac{d\vec{v}_L(t, \vec{r}(t, \vec{r}_0))}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{v}(x(t, \vec{r}_0), y(t, \vec{r}_0), z(t, \vec{r}_0), t) \quad (378)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}(x(t, \vec{r}_0), y(t, \vec{r}_0), z(t, \vec{r}_0))}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}(x(t, \vec{r}_0), y(t, \vec{r}_0), z(t, \vec{r}_0))}{\partial x} \frac{dx(t, \vec{r}_0)}{dt} + \frac{\partial \vec{v}(x(t, \vec{r}_0), y(t, \vec{r}_0), z(t, \vec{r}_0))}{\partial y} \frac{dy(t, \vec{r}_0)}{dt} + \frac{\partial \vec{v}(x(t, \vec{r}_0), y(t, \vec{r}_0), z(t, \vec{r}_0))}{\partial z} \frac{dz(t, \vec{r}_0)}{dt} \quad (379)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (380)$$

kde $\nabla \vec{v}(\vec{r}, t)$ je gradient z vektorového poľa (výsledok takej operácie je tenzor).

Člen s gradientom rýchlostného poľa je dôvodom komplikácií hydrodynamiky: je inherentne nelineárny vzhľadom na rýchlostné pole.

Nájdený výraz pre deriváciu veličiny spojenej s hýbucim sa kontinuum (v tomto prípade rýchlosť v_L) podľa času,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \quad (381)$$

nazývame **hydrodynamická derivácia**. Predstavuje rýchlosť zmeny takej vlastnosti kontinua, ktorá je viazaná na samotný materiál kontinua a teda je ním "unášaná".

2. Pojem hustoty hmotnosti

$$\rho(\vec{r}, t) : M_\Omega(t) = \int_\Omega d^3r \rho(\vec{r}, t) \quad (382)$$

Príklady iných polí:

- (a) Hustota elektrického náboja, $\rho^e(\vec{r}, t) = \frac{e}{m_e} \rho(\vec{r}, t)$ kde $\rho(\vec{r}, t)$ je hustota hmotnosti elektrónov, e je náboj jedného elektrónu a m_e jeho hmotnosť.

(b) Hustota častíc i -teho druhu (potrebné pri chemických reakciách)

$$n^i(\vec{r}, t) : N_{\Omega}^i(t) = \int_{\Omega} d^3r n^i(\vec{r}, t) \quad (383)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_i M_o^i n^i(\vec{r}, t) \quad (384)$$

(c) Špecifická vnútorná energia (potrebné pri vedení tepla)

$$u(\vec{r}, t) : U_{\Omega(t)}(t) = \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t) u(\vec{r}, t) \quad (385)$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dQ}{dt} \quad (386)$$

kde posledná rovnica predstavuje 1. vetu termodynamickú.

3. Pojem vektorového poľa hustoty toku hmotnosti $\vec{j}_{\rho}(\vec{r}, t)$:

$\vec{j}_{\rho} \cdot d\vec{S} dt$ = "hmotnosť ktorá prejde plôškou $d\vec{S}$ za krátky čas dt "

$$\frac{\Delta M}{dt} = \frac{\Delta l dS}{dt} \rho = \frac{\vec{v} dt \cdot d\vec{S}}{dt} \rho \quad (387)$$

$$\vec{j}_{\rho}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t) \quad (388)$$

4. **Rovnica kontinuity** - odvodenie pomocou ľubovoľnej no nehybnej oblasti Ω .

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3r \rho(\vec{r}, t) = - \int_{\Sigma} d\vec{S} \cdot \vec{j}_{\rho}(\vec{r}, t) \Rightarrow \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\rho}(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)) = 0 \quad (389)$$

Rovnica kontinuity použitím hydrodynamickej derivácie,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (390)$$

Poznámka: pre nestlačiteľnú kvapalónu máme $\frac{d\rho}{dt} = 0$ t.j. $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ čo vytvára analógiu medzi stacionárnym elektrickým poľom vo vákuu a rýchlostným poľom nestlačiteľnej kvapaliny.

Poznámka 2: Rovnica kontinuity sa dá získať aj z ľubovoľného objemu $\Omega(t)$, ale takého že objem $\Omega(t)$ sa hýbe s kontinuum (t.j. jeho hranice sú pevne spojené s určitými bodmi kontinua), t.j.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d^3r \rho(\vec{r}, t) = 0.$$

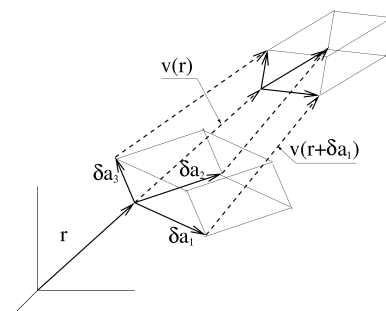
Tento postup bol v zime 2009 odprednášaný.

5. (V 2009 neodprednášam, je to len pre zvedavých) **Základná veta kinematiky kontinua** - najvšeobecnejší pohyb dostatočne malého elementu kontinua je paralelný prenos, otočenie a roztiahnutie (stlačenie) v 3 lineárne nezávislých smeroch [4].

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{a}_i) &\approx \vec{v}(\vec{r}) + \delta\vec{a}_i \cdot \nabla_{\vec{r}} \vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) + (\vec{v}(\vec{r}) \nabla) \cdot \delta\vec{a}_i \\ &= \vec{v}(\vec{r}) + \vec{\omega}(\vec{r}) \times \delta\vec{a}_i + \frac{d}{dt} \overleftrightarrow{\epsilon}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{a}_i + \mathcal{O}(|\delta\vec{a}_i|^2), \end{aligned}$$

kde

$$\vec{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v}(\vec{r})$$



predstavuje lokálnu rotáciu kontinua (evidentne všetky $\delta\vec{a}_i$ sa natočia o uhol $\vec{\omega}(\vec{r})dt$) a

$$\frac{d}{dt} \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\vec{r}) = \frac{1}{2} ((\vec{v}(\vec{r})\nabla) + \nabla\vec{v}(\vec{r}))$$

predstavuje časovú zmenu tenzora deformácia kontinua. Ak lokálne natočíme súradnicový systém tak aby $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$ bol diagonálny dostaneme (ak zvolíme $\delta\vec{a}_i$ ako vlastné vektory $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\vec{r})$)

$$\Delta\delta a_i = \epsilon_{ii}\delta a_i, \quad i = 1, 2, 3$$

a pre relatívnu zmenu dostatočne malého objemu (s daným množstvom hmotnosti)

$$\delta V/V = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \text{Tr} \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}.$$

Alebo, použitím časových derivácií

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho(\vec{r})} \frac{d\rho(\vec{r})}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Tr} \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} = \nabla \cdot \vec{v}$$

(rovnica kontinuity)

6. Pohybová rovnica kontinua (Newtonova pohybová rovnica)

(a) Sily

Sily, ktoré pôsobia na vybraný objem kontinua $\Omega(t)$, fixovaný na hmotu kontinua, t.j. s nemennou celkovou hmotnosťou, môžeme rozdeliť na *krátko-dosahové* a *d'aleko-dosahové*.

(b) Krátko-dosahové sily pôsobia cez plochu $\Sigma(t)$, ktorá uzatvára objem $\Omega(t)$. Popisujeme ich pomocou *tenzora napätia* - ten dáva silu, ktorou pôsobí vonkajší materiál na element plochy $d\vec{S}$,

$$d\vec{F} = d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r}, t), \quad (391)$$

$$\vec{F} = \int_{\Sigma(t)} d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r}, t). \quad (392)$$

Príklady:

i. Tlak predstavuje záporné napätie pre izotrópne prostredie

$$\overleftrightarrow{\sigma} = -p(\vec{r}, t) \overleftrightarrow{1}, \quad (393)$$

pretože čo do veľkosti vieme, že $dF = p dS$, a orientácia je taká, že ak prostredie okolo oblasti $\Omega(t)$ je charakterizované tlakom p , potom prostredie pôsobí smerom do $\Omega(t)$, t.j. proti smeru orientácie obopínajúcej tento objem (uzavretá plocha je vždy orientovaná smerom von) čím nachádzame

$$d\vec{F} = -d\vec{S} p$$

čo sa dá zapísať aj ako rovnica (393).

Samotný tlak p sa neberie ako nová neznáma veličina, ale určuje sa pomocou lokálnej hustoty $\rho(\vec{r}, t)$, t.j.

$$p(\vec{r}, t) = f(\rho(\vec{r}, t)).$$

kde funkcia $f()$ má najčastejšie mocninný charakter.

Napr. pre mono-molekulárne plyny blízke k ideálnym platí stavová rovnica

$$pV = nRT,$$

kde p je tlak plynu, V je jeho objem, n látkové množstvo, R molárna plynová konštanta a T termodynamická teplota plynu. Vyjadrením látkového množstva n pomocou hmotnosti m a mólovej hmotnosti M_m , $n = m/M_m$ dostaneme

$$p(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \frac{R}{M_m} T$$

V princípe aj teplota bude mať závislosť od miesta a času, $T(\vec{r}, t)$ no pre jej uváženie je potrebné uvažovať aj rovnicu vedenia tepla ku ktorej sa vrámcí našich prednášok už nedostaneme.

ii. Viskózne sily sa prejavujú pomocou tenzora napätia. Motivácia ku viskozite - tangenciálne sily, a intuitívny vzťah

$$F_y = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

(pre detailný výklad vid' poznámky z prednášok)

Presná definícia pre nestlačiteľné kontinuum je

$$\overleftrightarrow{\sigma}_\eta = (\vec{i}\vec{j} + \vec{j}\vec{i}) \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + (\vec{i}\vec{k} + \vec{k}\vec{i}) \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + (\vec{j}\vec{k} + \vec{k}\vec{j}) \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad (394)$$

čo možno vektorovo zapísať aj ako

$$\overleftrightarrow{\sigma}_\eta = \eta (\nabla \vec{v} + \vec{v} \nabla - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \overleftrightarrow{1}), \quad (395)$$

kde operácia $\nabla \vec{v}$ je nám už známy výraz pre gradient vektorového poľa (vyskytol sa pri zavedení hydrodynamickej derivácie)

$$\nabla \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \vec{i} \vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \vec{i} \vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \vec{i} \vec{k} + \dots = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

a operácia $\vec{v} \nabla$ je predstavuje výraz

$$\vec{v} \nabla = \frac{\partial v_x}{\partial x} \vec{i} \vec{i} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{i} \vec{j} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{i} \vec{k} + \dots = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Prvé dva členy v (395) teda predstavujú symetrizáciu vyššie uvedenej matice derivácií (pre vylúčenie čistej rotácie), posledný vylúčenie tzv. objemovej viskozity súvisiacej so stláčaním kontinua. η sa nazýva *dynamický koeficient viskozity*. Tvar (395) je platný aj pre stlačiteľné viskózne kontinuum.

Používa sa aj definícia koeficientu *kinematickej viskozity*, γ

$$\gamma = \frac{\eta}{\rho}, \quad [\gamma] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$$

Pre predstavu, pre vodu máme $\gamma \approx 0.01 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$.

Do pohybovej rovnice nesláčiteľnej kvapaliny vstupuje tenzor viskozity v tvare

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{\sigma}_\eta = \eta \Delta \vec{v}. \quad (396)$$

- (c) Ďaleko-dosahové sily sú buď gravitačného alebo elektro-magnetického pôvodu a môžeme ich vyjadriť pomocou sily pôsobiacej na jednotku hmotnosti kontinua (špecifickej sily) $\vec{f}(\vec{r}, t)$,

$$d\vec{F} = \int_{\Omega(t)} d^3 r \rho(\vec{r}, t) \vec{f}(\vec{r}, t). \quad (397)$$

Príklady:

- i. špecifická gravitačná sila v homogénnom gravitačnom poli, $\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{g}$.
- ii. špecifická Lorentzova sila (elektromagnetická sila)

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \frac{q}{m_q} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right),$$

kde q/m_q je pomer náboju a hmotnosti častíc tvoriace študované kontinuum a \vec{E} a \vec{B} sú polia elektrickej intenzity a magnetickej indukcie.

Niekedy môžeme zapísať špecifickú silu tvare potenciálu, t.j.

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = -\nabla \phi(\vec{r}, t),$$

Napr. pre elektrostatické polia

$$f(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \frac{q}{m_q} \vec{E}(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}, t) \frac{q}{m_q} \nabla \phi_E(\vec{r}),$$

kde $\phi_E(\vec{r})$ je elektrostatický potenciál, alebo pre gravitačné pole

$$f(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{g} = -\rho(\vec{r}, t) \nabla(-\vec{g} \cdot \vec{r}),$$

kde $-\vec{g} \cdot \vec{r} = gh$ je gravitačný potenciál v homogénnom gravitačnom poli (h má zmysel výšky).

- (d) Samotná rovnica sa odvodí z Newtonoveho pohybového zákona

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F},$$

kde \vec{P} je hybnosť časti kontinua uzavretého v oblasti $\Omega(t)$,

$$\vec{P} = \int dm \vec{v} = \int_{\Omega(t)} d^3 r \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t),$$

a \vec{F} je celková sila čo na túto časť kontinua pôsobí, t.j.

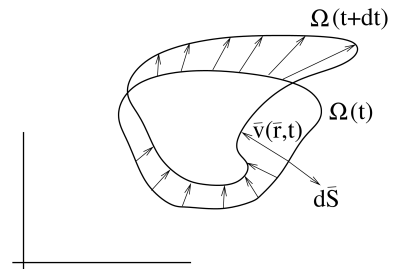
$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) d^3 r = \int_{\Omega(t)} d\vec{F} + \int d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}.$$

s výsledkom (tu nasleduje použitie hydrodynamickej derivácie a Gaussovej vety, spravil na tabulu, vid' poznámky z prednášok.)

Výsledná **pohybová rovnica kontinua** potom je:

$$\rho(\vec{r}, t) \left(\frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \vec{v}(\vec{r}, t) \right) = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r}, t) + \vec{f}(\vec{r}, t). \quad (398)$$

Táto nám dáva diferenciálnu rovnicu pre časovú zmenu rýchlostného poľa v ľubovoľnom mieste kontinua. Spolu s rovnicou kontinuity a rovnicou pre tenzor napätia tvoria tento systém uzavretý systém rovníc ktorý je typicky nutné riešiť numerickými metódami.



Zmena objemu $\Omega(t)$, pevne spojenom s kontinuumom, za malý čas dt .

Tri užitočné identity:

1. Použitím “bac - cab”

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \frac{1}{2} v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (399)$$

t.j. hustota kin. energie a vírivosť. Tento člen zabezpečuje inherentne nelineárny charakter dynamiky kontinua - neprítomný len pre malé kmity bez prenosu látky (napr. pružnosť a zvuk v tuhých látkach).

2. Použitím “bac - cab”

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v} \quad (400)$$

3. Definujme si symetrizovaný gradient vektorového poľa $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}$,

$$\nabla \vec{v} + \vec{v} \nabla = \sum_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \vec{e}_i \vec{e}_j \quad (401)$$

potom 3. identita je

$$\nabla \cdot (\nabla \vec{v} + \vec{v} \nabla) = \Delta \vec{v} + \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) \quad (402)$$

4.3.1 Klasifikácia kontinuí (Čomu sa rovná tenzor napätia a kedy platí Bernoulliho rovnica?)

Ideálna kvapalina (suchá voda):

1. Nestlačiteľná: $\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \rho(\vec{r}, t) = const$ čo z rovnice kontinuity, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})$, dá dôležitú podmienku na ľubovoľné nestlačiteľné prúdenie

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

2. Bez viskozity: $\overleftrightarrow{\sigma} = -p \overleftrightarrow{1}$, p taký aby bol objem kvapaliny nemenný.
3. Bernoulliho rovnica platí.

Nestlačiteľná kvapalina (mokrú voda):

1. Nestlačiteľná: $\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \rho(\vec{r}, t) = const$ a $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.
2. Viskózná: $\overleftrightarrow{\sigma} = -p \overleftrightarrow{1} + \eta (\nabla \vec{v} + \vec{v} \nabla)$, kde $(\vec{v} \nabla)_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ a η je koeficient dynamickej viskozity.
- motivácia s tokom v smere x , $F_x = S_y \sigma_{yx} \sim \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$
 - symetrizácia, aby sa vylúčili čisté rotácie keď $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Pohybová rovnica použitím vzťahu (402) potom nadobudne tvar Navier-Stokesovej rovnice:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} + \vec{f}$$

3. Bernoulliho rovnica platí iba ak je prúdenie *laminárne*, t.j. $\nabla \times \vec{v} = 0$

Stlačiteľný plyn (skôr ako kvapalina):

1. ak zanedbáme viskozitu, čo je pre mnoho plynov a typické podmienky v ktorých sa nachádzajú dobré priblíženie, bude $\overleftrightarrow{\sigma} = -p \overleftrightarrow{1}$

2. ideálny plyn - $p(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)T(\vec{r}, t)R/M_0$, $R = k_B N_A$ mólová plynová konštanta, k_B je Boltzmanova konštanta a M_0 je hmotnosť jedného molu kontinua. Vo všeobecnosti zisťujeme ďalšie skalárne pole ktoré musíme počítať - teplotné pole $T(\vec{r}, t)$. V nasledujúcom pri diskusii reálnych plynov, bude dynamika teplotného pol'a považovaná za veľ mi rýchlu (adiabatický dej) alebo naopak, vôbec nemennú (izotermický dej) a teda sa ňou nebudeme explicitne zaoberať.
3. reálny plyn - je stlačiteľ ný (koeficient stlačiteľ nosti $\kappa = -\frac{\partial V}{\partial p} \frac{1}{V} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{1}{\rho}$ h) - pričom tlak je funkciou jeho hustoty, $p(\rho)$.

Často možno túto závislosť modelovať (alebo dokonca odvodiť) v tvare rovnice *polytropy*

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n.$$

(pre adiabatický proces $n = 1.4$)

4. Pre pohybové rovnice je dôležitý termodynamický potenciál $h(\rho, T)$

$$dh = \frac{1}{\rho} dp \Rightarrow h(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}$$

(pre Bernoulliho rovnicu pre stlačiteľ ný plyn) Napr. pre izotermické prúdenie

$$h(T, p) = \frac{RT}{M} \ln p,$$

pre polytropu

$$h(p) = \frac{p_0^{1/n}}{\rho_0} \frac{p^{1-1/n}}{1-1/n}$$

5. Bernoulliho rovnica platí, ale miesto člena $p(\vec{r})/\rho$ musíme vziať $h(p(\vec{r}))$.

Tuhé látky (len extrémne stručne):

1. $\frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{r}, t) \approx \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\vec{r}, t)$

2. Namiesto rýchlostného pol'a je hľ adanou veličinou tenzor deformácie $\overleftrightarrow{\epsilon}$

$$\frac{d}{dt} \overleftrightarrow{\epsilon} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial v_i(\vec{r}, t)}{\partial x_j} \vec{e}_i \vec{e}_j = \frac{1}{2} ((\vec{v}(\vec{r}) \nabla) + \nabla \vec{v}(\vec{r}))$$

3. V prípade elastických deformácii používame zovšeobecnený Hookov zákon:

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \overleftrightarrow{\gamma} \cdot \overleftrightarrow{\epsilon} \quad \text{t.j.} \quad \sigma_{ij} = \sum_{klmn} \gamma_{klmn} \epsilon_{mn}$$

4.3.2 Stacionárne prúdenie

Prúdnicu: krivka majúca v kažom bode \vec{r} a čase t dotykový vektor daný vektorovým polom $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

Pozdĺž prúdnic máme $\vec{v} dt \cdot \nabla \times \vec{v} = 0$. Ak najprv uvažíme neslačiteľnú kvapalinu ($\rho = konst$) a integrujeme pohybovú rovnicu pozdĺž prúdnic, pričom uvažíme len pôsobenie homogénneho gravitačného poľa, t.j. $\vec{f} = \vec{g} = -\nabla(-\vec{g} \cdot \vec{r}) = -\nabla\phi_g$ a použijeme vzťah (399) na prepis člena “ $\nabla \cdot \nabla \vec{v}$ ”, dostaneme

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \phi_g \right) = \frac{\eta}{\rho} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \Delta \vec{v} \quad (403)$$

$$\left[\frac{1}{2} v^2(\vec{r}_1) + \frac{p(\vec{r}_1)}{\rho} + \phi_g(\vec{r}_1) \right] - \left[\frac{1}{2} v^2(\vec{r}_0) + \frac{p(\vec{r}_0)}{\rho} + \phi_g(\vec{r}_0) \right] = \frac{\eta}{\rho} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \Delta \vec{v} \quad (404)$$

$$(405)$$

t.j. výraz

$$\frac{1}{2} v(\vec{r})^2 + \frac{p(\vec{r})}{\rho} + \phi_g(\vec{r}),$$

so zmyslom hustoty energie kontinua, je konštantný na prúdnicu, ak je viskozita nulová, resp. približne konštantný ak je viskozita malá.

Komentáre:

- pre laminárne prúdenie je táto hodnota rovnaká pre všetky prúdnicu nakoľko v tomto prípade $\nabla \times \vec{v} = 0$ nezávisle od krivky po ktorej integrujeme.
- pre neslačiteľnú kvapalinu, t.j. $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, a prúdenie je laminárne, t.j. $\nabla \times \vec{v} = 0$ máme podľa rovnice (400) že aj $\Delta \vec{v} = 0$ a preto v takomto prípade bude platiť Bernoulliho rovnica aj pre laminárne prúdenie viskózne kvapaliny.
- pre stlačiteľnú kvapalinu, resp. plyn nemožno previesť hustotu pod znak gradientu, namiesto toho treba zaviesť termodynamický potenciál,

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla h \quad (406)$$

čo v konečnom dôsledku vedie na Bernoulliho rovnicu v tvare

$$\frac{1}{2} v(\vec{r})^2 + h(\vec{r}) + \phi_g(\vec{r}) = konst.$$

(neodprednášané na jeseň 2008)

4.4 Prúdenie viskózne kvapaliny

Motivávia ku viskozite - tangenciálne sily, a intuitívny vzťah

$$F_y = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Definícia je pomocou časovej zmeny tenzora deformácie (zavedený v základnej vete kinematiky kontinua)

$$\frac{d}{dt} \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{v} + \vec{v} \nabla)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\sigma}_\eta = \eta(\nabla \vec{v} + \vec{v} \nabla - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \overset{\leftrightarrow}{1}), \quad (407)$$

(prvé dva členy - symetrizácia, posledný - vylúčenie objemovej viskozity $p_v = -\nu \nabla \cdot \vec{v}$.) kde η sa nazýva dynamický koeficient viskozity. Do pohybovej rovnice neslačiteľnej kvapaliny vstupuje v tvare

$$\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma}_\eta = \eta \Delta \vec{v} \quad (408)$$

z čoho dostávame Navier-Stokes-ovu rovnicu nestlačiteľnej kvapaliny

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} + \vec{f} \quad (409)$$

kde sa používa definícia kinematickej viskozity, γ

$$\gamma = \frac{\eta}{\rho}, \quad [\gamma] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$$

Pre predstavu, pre vodu máme $\gamma \approx 0.01 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$.

Teraz nasleduje riešenie toku v tentkej vodorovnej trubici...
s výsledkom

$$v_x(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (410)$$

$$p(x) = -\frac{\Delta p}{l} x + p_0 \quad (411)$$

$$u = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta p}{8\eta l} \quad (412)$$

Celkový tok a analógia elektrického odporu.

4.5 Teória podobnosti a turbulencia

Reynolds (1883-95) prepojenie teória a praxe - vzťah procesov na rôznych mierkach (podobnosť)

Identifikácia veličín podstatných pre ustálené prúdenie:

$$\overline{r, l \quad v \quad \rho \quad \gamma = \eta/\rho \quad \Delta p}$$

Pomer veličín v Navier-Stokes-ovej rovnici:

$$\frac{dv}{dt} / \gamma \Delta v \sim \frac{ud\{l, r \dots\}}{\gamma} = Re \quad (413)$$

$$1/\rho \nabla p / \frac{dv}{dt} \sim \frac{p}{\rho u^2} = \frac{\Delta p d}{\rho u^2 l} \quad (414)$$

Použitie týchto pozorovaní:

- ustálené tečenia s identickým Reynoldsovým číslom Re sú si podobné.
- tečenie v trubici dalo

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho u^2 \frac{l}{d} \lambda, \quad \lambda = \frac{64}{Re}$$

- experimentálne porozovania pre turbulentné prúdenia

$$\lambda = \lambda(Re)$$

- ... t.j. centrálna je závislosť λ od Re . Kvalitatívna zmena v tejto závislosti - kritické Reynoldsovo číslo (500-20000) - prechod od laminárneho (stáva sa nestabilným) k turbulentnému prúdeniu.

$$\ln \lambda(Re) = \begin{cases} -\ln Re + \ln 64, & Re < Re_c \\ -\frac{1}{4} \ln Re + \ln 0.3164 & Re > Re_c \end{cases} \quad (415)$$

Poznámka: Hodnota kritického Reynoldsovo čísla, Re_c , závisí od konkrétnej geometrie problému.

Literatúra

- [1] D. Ilkovič, “Fyzika I”, Alfa, STNL, 1968.
- [2] Š. Bárta, “Fyzika dynamických procesov” skriptá STU, 2002.
- [3] J. R. Welty, CH. E. Wicks, and R. E. Wilson, “Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer”, John Wiley & Sons, Inc., New York 1969.
- [4] A. Sommerfeld, “Mechanik der deformierbaren medien” Leipzig, 1949. (aj v ruštine a určite aj angličtine)
- [5] Stručné uvedenie je napr. v 5. kapitole knihy A. Grega, D. Klivanec, E. Rajčan, “Matematika pre fyzikov”, SPN Bratislava 1974.
- [6] D. Ilkovič, “Fyzika I.” Alfa-SNTL (1958).
- [7] R. Grepl, “Kinematika a dynamika mechatronických systémøu” CERM, Akademické nakladatelství (2007).
- [8] S. Cetinkunt, Mechatronics, John Wiley & Sons, (2007).
- [9] <http://www.stanford.edu/class/cs223a/>
- [10] <http://arri.uta.edu/popa/robotics/>
- [11] <http://www-ee.ccny.cuny.edu/www/web/jxiao/G5501-web.htm>